



Università degli Studi di Padova

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
Corso di Laurea in Matematica

**SUPERINTEGRABILITÀ  
E SIMMETRIA  
DEI  
SISTEMI HAMILTONIANI**

Candidato:  
**Diego Lunardello**

Relatore:  
**Chiar.mo Prof.  
Francesco Fassò**

---

Anno Accademico 2011-2012

# Indice

<b>1</b>	<b>Azioni di gruppo</b>	<b>3</b>
1.1	Concetti di base . . . . .	3
1.2	Esempi . . . . .	7
1.3	Mappe momento . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Sistemi integrabili e superintegrabili</b>	<b>17</b>
2.1	Teorema di Liouville-Arnol'd . . . . .	17
2.2	Teorema di Mischenko-Fomenko . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Interpretazione geometrica di Mischenko-Fomenko</b>	<b>27</b>
3.1	Varietà di Poisson . . . . .	27
3.2	Bifoliazioni e bifibrazioni . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Azioni di gruppo e integrabilità</b>	<b>40</b>
4.1	Origine gruppale della bifibrazione . . . . .	40
4.2	Camere di Weyl . . . . .	41
4.3	Decomposizione di $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ . . . . .	44
4.4	La fibrazione coisotropa come mappa momento . . . . .	47
4.5	Condizioni gruppali per l'isotropia . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Esempi</b>	<b>53</b>
5.1	Punto in campo centrale . . . . .	53
5.2	Corpo rigido di Eulero-Poinsot simmetrico . . . . .	57

# Introduzione

Il problema che affronteremo in questa tesi è la correlazione tra simmetria e integrabilità in un sistema Hamiltoniano. Vogliamo in particolare considerare un'azione di un gruppo di Lie (simmetria) e ricavare degli integrali primi da cui si possa integrare il sistema.

Partiamo da un risultato classico, il teorema di Arnol'd e Liouville, il quale sotto alcune ipotesi sugli integrali primi enuncia che esistono una foliazione del sistema in tori Lagrangiani e coordinate azione da cui sole dipende l'Hamiltoniana. Il difetto di questo teorema è che il numero di integrali primi indipendenti e in involuzione deve essere esattamente la metà della dimensione della varietà. Per comprendere meglio la natura di un sistema meccanico è dunque necessario generalizzare questo risultato; è il caso del teorema dovuto a Nekhoroshev, Mischenko e Fomenko nel quale si foglia la varietà in tori isotropi (nel senso simplettico). In questo caso si parla di sistema Hamiltoniano superintegrabile, degenere o integrabile nel senso non commutativo. Per studiare la struttura di questi tori isotropi e in generale delle coordinate locali del sistema, dobbiamo rivedere il teorema di superintegrabilità da un punto di vista simplettico: le ipotesi equivalgono all'esistenza di una fibrazione simpletticamente completa con fibre isotrope e compatte.

Definita un'azione fortemente Hamiltoniana di un gruppo di Lie sulla varietà tale che l'Hamiltoniana rimanga invariata, consideriamo la mappa momento e vediamo sotto quali condizioni induca una foliazione isotropa tale che esista la sua polare. Vogliamo dunque dare delle ipotesi sull'azione di gruppo tali da foliare, attraverso la mappa momento, la varietà in tori isotropi e avere la superintegrabilità. Non considereremo il problema inverso, cioè quando da un sistema integrabile/superintegrabile possiamo derivare una simmetria tale che la mappa momento sia la fibrazione considerata.

# Capitolo 1

## Azioni di gruppo

### 1.1 Concetti di base

Il modo naturale di rappresentare le simmetrie presenti in un sistema Hamiltoniano consiste nel far agire un gruppo di Lie sulla varietà in modo tale che l'Hamiltoniana sia costante sulle orbite.

In questo capitolo faremo uso di varie nozioni riguardanti i gruppi e le algebre di Lie; per approfondire l'argomento si veda [12] e [13] principalmente.

Iniziamo con qualche definizione.

**Definizione 1.1.1.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie e  $P$  una varietà, un'azione sinistra di  $G$  su  $P$  è una mappa differenziabile  $\varphi : G \times P \rightarrow P$  tale che*

- $\varphi(e_G, x) = x$  per ogni  $x \in P$ ;
- $\varphi(h, \varphi(g, x)) = \varphi(hg, x)$  per ogni  $h, g \in G$  e  $x \in P$ .

*Possiamo indicare l'azione di un elemento  $g \in G$  con il diffeomorfismo  $\varphi_g : P \rightarrow P$ ; avremo quindi che  $\varphi_{e_G} = id_P$  e  $\varphi_h \circ \varphi_g = \varphi_{hg}$ .*

*Semplifichiamo la notazione scrivendo  $g \cdot p$  al posto di  $\varphi_g(p)$ .*

Fissato un punto della varietà  $p \in P$ , la sua **orbita** è l'insieme di tutti i punti che può raggiungere attraverso l'azione:

$$\mathcal{O}_p := \{g \cdot p \mid g \in G\} = G \cdot p \subseteq P.$$

Un'azione è detta **transitiva** se per ogni  $p, x \in P$  esiste  $g \in G$  tale che  $g \cdot p = x$ , cioè se  $\mathcal{O}_p = P$  per ogni  $p \in P$ .

Il **gruppo di isotropia** di un punto  $p \in P$  è il sottogruppo di  $G$  che lascia invariato il punto:

$$G_p := \{g \in G \mid g \cdot p = p\}.$$

Per azione **libera** intendiamo un'azione tale che per ogni  $p \in P$  il gruppo di isotropia  $G_p$  sia costituito dal solo elemento neutro del gruppo.

Un punto  $p \in P$  si dice **regolare** se il suo gruppo di isotropia ha la minima dimensione fra tutti i gruppi di isotropia, cioè:

$$\dim G_p = \min\{\dim G_x \mid x \in P\}.$$

Una definizione equivalente di punto regolare può essere data dalla proprietà di avere la propria orbita di dimensione massima rispetto a tutte le orbite. Questo segue dalla seguente

**Proposizione 1.1.2.** *Sia  $G_p$  il gruppo di isotropia di  $p \in P$ , allora*

$$\begin{aligned} \psi_p : G/G_p &\longrightarrow \mathcal{O}_p \\ [g] &\longmapsto g \cdot p \end{aligned}$$

è un diffeomorfismo.

*Dimostrazione.* La mappa  $\psi_p$  è ben definita, infatti se  $[h] = [g] \in G/G_p$ , allora  $h = g\tilde{g}$  per un  $\tilde{g} \in G_p$  e

$$\psi_p([h]) = h \cdot p = g\tilde{g} \cdot p = g \cdot p = \psi_p([g]).$$

Se consideriamo  $\mathcal{O}_p$  come un gruppo il cui elemento neutro sia proprio  $p$  e valga  $x \cdot y = (g \cdot p) \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p$ , allora la mappa

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_p : G &\longrightarrow \mathcal{O}_p \\ g &\longmapsto g \cdot p \end{aligned}$$

è un omomorfismo suriettivo di gruppi dove il nucleo è dato da  $G_p$ . Ne segue quindi che  $\psi_p$  è un isomorfismo di gruppi.  $\square$

Consideriamo l'azione  $\varphi$  di  $G$  su  $P$ . Il sollevamento al fibrato tangente di  $\varphi$  è l'azione  $T\varphi$  di  $G$  su  $TP$  definita dalla mappa tangente:

$$T\varphi(g, v) := T\varphi_g(v) \quad \forall g \in G, v \in TP.$$

Invece il sollevamento al fibrato cotangente è l'azione  $T^*\varphi$  su  $T^*P$  tale che

$$\langle T^*\varphi(g, \mu), v \rangle = \langle \mu, T\varphi_{g^{-1}}(v) \rangle \quad \forall g \in G, v \in TP, \mu \in T^*P.$$

Ricordiamo ora cos'è l'algebra di Lie di un gruppo di Lie.  
 Per ogni elemento di  $g \in G$ , indichiamo con  $L_g$  l'operazione di moltiplicazione a sinistra per  $g$ ; in altre parole

$$L_g(h) := gh \quad \forall g, h \in G.$$

Un campo vettoriale di  $G$ ,  $X \in \mathfrak{X}(G)$ , è detto **invariante a sinistra** se per ogni  $g \in G$  la mappa tangente di  $L_g$  lo lascia invariato:

$$T_h L_g(X(h)) = X(gh) \quad \forall h \in G.$$

Notiamo che se abbiamo  $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$  invarianti a sinistra allora:

$$T_h L_g([X, Y](h)) = [T_h L_g(X), T_h L_g(Y)](h) = [X, Y](gh) \quad \forall g, h \in G.$$

Quindi l'insieme  $\mathfrak{X}_L(G)$  dei campi vettoriali su  $G$  invarianti a sinistra è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{X}(G)$ .

Facciamo vedere che  $\mathfrak{X}_L(G)$  è isomorfa a  $T_{e_G}G$ . Ad ogni  $\xi \in T_{e_G}G$  associamo il campo vettoriale

$$X_\xi(h) := T_{e_G} L_h(\xi) \quad \forall h \in G.$$

Vediamo subito che  $X_\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$ , infatti

$$T_h L_g(X_\xi(h)) = T_h L_g(T_{e_G} L_h(\xi)) = T_{e_G} L_{gh}(\xi) = X_\xi(gh) \quad \forall g, h \in G.$$

Viceversa ad ogni  $X \in \mathfrak{X}_L(G)$  facciamo corrispondere l'elemento  $X(e_G)$  di  $T_{e_G}G$ . Le due mappe lineari  $\xi \mapsto X_\xi$  e  $X \mapsto X(e_G)$  sono l'una inversa dell'altra:

$$X_\xi(e_G) = T_{e_G} L_{e_G}(\xi) = \xi \quad \text{e} \quad X_{X(e_G)}(h) = T_{e_G} L_h(X(e_G)) = X(h).$$

Identificando ogni vettore di  $T_{e_G}G$  con un campo vettoriale di  $\mathfrak{X}_L(G)$ , possiamo dotare  $T_{e_G}G$  di una struttura di algebra di Lie definendo

$$[\xi, \sigma] := [X_\xi, X_\sigma](e_G) \quad \forall \xi, \sigma \in T_{e_G}G.$$

L'algebra di Lie  $T_{e_G}G$  si chiama **algebra di Lie del gruppo  $G$**  e si denota con  $\mathfrak{g}$ .

È noto che i campi vettoriali invarianti a sinistra sono completi. Per ogni  $\xi \in \mathfrak{g}$  esiste un'unica curva integrale  $\phi_t^{X_\xi}(e_G)$  di  $X_\xi$ . Possiamo definire pertanto una mappa tra l'algebra  $\mathfrak{g}$  e il suo gruppo  $G$ :

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ \xi &\longmapsto \phi_1^{X_\xi}(e_G) \end{aligned}$$

chiamata **mappa esponenziale**.

Dal fatto che  $X_{t\xi} = tX_\xi$  e che  $\phi_s^{tX} = \phi_{ts}^X$  ricaviamo che

$$\exp(t\xi) = \phi_t^{X_\xi}(e_G) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathfrak{g}.$$

Combiniamo ora la mappa esponenziale con l'azione di  $G$  su una varietà  $P$ . Fissato un vettore  $\xi \in \mathfrak{g}$ , notiamo che l'azione di  $\mathbb{R}$  su  $P$  data da

$$(t, p) \longmapsto \varphi_{\exp(t\xi)}(p)$$

non è altro che un flusso su  $P$ ; a questo corrisponde un campo vettoriale  $\xi_P$  dato da

$$\xi_P(p) := \frac{d}{dt} (\exp(t\xi) \cdot p)_{|t=0}.$$

**Definizione 1.1.3.** Per ogni vettore  $\xi \in \mathfrak{g}$  il campo vettoriale  $\xi_P \in \mathfrak{X}(P)$  ottenuto con il procedimento precedente è detto **generatore infinitesimo** di  $\xi$ .

**Proposizione 1.1.4.** Gli spazi tangenti alle orbite sono generati dai valori dei generatori infinitesimi:

$$T_p\mathcal{O}_p = \{\xi_P(p) \mid \xi \in \mathfrak{g}\} \quad \forall p \in P.$$

*Dimostrazione.* Sia  $v$  un vettore tangente a  $\mathcal{O}_p$ , scegliamo un cammino  $\alpha(t) \in \mathcal{O}_p$  tale che  $\alpha(0) = p$  e  $\dot{\alpha}(0) = v$ . Trovandosi nell'orbita di  $p$ , abbiamo che per ogni  $t \in \mathbb{R}$  esiste un elemento  $y(t) \in G$  tale che  $\alpha(t) = y(t) \cdot p$ ; avremo quindi un cammino  $y(t)$  su  $G$  tale che  $y(0) = e_G$ . Se  $\dot{y}(0) =: \xi \in \mathfrak{g}$ , avremo che

$$v = \dot{\alpha}(0) = \frac{d}{dt} (y(t) \cdot p)_{|t=0} = \frac{d}{dt} (\exp(t\xi) \cdot p)_{|t=0} = \xi_P(p).$$

Viceversa, preso  $\xi \in \mathfrak{g}$ , il cammino  $\alpha(t) := \exp(t\xi) \cdot p$  appartiene a  $\mathcal{O}_p$ ; quindi

$$\xi_P(p) = \frac{d}{dt} (\exp(t\xi) \cdot p)_{|t=0} = \dot{\alpha}(0) \in T_p\mathcal{O}_p.$$

□

Sappiamo che l'algebra di Lie un sottogruppo di Lie è una sottoalgebra di Lie. Per il gruppo di isotropia vale la seguente

**Proposizione 1.1.5.** *Per ogni  $p \in P$  l'algebra di Lie  $\mathfrak{g}_p$  del gruppo di isotropia  $G_p \subseteq G$  è*

$$\mathfrak{g}_p = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \xi_P(p) = 0\}.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo che in generale l'algebra di Lie di un sottogruppo  $H \subseteq G$  è

$$\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \exp(t\xi) \in H\}.$$

Chiaramente per  $\xi \in \mathfrak{h}$  vale che  $\exp(t\xi) \in H$ ; viceversa se  $\exp(t\xi) \in H$  allora

$$\xi = \frac{d}{dt}(\exp(t\xi))|_{t=0} \in \mathfrak{h}$$

per definizione della mappa esponenziale.

Quindi avremo che  $\mathfrak{g}_p$  sarà formato dai vettori  $\xi \in \mathfrak{g}$  tali che

$$\exp(t\xi) \cdot p = p \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ovvero tali per cui

$$\xi_P(p) = \frac{d}{dt}(\exp(t\xi) \cdot p)|_{t=0} = 0.$$

□

## 1.2 Esempi

### \* **Traslazione a sinistra:**

Presi  $g, h \in G$ , la traslazione a sinistra definita da  $L_g(h) = gh$  è banalmente un'azione del gruppo  $G$  in se stesso, infatti  $L_{e_G} = id_G$  e  $L_h \circ L_g = L_{hg}$ . È un'azione transitiva poiché per ogni  $g, h \in G$  abbiamo che  $(hg^{-1})g = h$ ; è anche libera, infatti  $L_g = id_G$  se e solo se  $g = e_G$  (i punti sono dunque tutti regolari).

Dato  $\xi \in \mathfrak{g}$ ,  $X_\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$  il campo vettoriale corrispondente, allora il generatore infinitesimo è dato da

$$\xi_G(g) = \frac{d}{dt}(\exp(t\xi)g)|_{t=0} = X_\xi(g).$$

\* **Azione aggiunta:**

Sia  $C$  l'azione di coniugio di un gruppo  $G$  in se stesso:

$$C_g(h) := R_{g^{-1}} \circ L_g(h) = ghg^{-1} \quad \forall g, h \in G;$$

ove  $R_{g^{-1}}$  è la traslazione a destra definita da  $R(g, h) = R_{g^{-1}}(h) = hg^{-1}$ . Definiamo l'azione aggiunta  $Ad$  di  $G$  su  $\mathfrak{g}$  come la mappa tangente dell'azione di coniugio in  $e_G$ :

$$Ad(g, \xi) := T_{e_G} C_g(\xi) \quad \forall g \in G, \xi \in \mathfrak{g}.$$

In altri termini avremo

$$Ad_g(\xi) = \frac{d}{dt} (C_g(\alpha(t)))|_{t=0},$$

dove  $\alpha(t)$  è un qualunque cammino in  $G$  tale che  $\alpha(0) = e_G$  e  $\dot{\alpha}(0) = \xi \in \mathfrak{g}$ .

Si vede che  $Ad$  è un'azione (sinistra) in quanto per ogni  $h, g \in G, \xi \in \mathfrak{g}$ :

$$\begin{aligned} Ad(e_G, \xi) &= T_{e_G} C_{e_G}(\xi) = T_{e_G} id_G(\xi) = \xi \\ Ad(h, Ad(g, \xi)) &= T_{e_G} C_h(T_{e_G} C_g(\xi)) = T_{e_G} C_{hg}(\xi) = Ad(hg, \xi). \end{aligned}$$

**Proposizione 1.2.1.** *Nell'azione aggiunta  $Ad$  il generatore infinitesimo  $\xi_{\mathfrak{g}}$  di  $\xi \in \mathfrak{g}$  soddisfa*

$$\xi_{\mathfrak{g}}(\sigma) = [\xi, \sigma] \quad \forall \sigma \in \mathfrak{g},$$

cioè  $\xi_{\mathfrak{g}} = [\xi, \cdot]$ .

*Dimostrazione.* Prendiamo  $X$  e  $Y$  due campi vettoriali; in generale vale

$$\begin{aligned} [X, Y](e) &= \mathcal{L}_X Y(e) = \\ &= \frac{d}{dt} ((\phi_t^X)^* Y(e))|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( T_{\phi_t^X(e)} \phi_{-t}^X \circ Y \circ \phi_t^X(e) \right)|_{t=0}. \end{aligned}$$

Allora avremo che per ogni  $\xi$  e  $\sigma$  di  $\mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} [\xi, \sigma] &= [X_{\xi}, X_{\sigma}](e_G) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( T_{\phi_t^{X_{\xi}}(e_G)} R_{exp(-t\xi)}(X_{\sigma}(exp(t\xi))) \right)|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( T_{exp(t\xi)} R_{exp(-t\xi)}(T_{e_G} L_{exp(t\xi)}(\sigma)) \right)|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( T_{e_G} R_{exp(-t\xi)} \circ L_{exp(t\xi)}(\sigma) \right)|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} (Ad_{exp(t\xi)}(\sigma))|_{t=0} = \xi_{\mathfrak{g}}(\sigma). \end{aligned}$$

\* **Azione coaggiunta:**

Passando al duale dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , che denoteremo con  $\mathfrak{g}^*$ , abbiamo anche qui un'azione del gruppo  $G$  data dall'aggiunta di  $Ad$ , cioè

$$\langle (Ad_g)^*(\mu), \xi \rangle = \langle \mu, Ad_g(\xi) \rangle \quad \forall g \in G, \xi \in \mathfrak{g}, \mu \in \mathfrak{g}^*.$$

Per avere un'azione sinistra su  $\mathfrak{g}^*$  definiamo l'azione coaggiunta come

$$Ad^*(g, \mu) := (Ad_{g^{-1}})^*(\mu).$$

Infatti per ogni  $g, h \in G$  e  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  abbiamo che

$$\langle Ad^*(e_G, \mu), \xi \rangle = \langle (Ad_{e_G})^*(\mu), \xi \rangle = \langle \mu, Ad_{e_G}(\xi) \rangle = \langle \mu, \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}$$

e

$$\begin{aligned} \langle Ad^*(h, Ad^*(g, \mu)), \xi \rangle &= \langle (Ad_{h^{-1}})^*((Ad_{g^{-1}})^*(\mu)), \xi \rangle \\ &= \langle (Ad_{g^{-1}})^*(\mu), Ad_{h^{-1}}(\xi) \rangle \\ &= \langle \mu, Ad_{g^{-1}} \circ Ad_{h^{-1}}(\xi) \rangle = \\ &= \langle \mu, Ad_{(hg)^{-1}}(\xi) \rangle = \\ &= \langle Ad^*(hg, \mu), \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Dato un  $\xi \in \mathfrak{g}$ , il generatore infinitesimo  $\xi_{\mathfrak{g}^*}$  per l'azione coaggiunta sarà, per ogni  $\sigma \in \mathfrak{g}, \mu \in \mathfrak{g}^*$

$$\begin{aligned} \langle \xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \sigma \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} (Ad_{exp(-t\xi)}^* \mu) \Big|_{t=0}, \sigma \right\rangle = \\ &= \frac{d}{dt} (\langle Ad_{exp(-t\xi)}^* \mu, \sigma \rangle) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} (\langle \mu, Ad_{exp(-t\xi)} \sigma \rangle) \Big|_{t=0} = \\ &= \left\langle \mu, \frac{d}{dt} (Ad_{exp(-t\xi)} \sigma) \Big|_{t=0} \right\rangle = \\ &= \langle \mu, -[\xi, \sigma] \rangle, \end{aligned}$$

cioè

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = -\langle \mu, \xi_{\mathfrak{g}}(\cdot) \rangle = -\langle \mu, [\xi, \cdot] \rangle.$$

### 1.3 Mappe momento

Una varietà  $P$  dotata di una 2-forma  $\Omega$  chiusa e non degenere è detta **varietà simplettica** e denotata con  $(P, \Omega)$ .

Data una funzione  $f \in C^\infty(P)$ , il **campo vettoriale Hamiltoniano**  $X_f \in \mathfrak{X}(P)$  è il campo vettoriale tale che

$$\Omega(X_f, \cdot) = df.$$

In una varietà simplettica  $(P, \Omega)$  possiamo definire le **parentesi di Poisson** di due funzioni  $f, g \in C^\infty(P)$  come

$$\{f, g\} := \Omega(X_f, X_g).$$

Se  $(P, \Omega)$  e  $(P', \Omega')$  sono due varietà simplettiche, una mappa differenziabile  $\psi : P \rightarrow P'$  si dice **mappa simplettica** se trasforma una struttura simplettica nell'altra, cioè se vale  $\psi^*\Omega' = \Omega$ .

Se il gruppo  $G$  agisce su  $(P, \Omega)$ , l'azione si dice **azione simplettica** se per ogni  $g \in G$  il diffeomorfismo  $\varphi_g$  è una mappa simplettica.

Da adesso in poi, quando non specificato, indicheremo solo con  $P$  una varietà simplettica dotata di parentesi di Poisson definite come sopra e assumeremo che le azioni di gruppo siano simplettiche.

Un campo vettoriale  $X$  è **localmente Hamiltoniano** se

$$d(\Omega(X, \cdot)) = 0.$$

Si può dimostrare ([13]) che  $X$  è localmente Hamiltoniano se e solo se  $\phi_t^X$  è una mappa simplettica per ogni  $t$ . Quindi ogni  $\xi_P \in \mathfrak{X}(P)$  è localmente Hamiltoniano poiché il suo flusso  $\varphi_{\exp(t\xi)} \cdot p$  è una mappa simplettica per ogni  $t$ .

Un'azione Hamiltoniana è un'azione simplettica tale che per ogni  $\xi \in \mathfrak{g}$  il generatore infinitesimo  $\xi_P$  è Hamiltoniano, ovvero esiste una funzione  $J(\xi) \in C^\infty(P)$  tale che

$$X_{J(\xi)} = \xi_P.$$

Quindi un'azione Hamiltoniana assicura l'esistenza di una mappa

$$J : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(P).$$

La **mappa momento** di un'azione Hamiltoniana è la mappa

$$\mathbb{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

tale che

$$\langle \mathbb{J}(p), \xi \rangle = J(\xi)(p) \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}, p \in P.$$

La mappa momento è molto utile per definire gli integrali primi di un sistema Hamiltoniano. Vediamo infatti il seguente:

**Teorema 1.3.1.** *Sia  $H \in C^\infty(P)$  una funzione  $G$ -invariante, cioè tale che per ogni  $p \in P$*

$$H(g \cdot p) = H(p) \quad \forall g \in G.$$

*Allora la mappa momento  $\mathbb{J}$  è costante lungo i movimenti del flusso di  $X_H$ . In altre parole*

$$\mathbb{J} \circ \phi_t^{X_H} = \mathbb{J} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Dimostrazione.*  $H$  è costante lungo le orbite, sappiamo che i generatori infinitesimi generano lo spazio tangente a tali orbite per cui avremo che per ogni  $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\xi_P(H) = 0.$$

Per due funzioni  $f, g \in C^\infty(P)$  i campi vettoriali Hamiltoniani sono tali che

$$X_g[f] = \Omega(X_f, X_g) = -X_f[g].$$

Quindi avremo che

$$X_H[J(\xi)] = -\xi_P[H] = 0$$

cioè  $J(\xi)$  è costante lungo il flusso  $\phi_t^{X_H}$ . Per ogni  $p \in P$  abbiamo quindi che

$$\langle \mathbb{J}(p), \xi \rangle = J(\xi)(p) = J(\xi)(\phi_t^{X_H}(p)) = \langle \mathbb{J}(\phi_t^{X_H}(p)), \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R},$$

cioè la quantità  $\mathbb{J}$  è conservata lungo il flusso di  $X_H$ .  $\square$

Un'azione si dice **fortemente Hamiltoniana** se è Hamiltoniana e se la mappa

$$\begin{aligned} J : \mathfrak{g} &\longrightarrow C^\infty(P) \\ \xi &\longmapsto J(\xi) \end{aligned}$$

è un omomorfismo di algebre di Lie, cioè se

$$J([\xi, \sigma]) = \{J(\xi), J(\sigma)\} \quad \forall \xi, \sigma \in \mathfrak{g}.$$

In generale se abbiamo due varietà  $P$  e  $P'$  e due diffeomorfismi  $\varphi : P \longrightarrow P$  e  $\varphi' : P' \longrightarrow P'$ , una mappa  $\psi : P \longrightarrow P'$  si dice **equivariante** rispetto a  $\varphi$  e a  $\varphi'$  se

$$\psi \circ \varphi = \varphi' \circ \psi.$$

Per ogni  $g \in G$  un'azione di gruppo fornisce un diffeomorfismo  $\varphi_g$  in  $P$  e uno  $Ad_{g^{-1}}^*$  in  $\mathfrak{g}^*$ . Diremo che la mappa momento di un'azione Hamiltoniana è equivariante se lo è rispetto a  $\varphi_g$  e a  $Ad_{g^{-1}}^*$  per ogni  $g \in G$ .

Si può dimostrare ([13]) che se  $G$  è connesso, la mappa momento  $\mathbb{J}$  è equivariante se e solo se l'azione è fortemente Hamiltoniana.

Da ora in avanti assumiamo che le azioni di gruppo siano fortemente Hamiltoniane.

Vediamo ora due esempi di azione di gruppo Hamiltoniane in cui calcoliamo orbite e gruppo di isotropia, generatore infinitesimo e mappa momento equivariante.

\* **Flusso Hamiltoniano:**

Sia  $X_H$  un campo vettoriale Hamiltoniano completo, avremo un'azione del gruppo  $\mathbb{R}$  su  $P$  data proprio dal suo flusso:

$$t \cdot p = \phi_t^{X_H}(p) \quad \forall t \in \mathbb{R}, p \in P.$$

Orbite e gruppi di isotropia:

Le orbite dell'azione saranno ovviamente le orbite del flusso mentre per il gruppo di isotropia di un punto  $p \in P$  abbiamo tre casi:

- $\mathbb{R}_p = 0$  se il moto di  $p$  non è periodico,
- $\mathbb{R}_p = \nu\mathbb{Z}$  se  $p$  compie dei moti periodici di periodo  $\nu$ ,
- $\mathbb{R}_p = \mathbb{R}$  se  $p$  è un punto fisso del flusso.

I punti regolari in questo caso saranno quelli che non hanno orbite periodiche o al più tutti i punti non fissi se le orbite sono tutte periodiche.

Generatori infinitesimi:

Prendiamo un cammino  $\gamma(s)$  in  $\mathbb{R}$  tale che  $\gamma(0) = 0$  e  $\dot{\gamma}(0) = v \in T_0\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ , allora avremo che il generatore infinitesimo  $v_P$  di  $v$  è

$$v_P(p) = \frac{d}{ds} (\phi_{\gamma(s)}(p)) \Big|_{s=0} = X_H(p)v = X_{vH}(p) \quad \forall p \in P.$$

Mappa momento:

L'azione è quindi Hamiltoniana e  $J(v) = vH$  poiché sappiamo che  $X_{J(v)}(p) = v_P(p)$ .

Inoltre l'azione è fortemente Hamiltoniana; infatti per ogni  $v, w \in \mathbb{R}$

$$\{J(v), J(w)\} = \{vH, wH\} = 0$$

e, dato che  $\mathbb{R}$  è un gruppo abeliano,  $J([v, w]) = 0$ .

La mappa momento  $\mathbb{J}$  sarà dunque tale che

$$v\mathbb{J}(p) = \langle \mathbb{J}(p), v \rangle = J(v)(p) = vH(p) \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Ne concludiamo che la mappa momento dell'azione del flusso di  $X_H$  corrisponde proprio alla funzione  $H$ , identificando  $\mathbb{R}$  con il suo duale. Già sapevamo che il valore di  $H$  è costante lungo il flusso di  $X_H$  e quindi sulle orbite dell'azione.

Essendo  $\mathbb{R}$  abeliano, l'azione di coniugio corrisponde con l'identità ed è facile vedere che questo accade anche nelle azioni aggiunta e coaggiunta. L'equivarianza di  $\mathbb{J}$  deriva quindi dall'equivalenza

$$Ad_{t^{-1}}^* \circ \mathbb{J}(p) = H(p) = H(\phi_t^{X_H}(p)) = \mathbb{J} \circ \phi_t^{X_H}(p) \quad \forall p \in P, t \in \mathbb{R}.$$

\* **Sollevamento delle rotazioni nello spazio:**

Consideriamo il gruppo  $SO(3)$  delle matrici ortogonali speciali  $3 \times 3$  e facciamo agire sui vettori di  $\mathbb{R}^3$  attraverso la classica moltiplicazione matrice-vettore:

$$A \cdot q = Aq.$$

Orbite:

Le matrici ortogonali speciali sono delle matrici di rotazione, quindi l'azione del gruppo  $SO(3)$  su un vettore  $q \in \mathbb{R}^3$  è una sua rotazione attorno all'origine.

Avremo quindi che le orbite saranno:

$$\mathcal{O}_q = \text{sfera di raggio } \|q\| = S_{\|q\|}^2.$$

Gruppi di isotropia:

Fissato un vettore  $q$ , una sua rotazione nello spazio può essere vista come una rotazione planare di un angolo  $\theta$  attorno ad un asse fisso  $\vec{r}$ . Visto in questo modo possiamo facilmente affermare che lasciano immutato il vettore  $q$  quelle rotazioni che hanno quest'asse proprio sul vettore, i.e.

$$\vec{r} = \{\lambda q \mid \lambda \in \mathbb{R}\} =: \vec{q}.$$

Se usiamo come coordinate locali di  $SO(3)$  la coppia  $(\theta, \vec{r})$  formata dall'angolo di rotazione planare e il rispettivo asse, possiamo scrivere che il gruppo di isotropia di un vettore  $q \in \mathbb{R}^3$  consiste in:

$$SO(3)_q = \{A = (\theta, \vec{r}) \in SO(3) \mid Aq = q\} = \{(\theta, \vec{q}) \mid \theta \in S^1\} \cong S^1.$$

Ovviamente questo vale se  $q \neq 0$ , infatti l'origine è l'unico punto non regolare in quanto il suo gruppo di isotropia corrisponde a tutto  $SO(3)$ .

Generatori infinitesimi:

Se prendiamo un cammino  $A(t)$  in  $SO(3)$  tale che  $A(0) = I_3$  e  $\dot{A}(0) = v \in \mathfrak{so}(3)$ , allora il generatore infinitesimo associato a  $v$  equivale a:

$$v_{\mathbb{R}^3}(q) = \frac{d}{dt} (A(t)q)|_{t=0} = \dot{A}(0)q = vq.$$

Come noto l'algebra di Lie di  $SO(3)$ , che abbiamo denotato con  $\mathfrak{so}(3)$ , è rappresentata dalle matrici antisimmetriche ( $v + v^T = 0$ ) ed è isomorfa a  $\mathbb{R}^3$  tramite la mappa

$$\begin{aligned} \sim : \mathfrak{so}(3) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ -v_1 & 0 & v_3 \\ -v_2 & -v_3 & 0 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} -v_3 \\ v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} = \tilde{v} \end{aligned}$$

che è tale che  $[v, w] = vw - wv \longmapsto \tilde{v} \times \tilde{w}$ .

Notiamo che per un  $\tilde{u} = (u_1, u_2, u_3)$  in  $\mathbb{R}^3$  fissato, per ogni  $v \in \mathfrak{so}(3)$ , otteniamo che

$$v\tilde{u} = \begin{pmatrix} v_2u_3 - v_3u_2 \\ v_3u_1 - v_1u_3 \\ v_1u_2 - v_2u_1 \end{pmatrix} = \tilde{v} \times \tilde{u};$$

cioè  $v\tilde{u} = \tilde{w} \times \tilde{u} \Leftrightarrow \tilde{v} = \tilde{w}$ , dove  $\tilde{v}$  è il vettore in  $\mathbb{R}^3$  corrispondente alla matrice  $v$  in  $\mathfrak{so}(3)$ . Nel nostro caso avremo che il generatore infinitesimo corrisponde a

$$v_{\mathbb{R}^3}(q) = \tilde{v} \times q.$$

A conferma di questo fatto dalla proposizione 1.1.4 si vede che lo spazio tangente ad un'orbita in un punto consiste in tutti i generatori infinitesimi calcolati in quel punto, cioè:

$$\begin{aligned} T_q\mathcal{O}_q &= \{v_{\mathbb{R}^3}(q) \mid v \in \mathfrak{so}(3)\} = \\ &= \{\tilde{v} \times q \mid \tilde{v} \in \mathbb{R}^3\} = \\ &= \{\text{vettori di } \mathbb{R}^3 \text{ perpendicolari a } q\}. \end{aligned}$$

Mappa momento:

Consideriamo ora lo spazio cotangente  $T^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$  con coordinate  $(q, p)$  e forma simplettica  $\Omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$ . Scriviamo un generico campo vettoriale in  $T^*\mathbb{R}^3$  come

$$X = \sum_{i=1}^3 X^i \frac{\partial}{\partial q_i} + Y^i \frac{\partial}{\partial p_i} = (X^i, Y^i),$$

allora avremo che

$$\Omega(X, \cdot) = \sum_{i=1}^3 (dq_i(X)) dp_i - (dp_i(X)) dq_i = \sum_{i=1}^3 X^i dp_i - Y^i dq_i.$$

Essendo il differenziale di una funzione  $f \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^3)$

$$df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i,$$

otteniamo che

$$X_f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} = \left( \frac{\partial f}{\partial p_i}, -\frac{\partial f}{\partial q_i} \right).$$

Sollevamento a  $T^*\mathbb{R}^3$ :

Tornando all'azione di gruppo, il sollevamento dell'azione di  $SO(3)$  al fibrato tangente è dato da

$$T_q \varphi_A(q, v) = (Aq, Av) \quad \forall A \in SO(3), (q, v) \in T\mathbb{R}^3$$

poiché è lineare.

Il sollevamento al fibrato cotangente deve essere tale che per ogni  $A \in SO(3)$ ,  $(q, v) \in T\mathbb{R}^3$ ,  $(q, p) \in T^*\mathbb{R}^3$  vale

$$\langle T_q^* \varphi_{A^{-1}}(q, p), (A^{-1}q, v) \rangle = \langle (q, p), T_q \varphi_A(A^{-1}q, v) \rangle$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} \langle T_q^* \varphi_{A^{-1}}(q, p), (A^{-1}q, v) \rangle &= \langle (q, p), (q, Av) \rangle = \\ &= \langle p, Av \rangle = p^T Av = (A^T p)^T v = \\ &= (A^{-1}p)^T v = \langle A^{-1}p, v \rangle = \\ &= \langle (A^{-1}q, A^{-1}p), (A^{-1}q, v) \rangle, \end{aligned}$$

quindi otteniamo che

$$T_q^* \varphi_A(q, p) = (Aq, Ap).$$

Consideriamo la matrice antisimmetrica  $v \in \mathfrak{so}(3)$ ; si vede che il generatore infinitesimo è:

$$v_{T^*\mathbb{R}^3}(q, p) = (v_{\mathbb{R}^3}(q), v_{\mathbb{R}^3}(p)) = (vq, vp).$$

Per calcolare la mappa momento dobbiamo prima trovare una mappa  $J(v) \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^3)$  tale che

$$X_{J(v)}(q, p) = v_{T^*\mathbb{R}^3}(q, p)$$

cioè

$$\frac{\partial J(v)}{\partial p} = vq \quad \text{e} \quad -\frac{\partial J(v)}{\partial q} = vp.$$

Una soluzione è data da <sup>1</sup>

$$J(v)(q, p) = \langle vq, p \rangle = -\langle vp, q \rangle$$

come si può facilmente vedere.

L'azione è quindi Hamiltoniana e la mappa momento  $\mathbb{J}$  deve essere tale che per ogni  $(q, p) \in T^*\mathbb{R}^3$

$$\langle \mathbb{J}(q, p), v \rangle = J(v)(q, p) = \langle \tilde{v} \times q, p \rangle = \langle q \times p, \tilde{v} \rangle \quad \forall v \in \mathfrak{so}(3).$$

Abbiamo trovato che la mappa momento per l'azione di  $SO(3)$  su  $T^*\mathbb{R}^3$ ,  $A \cdot (q, p) = (Aq, Ap)$ , è la mappa

$$\begin{aligned} \mathbb{J} : T^*\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathfrak{so}(3)^* \\ (q, p) &\longmapsto q \times p. \end{aligned}$$

Negli esempi nell'ultimo capitolo vedremo che l'azione coaggiunta nel caso di  $SO(3)$  sarà data da

$$Ad_{A^{-1}}^*(\mu) = A\mu \quad \forall A \in SO(3), \mu \in \mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3.$$

L'equivarianza della mappa momento, ovvero

$$Ad_{A^{-1}}^* \circ \mathbb{J} = \mathbb{J} \circ \varphi_A,$$

può essere dimostrata dalla proprietà del prodotto vettoriale:

$$A \cdot \mathbb{J}(q, p) = A(q \times p) = Aq \times Ap = \mathbb{J}(A \cdot (q, p)).$$

Essendo la mappa momento  $\mathbb{J}$  equivariante, ne deduciamo che l'azione è fortemente Hamiltoniana.

---

<sup>1</sup>La seconda uguaglianza deriva dal fatto che  $v$  sia una matrice antisimmetrica.

# Capitolo 2

## Sistemi integrabili e superintegrabili

In questo capitolo enunciamo un importante teorema classico, il cosiddetto teorema di Liouville sui sistemi Hamiltoniani integrabili.

Vedremo poi una generalizzazione di tale risultato dovuta Nekhoroshev, Mishchenko e Fomenko. Non riportiamo qui le dimostrazioni, per ciò rimandiamo a [10].

### 2.1 Teorema di Liouville-Arnol'd

Vediamo innanzitutto cos'è un sistema completamente integrabile o non degenerare.

**Definizione 2.1.1.** *Siano  $f_1, \dots, f_d$  funzioni della varietà simplettica  $(P, \Omega)$  di dimensione  $2d$  e sia  $H$  la funzione Hamiltoniana del sistema.*

- Una funzione  $f_i$  su  $P$  è un integrale primo di  $H$  se è costante lungo il flusso di  $X_H$ , cioè se  $X_H[f_i] = 0$  o equivalentemente se  $\{H, f_i\} = 0$ .
- Le funzioni  $f_1, \dots, f_n$  si dicono in involuzione se

$$\{f_i, f_j\} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

- Diremo che le  $f_i$  sono indipendenti se per ogni punto  $p \in P$  abbiamo che

$$(df_1)_p, \dots, (df_n)_p$$

sono covettori linearmente indipendenti.

- $(P, \Omega, H)$  è un sistema Hamiltoniano completamente integrabile o non degenera se esistono  $d$  integrali primi di  $H$ ,  $f_1, \dots, f_d \in C^\infty(P)$ , in involuzione e linearmente indipendenti su un aperto  $U$  di  $P$ . In questo caso ci restringiamo all'aperto  $U$  e lo chiameremo  $P$ .

Forniamo alcuni esempi in cui esistono degli integrali primi e calcoliamo gli insiemi di livello.

\* **Oscillatore armonico:**

Lo spazio delle fasi di un oscillatore armonico è  $T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \ni (q, p)$  mentre l'Hamiltoniana che ne descrive il moto è

$$H(q, p) = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2),$$

dove  $\omega$  è una quantità positiva. Fissato un valore  $h \in \mathbb{R}^{\geq 1}$ , l'insieme di livello di  $H$  è

$$M_h = H^{-1}(h) = \left\{ (q, p) \in \mathbb{R}^2 \mid q^2 + p^2 = \frac{2h}{\omega} \right\}$$

che è diffeomorfo a  $S^1$  se  $h \neq 0$ .

L'Hamiltoniana è nulla solo nell'origine, che non considereremo.

Effettuiamo ora un cambio di coordinate  $(q, p) \mapsto (a, \alpha) \in \mathbb{R}^{\geq} \times S^1$  in modo tale che

$$p = \sqrt{2a} \cos \alpha \quad q = \sqrt{2a} \sin \alpha.$$

Allora l'Hamiltoniana diventa  $H(a, \alpha) = \omega a$  e le equazioni del moto sono

$$\dot{a} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0 \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial a} = \omega.$$

Possiamo scrivere gli insiemi di livello come

$$M_h = \left\{ (a, \alpha) \in \mathbb{R}^{\geq} \times S^1 \mid a = \frac{h}{\omega} \right\} \quad \forall h \in \mathbb{R}^{\geq};$$

quindi abbiamo che il moto si svolge linearmente lungo una circonferenza data da  $\{a = \text{costante}\}$ .

---

<sup>1</sup>Con il simbolo  $\mathbb{R}^{\geq}$  indichiamo l'insieme dei numeri reali non negativi mentre con  $\mathbb{R}^>$  quello dei reali strettamente positivi.

\* **Due oscillatori armonici disaccoppiati:**

Consideriamo ora due oscillatori armonici che si muovono in modo indipendente uno dall'altro. Le equazioni sono simili a quelle dell'esempio precedente, ma questo caso ci sarà utile più avanti.

Consideriamo le coordinate  $(q_1, q_2, p_1, p_2) \in T^*\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$ . La funzione Hamiltoniana è

$$H(q_1, p_1, q_2, p_2) = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2) \quad \omega_1, \omega_2 > 0.$$

I due addendi sono due integrali primi. Quindi se prendiamo  $h_1, h_2 \geq 0$  l'insieme di livello sarà

$$M_{h_1, h_2} = \left\{ (q_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathbb{R}^4 \mid (p_1^2 + q_1^2) = \frac{2h_1}{\omega_1}, (p_2^2 + q_2^2) = \frac{2h_2}{\omega_2} \right\}.$$

I due valori  $h_1$  e  $h_2$  sono entrambi nulli solo nell'origine; se solo uno dei due è nullo allora l'insieme di livello sarà una circonferenza.

Se i due valori sono strettamente positivi, effettuiamo un cambiamento di coordinate come nel caso precedente:  $(q_i, p_i) \mapsto (a_i, \alpha_i)$  per  $i = 1, 2$ ; l'Hamiltoniana risulta

$$H(a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2) = \omega_1 \alpha_1 + \omega_2 \alpha_2$$

e l'insieme di livello è il toro

$$M_{h_1, h_2} = \left\{ (a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1 \mid a_i = \frac{h_i}{\omega_i}, i = 1, 2 \right\}.$$

Il moto sarà lineare per le coordinate  $\alpha_i$  mentre le  $a_i$  saranno costanti, infatti

$$\dot{\alpha}_i = \omega_i \quad \dot{a}_i = 0.$$

\* **Sistema kepleriano sul piano:**

Dato un campo di forze newtoniano in un piano, un corpo si muove secondo le equazioni date dall'Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} - \frac{1}{\|q\|} \quad \text{con } 0 \neq q, p \in \mathbb{R}^2.$$

In coordinate polari avremo che lo spazio delle fasi è  $T^*\mathbb{R}^2 \ni (r, \varphi, p_r, p_\varphi)$  e l'Hamiltoniana diventa:

$$H(r, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} - \frac{1}{r}.$$

Notiamo che  $H$  non dipende da  $\varphi$  quindi  $\dot{p}_\varphi = 0$  e possiamo chiamare  $J = p_\varphi$  questa costante; avremo che gli insiemi di livello per  $h, j \in \mathbb{R}$  sono

$$\begin{aligned} M_{h,j} &= \{T^*\mathbb{R}^2 \mid H = h, J = j\} \\ &= \left\{ (r, \varphi, p_r, p_\varphi) \in \mathbb{R}^4 \mid \frac{p_r^2}{2} + \frac{j^2}{2r^2} - \frac{1}{r} = h \right\} \\ &= \{\varphi \in S^1\} \times \left\{ \frac{p_r^2}{2} + \left( \frac{j^2}{2r^2} - \frac{1}{r} \right) = h \right\}. \end{aligned}$$

Analizzando il grafico della funzione

$$V(r) = \frac{j^2}{2r^2} - \frac{1}{r}$$

si può vedere che esiste  $\tilde{m} > 0$  tale che  $V(r) > -\tilde{m}$  per ogni  $r > 0$ . Inoltre  $V(r)$  tende a 0 per  $r$  che tende a infinito. Se prendiamo  $h \geq 0$  allora  $M_{h,j}$  contiene  $(p_r, r)$  tali che  $p_r^2/2 \rightarrow h$  e  $r \rightarrow \infty$ ; quindi  $M_{h,j}$  non è compatto.

Se invece prendiamo  $h < 0$ ,  $p_r^2/2 = h - V(r) < \tilde{m}$ ; se  $r \rightarrow \infty$  avremo  $p_r^2/2 \rightarrow h < 0$  che è assurdo.

Ne deduciamo che per avere degli insiemi di livello compatti dobbiamo porre  $h < 0$ .

Completando il quadrato nell'equazione  $p_r^2/2 + V(r) = h$  otteniamo

$$\frac{p_r^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{j}{r} - \frac{1}{j} \right)^2 = h + \frac{1}{2j^2}$$

che sarà una circonferenza se  $h + 1/(2j^2) > 0$  e un punto se  $h + 1/(2j^2) = 0$ .

Quindi  $M_{h,j}$  sarà un toro bidimensionale se  $-1/(2j^2) < h < 0$  e sarà una circonferenza se  $h = -1/(2j^2)$ .

Abbiamo visto che in questi casi classici i moti sono generalmente contenuti in tori di dimensione  $d$  dove lo spazio delle fasi ha dimensione  $2d$ . Il risultato è spiegato dal seguente

**Teorema 2.1.2** (Liouville-Arnol'd).

*Sia  $(P, \Omega, H)$  un sistema Hamiltoniano di dimensione  $2d$ . Supponiamo che il sistema sia completamente integrabile con  $f_1, \dots, f_d$  integrali primi in involuzione e indipendenti in  $P$  e che gli insiemi di livello di  $f = (f_1, \dots, f_d)$  siano compatti e connessi. Allora per ognuno di essi esiste un intorno  $U$  in  $P$  con coordinate  $(a, \alpha) \in A \times \mathbb{T}^d$ , con  $A \subseteq \mathbb{R}^d$ , tali che:*

- gli insiemi di livello sono i tori  $d$ -dimensionali  $\mathbb{T}^d$  dati da  $\{a = \text{costante}\}$ ;
- gli integrali primi dipendono solo dalle coordinate  $a_j$ ;
- la forma simplettica ristretta a  $U$  è

$$\Omega|_U = \sum_{j=1}^d da_j \wedge d\alpha_j.$$

Ne segue che l'Hamiltoniana  $H$  è funzione solo delle coordinate  $a_j$  e il flusso è lineare per le coordinate  $\alpha_j$ , i.e.

$$\dot{a}_j = -\frac{dH}{d\alpha_j} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}_j = \frac{dH}{da_j} = \nu.$$

Con le ipotesi del teorema, le coordinate del tipo  $\alpha_j$  sono dette **coordinate angolo**, mentre le  $a_j$  sono le **coordinate azione**; i valori  $\nu$  invece sono detti **frequenze del flusso lineare**.

Lo spazio delle fasi di un sistema Hamiltoniano completamente integrabile è dunque foliato da tori  $d$ -dimensionali definiti dalle coordinate azione e su cui il flusso è lineare.

## 2.2 Teorema di Mischenko-Fomenko

Ovviamente il teorema di Arnol'd-Liouville è limitato poiché in molti sistemi meccanici riusciamo a trovare un numero di integrali primi superiore a  $d$  permettendo di rappresentare il sistema in modo migliore. Infatti il teorema di Liouville-Arnol'd descrive un caso particolare di integrabilità di un sistema Hamiltoniano. Molto spesso esiste un modo più naturale di descrivere un sistema. Riprendiamo alcuni esempi precedenti e vediamo dei casi in cui il numero di integrali primi aumenta, cioè quando il sistema ammette un numero di quantità costanti maggiore di  $d$  e che chiameremo **sistema Hamiltoniano superintegrabile** o **degenere**.

### \* Oscillatori armonici disaccoppiati con uguale frequenza:

Abbiamo visto che nel caso di due oscillatori armonici il moto avviene lungo un toro bidimensionale  $\mathbb{T}^2 \ni (\alpha_1, \alpha_2)$  con frequenze  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Essenzialmente abbiamo due casi distinti a seconda del rapporto tra questi due valori:

- se il rapporto  $\omega_1/\omega_2$  non è razionale allora la traiettoria non sarà periodica ma densa nel toro.

- se  $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$  i moti sono periodici e costituiti da curve chiuse. È intuitivo pensare allora che esista un altro integrale primo in modo tale da ottenere che gli insiemi di livello siano monodimensionali e corrispondano alle traiettorie.

Consideriamo il caso in cui  $\omega_1 = \omega = \omega_2$  e osserviamo che esistono i seguenti tre integrali primi:

$$\begin{aligned} f_1(q_1, p_1, q_2, p_2) &= q_1q_2 + p_1p_2 \\ f_2(q_1, p_1, q_2, p_2) &= p_1q_2 - p_2q_1 \\ f_3(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2 - q_2^2 - p_2^2). \end{aligned}$$

Otteniamo così una fibrazione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^> \times S^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^> \times S^2 \\ (q_1, q_2, p_1, p_2) &\longmapsto (f_1, f_2, f_3) \end{aligned}$$

le cui fibre sono le orbite periodiche del sistema. Notiamo infatti che vale

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = H^2$$

pertanto se ci restringiamo all'insieme di livello  $M_h$ , cioè alla sfera tridimensionale

$$\left\{ (q_1, q_2, p_1, p_2) \mid q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2 = \frac{2h}{\omega} \right\},$$

la sua immagine sarà una sfera bidimensionale e la fibrazione ottenuta

$$f|_{M_h} : S^3 \longrightarrow S^2$$

corrisponde alla fibrazione di Hopf <sup>2</sup> la quale è topologicamente non triviale e le cui fibre sono delle circonferenze.

\* **Sistema kepleriano:**

Sappiamo che in un sistema kepleriano una particella si muove lungo una traiettoria ellittica, quindi diffeomorfa ad una circonferenza, il che

---

<sup>2</sup>Una delle definizioni della fibrazione di Hopf è esattamente la mappa  $f : S^3 \longrightarrow S^2$  con

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_3 + x_2x_4, x_2x_3 - x_1x_4, (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)/2).$$

ci permette di supporre nel caso piano l'esistenza di un altro integrale primo oltre ad  $H$  e a  $J$ . Esiste infatti un vettore invariante rispetto al moto detto vettore di Laplace-Runge-Lenz. Esso esiste in realtà nel caso spaziale ed è

$$A(q, p) := p \times (q \times p) - \frac{q}{\|q\|}.$$

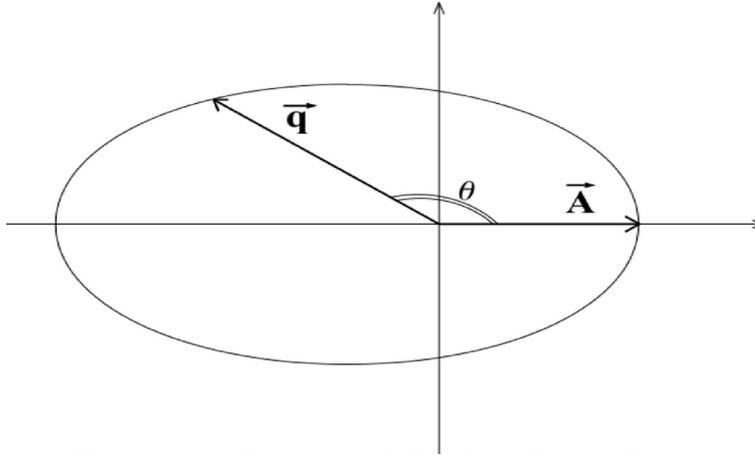


Figura 2.1: Il vettore di Laplace-Runge-Lenz.

Tale vettore giace sul piano dell'orbita, infatti  $l = q \times p$  è ortogonale ad  $A$ :

$$\langle l, A \rangle = \langle l, p \times l \rangle - \langle l, \frac{q}{r} \rangle = \langle p, l \times l \rangle - \frac{1}{r} \langle l, q \rangle = 0.$$

Se indichiamo con  $\theta$  l'angolo tra  $A$  e  $q$ , allora  $\|A\| r \cos \theta = \langle A, q \rangle$ .

Essendo

$$\langle A, q \rangle = \langle p \times (q \times p), q \rangle - \frac{1}{r} \langle q, q \rangle = \langle q \times p, q \times p \rangle - r = l^2 - r$$

avremo che

$$r = \frac{l^2}{1 + \|A\| \cos \theta}$$

è l'equazione del moto nella coordinata  $r$ .

È noto che  $r = p/(1 + \cos \nu)$ , dove  $e$  è l'eccentricità dell'ellisse e  $\nu$  è l'angolo da  $q$  al periapside<sup>3</sup>. Abbiamo quindi che  $A$  ha modulo uguale a  $e$  e direzione verso il periapside. L'eccentricità  $e$  dipende dall'energia  $h$ , ma possiamo prendere come integrale primo l'angolo che indica il periapside.

<sup>3</sup>Il perieliio è il punto dell'orbita più vicino all'origine, l'apoapside è quello più distante.

Per ulteriori informazioni si veda [14].

Analizziamo inoltre come altro esempio di sistema degenere il caso del corpo rigido:

\* **Sistema di Eulero-Poinsot:**

Consideriamo un corpo rigido con punto fisso (olonomo) senza l'azione di forze attive. Sappiamo che il moto è una rotazione del corpo attorno a tale punto. Avremo quindi che lo spazio delle fasi sarà formato dallo spazio coangente del gruppo  $SO(3)$  delle matrici di rotazione,  $T^*SO(3) \cong SO(3) \times \mathbb{R}^3$ . Questo sistema si chiama corpo rigido libero o di Eulero-Poinsot.

Consideriamo due sistemi di riferimento: uno posto sul corpo orientato con gli assi lungo gli assi d'inerzia e denotato con  $(e_1, e_2, e_3)$ , mentre l'altro collocato nello spazio, indicato con  $(e_x, e_y, e_z)$ .

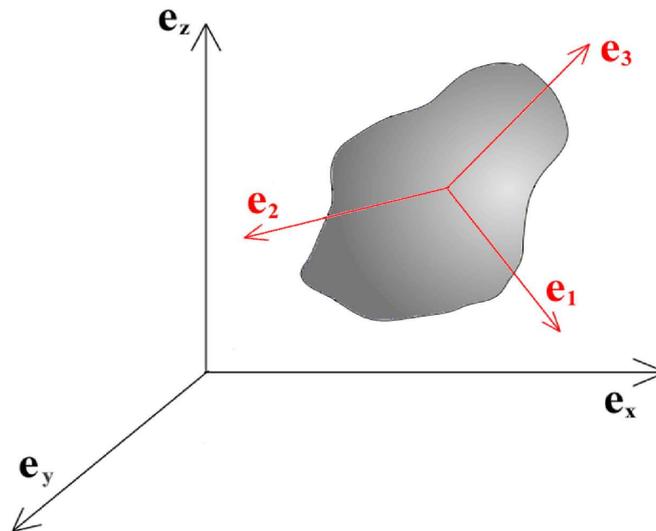


Figura 2.2: I due riferimenti nel problema del corpo rigido.

Possiamo rappresentare un punto di  $T^*SO(3)$  con:

- una matrice  $R \in SO(3)$  che rappresenta l'orientazione del riferimento sul corpo  $(e_1, e_2, e_3)$  rispetto a quello sullo spazio  $(e_x, e_y, e_z)$ ,
- il vettore momento angolare  $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3$  espresso nel sistema di riferimento sul corpo.

Sappiamo che lungo il moto sono conservate l'energia cinetica  $H$  e il momento angolare  $m_s$  rappresentato in coordinate del riferimento spaziale, cioè

$$H(R, m) = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i^2}{2I_i} \quad m_s = Rm,$$

dove  $I_1, I_2, I_3$  sono i momenti principali di inerzia del corpo.

Anche in questo caso abbiamo un numero di integrali primi indipendenti e in involuzione, 4, superiore alla metà della dimensione dello spazio delle fasi.

Supponendo  $h \neq \frac{\|m_s\|^2}{2I_i}$  per  $i = 1, 2, 3$  e  $m \neq 0$ , mostriamo che gli insiemi di livello  $M_{h, m_s}$  sono diffeomorfi a dei tori  $\mathbb{T}^2$ .

Il vettore  $m$  si trova nell'intersezione tra un ellissoide e una sfera dati dalle equazioni:

$$\frac{m_1^2}{2I_1} + \frac{m_2^2}{2I_2} + \frac{m_3^2}{2I_3} = h \quad \text{e} \quad \|m\| = \|m_s\|;$$

che graficamente è costituita da una curva chiusa e quindi diffeomorfa a  $S^1$ .

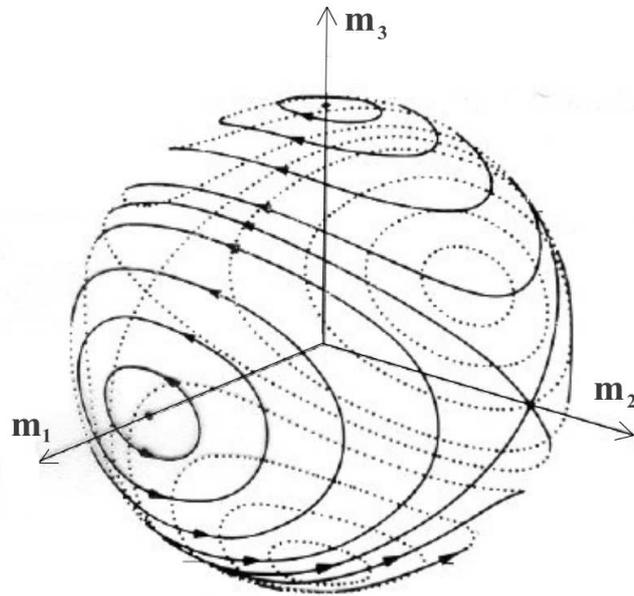


Figura 2.3: Curve chiuse create dall'intersezione di una sfera e un'ellisse.

Fissato un vettore  $m$ , vediamo quali sono le matrici di rotazione  $R$  tali che  $m_s = Rm$ .

Vogliamo far vedere che in generale, se fissiamo due vettori  $v, w \in \mathbb{R}^3$ , l'insieme

$$N = \{R \in SO(3) \mid Rv = w\}$$

è isomorfo ad una circonferenza.

Fissiamo  $\bar{R} \in N$ . Per ogni  $R \in N$  esistono  $S, T \in SO(3)$  tali che  $S$  è una rotazione attorno a  $w$ ,  $T$  è una rotazione attorno a  $v$  e  $R = S\bar{R}T$ . Quindi un elemento di  $N$  dipende dalla scelta sia di  $S$  che di  $T$ .

Mostriamo che basta scegliere solo una delle due.

Se prendiamo  $S' := S\bar{R}T\bar{R}^{-1}$  allora  $S'\bar{R} = S\bar{R}T = R$  e  $S'$  è una rotazione attorno a  $w$ :

$$S'w = S\bar{R}T\bar{R}^{-1}w = S\bar{R}Tv = S\bar{R}v = Sw = w.$$

Quindi  $N$  è isomorfo all'insieme delle rotazioni attorno a  $w$ , ovvero a  $S^1$ .

Avremo pertanto che

$$M_{h, m_s} = \left\{ (R, m) \mid \frac{m_1^2}{2I_1} + \frac{m_2^2}{2I_2} + \frac{m_3^2}{2I_3} = h, Rm = m_s \right\} \cong S^1 \times S^1 \cong \mathbb{T}^2.$$

In questi e in altri casi si vede che il teorema di Liouville-Arnol'd non considera in modo naturale molti dei sistemi meccanici. Generalizziamo quindi la situazione con il seguente

**Teorema 2.2.1** (Mischenko-Fomenko).

Sia  $(P, \Omega)$  una varietà simplettica di dimensione  $2d$  e sia

$$f = (f_1, \dots, f_{2d-n}) : P \longrightarrow f(P) \subset \mathbb{R}^{2d-n}$$

una fibrazione con fibre compatte. Supponiamo inoltre che

1. esista una matrice quadrata  $M$  di dimensione  $2d-n$  che come elementi abbia funzioni  $M_{i,j} : f(P) \longrightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\{f_i, f_j\} = M_{i,j} \circ f$  per ogni  $i, j = 1, \dots, 2d-n$ ;
2. il rango della matrice  $M$  sia  $2d-2n$  per ogni punto di  $f(P)$ ;

allora per ogni fibra di  $f$  esiste un intorno  $U$  di  $P$  con coordinate  $(a, p, q, \alpha) \in A \times \mathbb{T}^n$ , con  $A \subseteq \mathbb{R}^{2d-n}$ , tali che

- le fibre di  $f$  sono i tori  $n$ -dimensionali  $\mathbb{T}^n$  dati da  $\{(a, p, q) = \text{costante}\}$ ;

- la fibrazione  $f$  dipende solo dalle coordinate  $(a, p, q)$ ;
- la forma simplettica  $\Omega$  in  $U$  è

$$\Omega|_U = \sum_{i=1}^{d-n} dp_i \wedge dq_i + \sum_{j=1}^n da_j \wedge d\alpha_j.$$

Segue subito che se gli  $f_i$  sono integrali primi in un sistema Hamiltoniano  $(P, \Omega, H)$ , allora i tori  $\mathbb{T}^n = \{(a, p, q) = \text{costante}\}$  sono invarianti rispetto al flusso e le equazioni del moto sono

$$\dot{a} = 0 \quad \dot{p} = 0 \quad \dot{q} = 0 \quad \dot{\alpha} = \nu.$$

È chiaro che questo teorema è una generalizzazione di quello di Liouville. Infatti se prendiamo il caso in cui  $n = d$  è immediato vedere che le coordinate  $p$  e  $q$  scompaiono e la matrice  $M_{i,j}$  è la matrice nulla.

Il teorema di Mischenko-Fomenko considera tutti i casi di flussi su tori invarianti, dal caso estremo dei sistemi completamente integrabili ( $n = d$ ) al caso dei sistemi periodici ( $n = 1$ ).

## Capitolo 3

# Interpretazione geometrica di Mischenko-Fomenko

Le due ipotesi del teorema precedente non sono molto intuitive, introduciamo quindi un punto di vista più geometrico in modo tale da sostituire queste condizioni utilizzando la struttura simplettica della varietà.

### 3.1 Varietà di Poisson

Le parentesi di Poisson in una varietà creano una struttura più generale della struttura simplettica.

**Definizione 3.1.1.** *Su una varietà  $P$ , un'operazione*

$$\{, \} : C^\infty(P) \times C^\infty(P) \longrightarrow C^\infty(P)$$

*si dice parentesi di Poisson se soddisfa*

- *la bilinearità:*  $\{f, ag + bh\} = a\{f, g\} + b\{f, h\}$
- *l'antisimmetria:*  $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- *l'identità di Jacobi:*  $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0$
- *la regola di Leibnitz:*  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$ .

$(P, \{, \cdot\})$  *si chiama varietà di Poisson.*

Ricordiamo che in genere una coppia come  $(C^\infty(P), \{, \cdot\})$  che rispetti le prime 3 proprietà della precedente definizione è detta **algebra di Lie**.

Vediamo ora alcuni esempi di tale operazione.

\* **Parentesi simplettiche:**

In una varietà simplettica  $(P, \Omega)$  risulta naturale definire delle parentesi di Poisson:

$$\{f, g\} := \Omega(X_f, X_g) \quad \forall f, g \in C^\infty(P).$$

La bilinearità e l'antisimmetria derivano dalle proprietà della 2-forma  $\Omega$ .

Facciamo ora vedere che vale l'identità di Jacobi.

Abbiamo che per ogni  $f, g \in C^\infty(P)$

$$\{f, g\} = df(X_g) = X_g[f] = -X_f[g].$$

**Proposizione 3.1.2.** *Sia  $\phi : (P_1, \Omega_1) \rightarrow (P_2, \Omega_2)$ ; allora  $\phi$  è una mappa simplettica se e solo se*

$$X_{f \circ \phi} = \phi^* X_f \quad \forall f \in C^\infty(P_2).$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $f \in C^\infty(P_2)$  e per ogni  $v \in TP_1$  abbiamo che

$$\Omega_1(X_{f \circ \phi}, v) = d(f \circ \phi)(v) = df(d\phi(v)) = \Omega_2(X_f, d\phi(v))$$

e

$$\Omega_1(\phi^* X_f, v) = \Omega_1(d\phi^{-1} X_f, d\phi^{-1}(d\phi(v))).$$

Quindi risulta che  $\Omega_1 = \phi^* \Omega_2$  se e solo se  $\phi^* X_f = X_{f \circ \phi}$  per ogni  $f \in C^\infty(P_2)$ .  $\square$

Deduciamo che  $\phi$  è una mappa simplettica se e solo se

$$\begin{aligned} \{f, g\} \circ \phi &= (X_f[g]) \circ \phi = \phi^*(X_f[g]) = \\ &= \phi^* X_f[\phi^* g] = X_{f \circ \phi}[g \circ \phi] = \\ &= \{f \circ \phi, g \circ \phi\} \quad \forall f, g \in C^\infty(P). \end{aligned}$$

Il flusso  $\phi_t^{X_h}$  è una mappa simplettica in  $P$  poiché  $X_h$  è Hamiltoniano. Allora

$$\{f, g\} \circ \phi_t^{X_h} = \{f \circ \phi_t^{X_h}, g \circ \phi_t^{X_h}\} \quad \forall f, g \in C^\infty(P). \quad (3.1)$$

Osserviamo che per un flusso  $\phi_t^{X_h}$  vale che

$$\frac{d}{dt} \left( f \circ \phi_t^{X_h} \right) \Big|_{t=0} = df(X_h) = \{f, h\} \quad \forall f \in C^\infty(P).$$

Quindi se differenziamo in  $t$  l'equazione (3.1) per  $t = 0$ , ricaviamo che

$$\begin{aligned}\{\{f, g\}, h\} &= \{df(X_h), g\} + \{f, dg(X_h)\} = \\ &= \{\{f, h\}, g\} + \{f, \{g, h\}\} = \\ &= -\{\{h, f\}, g\} - \{\{g, h\}, f\} \quad \forall f, g, h \in C^\infty(P).\end{aligned}$$

La regola di Leibnitz deriva direttamente dalle proprietà dei campi vettoriali:

$$\{fg, h\} = X_h[fg] = fX_h[g] + gX_h[f] = f\{g, h\} + g\{f, h\}.$$

In coordinate di Darboux  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  la forma simplettica si scrive

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

e quindi

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \forall f, g \in C^\infty(P)$$

**\* Parentesi di Lie-Poisson:**

In  $\mathbb{R}^3$  definiamo

$$\{f, g\}(x) := x \cdot \nabla f \times \nabla g \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3), x \in \mathbb{R}^3,$$

dove  $\cdot$  indica il prodotto scalare euclideo. Vediamo ora che quella definita sia effettivamente una parentesi di Lie.

Bilinearità:

Per ogni  $x \in \mathbb{R}^3$  e per ogni  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,

$$\begin{aligned}\{f, ag + bh\}(x) &= x \cdot (a(\nabla f \times \nabla g) + b(\nabla f \times \nabla h)) = \\ &= a\{f, g\} + b\{f, h\}(x).\end{aligned}$$

Antisimmetria:

Deriva direttamente dall'antisimmetria del prodotto vettoriale.

Regola di Leibnitz:

Per ogni punto  $x$  di  $\mathbb{R}^3$  e per  $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\{f, gh\}(x) = x \cdot (\nabla f \times (h\nabla g + g\nabla h)) = h\{f, g\}(x) + g\{f, h\}(x).$$

Identità di Jacobi:

Possiamo esprimere le parentesi usando la notazione di Einstein e il tensore di Levi-Civita:

$$\{f, g\} = \varepsilon_{ijl} x_i \partial_j f \partial_l g.$$

Avremo dunque che

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}, h\} &= \varepsilon_{ijl} x_i \partial_j f \partial_l (\varepsilon_{nkm} x_n \partial_k g \partial_m h) = \\ &= (\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{lkm} x_i \partial_j f \partial_k g \partial_m h) + \\ &+ (\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{nkm} x_i x_n \partial_j f \partial_{lk}^2 g \partial_m h) + \\ &+ (\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{nkm} x_i x_n \partial_j f \partial_{lm}^2 h \partial_k g). \end{aligned}$$

Per verificare l'identità di Jacobi basta far vedere che per ogni addendo la somma con i termini  $f, g, h$  permutati è nulla.

Dal fatto che

$$\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{lkm} = \delta_{ik} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jk}$$

otteniamo che il primo termine è

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{lkm} x_i \partial_j f \partial_k g \partial_m h &= x_i \partial_j f \partial_i g \partial_j h - x_i \partial_j f \partial_j g \partial_i h = \\ &= (x \cdot \nabla g)(\nabla f \cdot \nabla h) - (x \cdot \nabla h)(\nabla f \cdot \nabla g). \end{aligned}$$

Quindi la somma con i termini permutati è

$$\begin{aligned} (x \cdot \nabla g)(\nabla f \cdot \nabla h) - (x \cdot \nabla h)(\nabla f \cdot \nabla g) + (x \cdot \nabla h)(\nabla g \cdot \nabla f) + \\ - (x \cdot \nabla f)(\nabla g \cdot \nabla h) + (x \cdot \nabla f)(\nabla h \cdot \nabla g) - (x \cdot \nabla g)(\nabla h \cdot \nabla f) = 0. \end{aligned}$$

Per il secondo e il terzo termine abbiamo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{nkm} x_i x_n (\partial_j f \partial_{lk}^2 g \partial_m h + \partial_j f \partial_{lm}^2 h \partial_k g + \\ + \partial_j g \partial_{lk}^2 h \partial_m f + \partial_j g \partial_{lm}^2 f \partial_k h + \\ + \partial_j h \partial_{lk}^2 f \partial_m g + \partial_j h \partial_{lm}^2 g \partial_k f) \end{aligned}$$

dove i termini si annullano a due a due:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{nkm} x_i x_n (\partial_j f \partial_{lk}^2 g \partial_m h + \partial_j h \partial_{lm}^2 g \partial_k f) &= \\ = \partial_j f \partial_{lk}^2 g \partial_m h x_i x_n (\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{nkm} + \varepsilon_{imk} \varepsilon_{njl}) &= \\ = \partial_j f \partial_{lk}^2 g \partial_m h x_i x_n (\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{nkm} + \varepsilon_{nmk} \varepsilon_{ijl}) &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente al caso simplettico possiamo definire un campo vettoriale usando le parentesi di Poisson.

**Definizione 3.1.3.** *In una varietà di Poisson  $P$ ,  $X$  è un campo vettoriale Hamiltoniano se esiste una funzione  $h \in C^\infty(P)$  tale che  $X[f] = \{f, h\}$  per ogni  $f \in C^\infty(P)$ .*

Anche in questo caso il campo verrà indicato con  $X_h$ . Infatti è facile vedere che questa definizione e quella симплетica coincidono nel caso di una varietà симплетica munita di parentesi di Poisson definite come nell'esempio precedente.

**Proposizione 3.1.4.** *La mappa*

$$\begin{aligned} \Phi : (C^\infty(P), \{, \}) &\longrightarrow (\mathfrak{X}(P), [, ]) \\ f &\longmapsto X_f \end{aligned}$$

*è un anti-omomorfismo di algebre di Lie.*

*Dimostrazione.* Per ogni  $f, g \in C^\infty(P)$  abbiamo che

$$\begin{aligned} X_{\{f, g\}}[h] &= -\{\{f, g\}, h\} = \\ &= \{\{h, f\}, g\} - \{\{h, g\}, f\} = \\ &= X_g[X_f[h]] - X_f[X_g[h]] = \\ &= [X_g, X_f][h] \quad \forall h \in C^\infty(P) \end{aligned}$$

e quindi  $\Phi(\{f, g\}) = X_{\{f, g\}} = [X_g, X_f] = [\Phi(g), \Phi(f)]$ . □

Andiamo a vedere ora che rapporto c'è tra il flusso di un campo e le parentesi di Poisson.

**Proposizione 3.1.5.** *Per ogni  $f, g \in C^\infty(P)$  le parentesi di Poisson si annullano se e solo se una delle due funzioni è costante lungo il flusso associato all'altra:*

$$\{f, g\} = 0 \iff \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t^{X_g}) = 0 \iff \frac{d}{dt}(g \circ \phi_t^{X_f}) = 0.$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $f$  e  $g$  in  $C^\infty(P)$  abbiamo che

$$\frac{d}{dt}(f \circ \phi_t^{X_g}) = df(X_g) \circ \phi_t^{X_g} = X_g[f] \circ \phi_t^{X_g} = \{f, g\} \circ \phi_t^{X_g}.$$

□

Per un  $x \in (P, \{, \})$  fissato, consideriamo lo spazio tangente  $T_x P$ ; lo spazio caratteristico di  $P$  in  $x$  è il sottospazio  $S_x$  generato dai campi vettoriali Hamiltoniani:

$$S_x := \{X_f(x) \mid f \in C^\infty(P)\}.$$

Notiamo che se  $X_f, X_g$  sono campi Hamiltoniani, allora anche  $[X_f, X_g] = X_{\{g, f\}}$  è Hamiltoniano. Dunque  $S$  è una distribuzione su  $P$  involutiva (cioè chiusa per le parentesi di Lie); dal teorema di Frobenius sappiamo che  $S$  è completamente integrabile ovvero esiste una foliazione  $\mathcal{F}$  su  $P$  tale che ogni vettore  $X_f(x)$  è tangente alla foglia passante per  $x$ . Ognuna di queste foglie possiede una struttura simplettica definita da

$$\Omega(X_f, X_g) := \{f, g\}$$

e per questo vengono chiamate **foglie simplettiche**.

La dimensione della foglia di  $\mathcal{F}$  passante per  $x$  è detta **rango** di  $P$  in  $x$ .

Una funzione definita su un aperto  $U$  di  $P$  tale che sia costante su ogni foglia simplettica è detta un **Casimir locale** di  $P$ . Osserviamo che  $f \in C^\infty(P)$  è costante lungo una foglia se e solo se lo è  $f \circ \phi_t^{X_g}$  per ogni  $g \in C^\infty(P)$  o equivalentemente se  $\{f, g\} = 0$  per ogni  $g$ , cioè se  $X_f = 0$ .

Esempi:

- In  $\mathbb{R}^{2n}$  con parentesi simplettiche sappiamo che per ogni  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$  lo spazio caratteristico è

$$S_p = \{X_f = (\partial_y f(p), \partial_x f(p)) \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})\} \subseteq T_p \mathbb{R}^{2n}.$$

Per ogni vettore  $v = (a, b)$  in  $T_p \mathbb{R}^{2n}$ , se prendiamo  $f(x, y) = b \cdot x + a \cdot y$ , allora  $X_f = (a, b) = v$ . Quindi per ogni punto  $p \in \mathbb{R}^{2n}$  lo spazio caratteristico corrisponde con tutto lo spazio tangente, perciò abbiamo un'unica foglia simplettica data da tutto  $\mathbb{R}^{2n}$ .

I Casimir sono ovviamente tutte le funzioni costanti.

- Consideriamo le parentesi di Lie-Poisson in  $\mathbb{R}^3$ . Per ogni  $x \in \mathbb{R}^3$  e per ogni funzione  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  abbiamo che

$$X_f(x) = -\{f, \cdot\}(x) = -x \cdot \nabla f \times \nabla(\cdot) = \varepsilon_{ikj} x_i \partial_j f \partial_k,$$

quindi ogni campo vettoriale Hamiltoniano calcolato in  $x \in \mathbb{R}^3$  è ortogonale allo stesso vettore  $x$ ; infatti

$$x \cdot X_f(x) = \varepsilon_{ikj} x_i x_k \partial_j f = x \cdot x \times \nabla f = 0.$$

Pertanto le foglie simplettiche sono le sfere centrate nell'origine più l'origine e i Casimir sono le funzioni radiali.

Definita una varietà di Poisson vediamo i morfismi.

**Definizione 3.1.6.** *Siano  $(P_1, \{, \}_1)$  e  $(P_2, \{, \}_2)$  due varietà di Poisson, una mappa  $\psi : P_1 \rightarrow P_2$  tale che per ogni  $f, g \in C^\infty(P_2)$*

$$\{f, g\}_2 \circ \psi = \{f \circ \psi, g \circ \psi\}_1$$

*è detta morfismo di Poisson.*

**Proposizione 3.1.7.** *Se  $\psi : (P_1, \Omega_1) \rightarrow (P_2, \Omega_2)$  una mappa tra due varietà simplettiche su cui sono definite le parentesi di Poisson attraverso le 2-forme. Allora  $\psi$  è un morfismo di Poisson se e solo se è una mappa simplettica.*

La dimostrazione segue direttamente dalla proposizione 3.1.2 e dalla definizione di morfismo di Poisson.

## 3.2 Bifoliazioni e bifibrazioni

In questo paragrafo indicheremo con  $P$  una varietà simplettica  $(P, \Omega)$  di dimensione  $2d$  dotata delle parentesi di Poisson definite dalla struttura simplettica.

Dato un sottospazio  $S_x$  di  $T_x P$ , definiamo il suo sottospazio ortogonale simplettico come

$$S_x^\Omega := \{v \in T_x P \mid \Omega(v, u) = 0 \ \forall u \in S_x\}.$$

Un sottospazio  $S$  si dice:

- isotropo se  $S \subset S^\Omega$ ;
- coisotropo se  $S^\Omega \subset S$ ;
- lagrangiano se  $S = S^\Omega$ ;

Si può vedere facilmente che la dimensione di ogni sottospazio  $S \subset T_p P$  è complementare a quella di  $S^\Omega$ , inoltre abbiamo che  $(S^\Omega)^\Omega = S$  e l'ortogonale simplettico di un sottospazio isotropo è coisotropo e viceversa.

Analogamente possiamo definire una sottovarietà  $Q \subset P$  isotropa /coisotropa /lagrangiana /simplettica se lo è  $T_q Q \subset T_q P$  per ogni punto  $q \in Q$  e così

anche una foliazione considerando le sue foglie.

Data una foliazione  $\mathcal{F}$  su  $P$ , diciamo che è **simpletticamente completa** se la distribuzione ortogonale simplettica ai suoi spazi tangenti è completamente integrabile. In altre parole se esiste una foliazione  $\mathcal{F}^\Omega$  tale che  $T_p(\mathcal{F}^\Omega) = (T_p\mathcal{F})^\Omega$  per ogni  $p \in P$ ; dove con  $T_p\mathcal{F}$  si intende lo spazio tangente alla foglia passante per  $p$ .

Se  $\mathcal{F}$  è simpletticamente completa, la foliazione  $\mathcal{F}^\Omega$  è la **polare** di  $\mathcal{F}$ . Denotiamo con  $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$  l'insieme dei campi vettoriali tangenti alle foglie di  $\mathcal{F}$ .

**Definizione 3.2.1.** *Sia  $\mathcal{F}$  una foliazione simpletticamente completa di  $P$  e  $\mathcal{F}^\Omega$  la sua polare, chiamiamo allora la coppia  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\Omega)$  una **bifoliazione**.*

*Se  $\mathcal{F}$  è una fibrazione data da  $i : P \rightarrow B$  e  $\mathcal{F}^\Omega$  è anch'essa una fibrazione data da  $c : P \rightarrow A$ , allora definiamo  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\Omega)$  una **bifibrazione** e la denotiamo con  $A \xleftarrow{c} P \xrightarrow{i} B$ .*

Ad ogni fibrazione possiamo associare una foliazione  $\mathcal{F}$ , diremo che la fibrazione è simpletticamente completa se esiste una foliazione  $\mathcal{F}^\Omega$  ortogonale simplettica a  $\mathcal{F}$ .

Consideriamo un'azione fortemente Hamiltoniana di un gruppo  $G$  su  $P$  tale che  $\mathbb{J}$  sia la mappa momento.

**Proposizione 3.2.2.** *Sia  $p \in P$  un punto regolare per l'azione di  $G$  e sia  $\mu = \mathbb{J}(p)$  un punto regolare per l'azione coaggiunta tale che la retroimmagine  $\mathbb{J}^{-1}(\mu)$  sia una sottovarietà di  $P$ ; allora abbiamo che tale sottovarietà è l'ortogonale simplettico dell'orbita di  $p$ , cioè:*

$$T_p(\mathbb{J}^{-1}(\mu)) = (T_p\mathcal{O}_p)^\Omega$$

*Dimostrazione.* Notiamo che  $v$  appartiene allo spazio tangente di  $\mathbb{J}^{-1}(\mu)$  se e solo se  $T_p\mathbb{J}(v) \in T_\mu\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^*$  è nullo. Allora per ogni  $\xi \in \mathfrak{g}$  vale

$$\begin{aligned} T_p\mathbb{J}(v) = 0 &\iff \langle T_p\mathbb{J}(v), \xi \rangle = 0 \\ &\iff d_p(J(\xi))(v) = 0 \\ &\iff \Omega(\xi_P(p), v) = 0 \\ &\iff \Omega(u, v) = 0 \quad \forall u \in T_p\mathcal{O}_p. \end{aligned}$$

La dimostrazione segue dalla definizione di spazio polare. □

Quindi se restringiamo  $P$  all'insieme dei punti che vengono mappati da  $\mathbb{J}$  su valori regolari per l'azione coaggiunta, e se gli insiemi di livello sono varietà, otteniamo una bifoliazione di  $P$  data dalle orbite e dagli insiemi di livello.

**Definizione 3.2.3.** *Data una foliazione (fibrazione), una funzione costante sulle sue foglie (fibre) è detta integrale primo della foliazione (fibrazione).*

Se abbiamo una fibrazione data da  $i : P \rightarrow B$ , una funzione  $f \in C^\infty(P)$  è un integrale primo se è il sollevamento di una funzione  $\tilde{f}$  definita su  $B$ ; in altre parole  $f$  è un integrale primo se  $f = \tilde{f} \circ i$  per qualche  $\tilde{f} \in C^\infty(B)$ . Con le prossime due proposizioni vediamo ora che rapporto c'è nel caso simplettico tra integrali primi e foliazioni polari.

**Proposizione 3.2.4.** *Sia  $\mathcal{F}$  una foliazione simpletticamente completa di  $P$ ; allora  $f \in C^\infty(P)$  è un integrale primo di  $\mathcal{F}$  se e solo se  $X_f$  è simpletticamente ortogonale agli spazi tangenti alle foglie di  $\mathcal{F}$ , cioè se  $X_f \in \mathfrak{X}(\mathcal{F}^\Omega)$ .*

*Dimostrazione.* Dire che  $f$  è un integrale primo di  $\mathcal{F}$  significa dire che  $\mathcal{L}_Y f = 0$  per ogni  $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ , quindi

$$\Omega(X_f, Y) = df(Y) = \mathcal{L}_Y f = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{F}).$$

□

**Proposizione 3.2.5.** *Data una foliazione  $\mathcal{F}$ , esiste la sua polare  $\mathcal{F}^\Omega$  se e solo se i suoi integrali primi sono chiusi rispetto alle parentesi di Poisson, cioè se  $\{f, g\}$  è un integrale primo di  $\mathcal{F}$  per ogni  $f, g$  integrali primi di  $\mathcal{F}$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo esista  $\mathcal{F}^\Omega$ , dalla proposizione precedente sappiamo che se  $f$  e  $g$  sono due integrali primi di  $\mathcal{F}$ , allora i campi  $X_f$  e  $X_g$  appartengono a  $\mathfrak{X}(\mathcal{F}^\Omega)$ . Essendo  $T(\mathcal{F}^\Omega)$  completamente integrabile, per il teorema di Frobenius, abbiamo che anche  $X_{\{f, g\}} = [X_g, X_f]$  appartiene al fibrato tangente. Ne deriva che  $\{f, g\}$  è un integrale primo di  $\mathcal{F}$ .

Consideriamo delle coordinate locali trasversali alle foglie di  $\mathcal{F}$  denotandole con  $z_1, \dots, z_n$ . Sappiamo quindi che  $X_{z_1}, \dots, X_{z_n}$  appartengono a  $\mathfrak{X}(\mathcal{F}^\Omega)$  ed essendo linearmente indipendenti ne formano una base. Per ipotesi  $\{z_i, z_j\}$  sono integrali primi di  $\mathcal{F}$  quindi  $[X_{z_i}, X_{z_j}] = X_{\{z_j, z_i\}}$  appartengono a  $\mathfrak{X}(\mathcal{F}^\Omega)$ ; sempre per il teorema di Frobenius,  $T(\mathcal{F}^\Omega)$  è completamente integrabile, cioè esiste la foliazione polare  $\mathcal{F}^\Omega$ . □

Se abbiamo una fibrazione data da  $f = (f_1, \dots, f_k) : P \rightarrow B$ , per vedere che gli integrali primi della fibrazione sono chiusi per le parentesi di Poisson basta verificarlo per ogni  $\{f_i, f_j\}$ . Il che è equivalente a dire che esistono  $P_{i,j}$  funzioni su  $B$  tali che  $\{f_i, f_j\} = P_{i,j} \circ f$ .

Possiamo quindi sostituire la prima ipotesi del teorema di Mischenko-Fomenko con l'esistenza di una foliazione polare a quella data dalla fibrazione  $f$ .

Diamo ora un senso geometrico anche alla seconda ipotesi del teorema.

**Proposizione 3.2.6.** *Una fibrazione  $i : P \rightarrow B$  è simpletticamente completa se e solo se esiste una struttura di Poisson su  $B$  tale che  $i$  sia un morfismo di Poisson.*

*Dimostrazione.* Preso  $f \in C^\infty(P)$ ,  $X_f$  appartiene a  $\mathfrak{X}(\mathcal{F}^\Omega)$  se e solo se per ogni  $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$  abbiamo che  $\Omega(Y, X_f) = 0$ . Ma questo è equivalente a dire che  $f$  è costante lungo le foglie di  $\mathcal{F}$  (cioè è un integrale primo); in altre parole possiamo scrivere  $f$  come composizione della fibrazione  $i$  e una funzione definita su un aperto di  $B$ :  $f = \tilde{f} \circ i$ .

Abbiamo appena visto che esiste una foliazione polare se le parentesi di Poisson di due integrali primi sono un integrale primo di  $\mathcal{F}$ .

Quindi esiste  $\mathcal{F}^\Omega$  se e solo se per ogni  $f = \tilde{f} \circ i, g = \tilde{g} \circ i \in C^\infty(P)$ ,  $\{f, g\}$  è un integrale primo di  $\mathcal{F}$ . Esiste allora una funzione su  $B$ , che denotiamo con  $P_{f,g}$ , tale che  $\{f, g\} = P_{f,g} \circ i$ . Se per ogni funzione  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  di  $B$  definiamo  $\{\tilde{f}, \tilde{g}\}_B := P_{\tilde{f}, \tilde{g}}$  allora  $i$  diventa un morfismo di Poisson, infatti

$$\{f, g\}_P = \{\tilde{f}, \tilde{g}\}_B \circ i$$

□

Quindi se  $i : P \rightarrow B$  è una fibrazione simpletticamente completa, possiamo definire una struttura di Poisson anche su  $B$ ; esiste pertanto la foliazione simplettica di  $B$ . La seguente proposizione mette in relazione le due foliazioni.

**Proposizione 3.2.7.** *Sia  $i : P \rightarrow B$  una fibrazione simpletticamente completa, allora le fibre di  $i$  sono isotrope se e solo se le foglie della foliazione simplettica di  $B$  hanno dimensione  $2\dim(B) - \dim(P)$ .*

*Dimostrazione.* Il rango di  $B$  in un punto  $i(x)$  è la dimensione della foglia simplettica passante per quel punto, cioè il complementare del numero massimo di Casimir indipendenti. Il numero di Casimir indipendenti di  $B$  è uguale al numero di funzioni linearmente indipendenti che siano integrali primi sia di  $\mathcal{F}$  che di  $\mathcal{F}^\Omega$  e coincide con il numero di campi vettoriali indipendenti tangenti alle foglie delle due foliazioni. Indicando con  $\mathcal{F}_x$  la foglia passante per  $x$ , vediamo che questo numero corrisponde a  $\dim(\mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_x^\Omega)$  e sarà uguale a  $\dim(\mathcal{F}_x)$  solo nel caso in cui  $\mathcal{F}_x$  sia isotropa. Così, dato che la dimensione di  $\mathcal{F}_x$  è  $\dim(P) - \dim(B)$ , avremo che  $\mathcal{F}_x$  è isotropa se e solo se

$$\text{rank}_x(B) = \dim(B) - (\dim(P) - \dim(B)) = 2\dim(B) - \dim(P).$$

□

**Lemma 3.2.8.** *Su una varietà di Poisson  $B$  siano  $(y_1, \dots, y_n)$  e  $z_1, \dots, z_n$  due sistemi di coordinate in un intorno di un punto  $x \in B$ . Allora il rango della matrice  $Y = (\{y_i, y_j\})_{i,j}$  e quello della matrice  $Z = (\{z_i, z_j\})_{i,j}$  coincidono.*

*Dimostrazione.* Per ogni  $i, j = 1, \dots, n$  abbiamo che

$$\begin{aligned} \{z_i, z_j\} &= X_{z_i} dz_j = \sum_{h=1}^n \frac{\partial z_j}{\partial y_h} X_{z_i} dy_h = \\ &= - \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial z_j}{\partial y_h} X_{y_h} \frac{\partial z_i}{\partial y_k} dy_k = \sum_{h,k=1}^n \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_{j,h} \{y_h, y_k\} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_{i,k}. \end{aligned}$$

Se indichiamo con  $J$  la matrice Jacobiana del cambiamento di coordinate otteniamo che

$$Z = JYJ^T.$$

Dal momento che la matrice  $J$  ha rango massimo,  $\text{rank}(Z) = \text{rank}(Y)$ .  $\square$

**Proposizione 3.2.9.** *Sia  $B$  una varietà di Poisson di dimensione  $n$  e siano  $(y_1, \dots, y_n)$  delle coordinate in un intorno di un punto  $x \in B$ . Allora il rango di  $x$  in  $B$  è uguale al rango della matrice  $Y$  data dalle parentesi di Poisson delle coordinate:*

$$Y = (\{y_i, y_j\})_{i,j}.$$

*Dimostrazione.* Dal teorema di splitting (vedi [15]) sappiamo che per  $x \in B$  con rango  $2k$  esistono coordinate locali  $(r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_k, q_1, \dots, q_{n-2k})$  tali che

$$\{r_i, r_j\} = \{s_i, s_j\} = \{q_l, q_m\} = \{r_i, q_l\} = \{s_i, q_l\} = 0 \quad \text{e} \quad \{r_i, s_j\} = \delta_{ij}.$$

Pertanto la matrice data dalle parentesi di Poisson delle coordinate è

$$R = \begin{pmatrix} 0 & I_k & 0 \\ -I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi avrà rango  $2k$ .

Dal lemma 3.2.8 vediamo che per ogni sistema di coordinate locali di  $x$ , la matrice delle parentesi di Poisson delle coordinate ha rango uguale a  $\text{rank}_x(B)$ .  $\square$

Nel caso in cui abbiamo una fibrazione  $f = (f_1, \dots, f_{2d-n}) : P \rightarrow B$ , per ogni  $p \in P$  il punto  $f(p) \in B$  ha coordinate  $(f_1, \dots, f_{2d-n})(p)$ . Allora

$$\text{rank}_{f(p)}(B) = \text{rank}(\{f_i, f_j\}(p)) \quad \forall f(p) \in B.$$

La seconda ipotesi del teorema di Mischenko-Fomenko può essere dunque sostituita dall'isotropia delle fibre di  $\mathcal{F}$ . Infatti se  $P$  ha dimensione  $2d$  e  $\dim(B) = 2d - n$ , le fibre di  $F$  sono isotrope se e solo se il rango di  $B$  equivale a  $2 \dim(B) - \dim(P) = 2(2d - n) - 2d = 2d - 2n$ ; ma il rango di  $B$  è il rango della matrice  $M = (\{f_i, f_j\})_{i,j}$ .

Possiamo quindi fornire delle ipotesi di tipo simplettico che sostituiscono quelle del teorema di Mischenko-Fomenko.

**Teorema 3.2.10.** *Sia  $(P, \Omega)$  una varietà simplettica di dimensione  $2d$  e sia*

$$f = (f_1, \dots, f_{2d-n}) : P \longrightarrow B$$

*una fibrazione con fibre compatte. Supponiamo inoltre che*

1. *la fibrazione  $f$  sia simpletticamente completa;*
2. *le fibre di  $f$  siano isotrope;*

*allora per ogni fibra di  $f$  esiste un intorno  $U$  di  $P$  con coordinate  $(a, p, q, \alpha) \in A \times \mathbb{T}^n$ , con  $A \subseteq \mathbb{R}^{2d-n}$ , tali che*

- *le fibre di  $f$  sono i tori  $n$ -dimensionali  $\mathbb{T}^n$  dati da  $\{(a, p, q) = \text{costante}\}$ ;*
- *la fibrazione  $f$  dipende solo dalle coordinate  $(a, p, q)$ ;*
- *la forma simplettica  $\Omega$  in  $U$  è*

$$\Omega|_U = \sum_{i=1}^{d-n} dp_i \wedge dq_i + \sum_{j=1}^n da_j \wedge d\alpha_j.$$

Inoltre  $B$  possiede una struttura di Poisson tale che  $f$  sia un morfismo di Poisson.

Considerando una bifibrazione  $A \xleftarrow{c} P \xrightarrow{i} B$  con fibre di  $i$  isotrope, sappiamo che le fibre di  $c$  (la foliazione polare coisotropa) sono costituite dagli insiemi di livello dei suoi integrali primi ovvero dai sollevamenti su  $P$  dei Casimir di  $B$ . Se per ogni  $b \in B$  prendiamo un punto  $p \in i^{-1}(b) \subseteq P$  e definiamo una mappa  $s : B \longrightarrow A$  tale che  $s(b) = c(p)$ , vediamo subito che  $c = s \circ i$ . Inoltre  $s$  è una sommersione perché tali sono  $c$  e  $i$ . Supponiamo che  $s$  sia una fibrazione, allora le fibre di  $s$  sono le foglie simplettiche di  $B$ .

Per ogni bifibrazione avremo dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ i \swarrow & & \searrow c \\ B & \xrightarrow{s} & A. \end{array}$$

Pensando alle coordinate locali del teorema di Mischenko-Fomenko sappiamo che gli  $\alpha$  sono le coordinate dei tori invarianti, cioè le fibre di  $i$ , quindi  $(a, p, q)$  possono essere scelte come coordinate di  $B$ . Le fibre di  $c$  che costituiscono la fibrazione polare saranno date dalle coordinate  $(p, q, \alpha)$  mentre le coordinate  $(a)$  potranno essere usate in  $A$  che chiameremo la **varietà azione**. Infine  $(p, q)$  descrivono le foglie simplettiche di  $B$  e avremo che il diagramma appena mostrato si potrà rappresentare localmente nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccc}
 & (a, p, q, \alpha) & \\
 i \swarrow & & \searrow c \\
 (a, p, q) & \xrightarrow{s} & (a)
 \end{array}$$

Per chiarire lo schema della bifibrazione possiamo pensare al sistema come ad un campo di fiori. Sul terreno giacciono le coordinate azione, ovvero lo spazio  $A$ , ad ognuna di esse è associata una fibra data dalla mappa  $c$  che costituisce il fiore. Il centro di questo fiore è formato dalle foglie simplettiche di  $B$ , espresse nelle coordinate locali  $(p, q)$ . Infine per ogni punto del centro del fiore otteniamo un petalo costituito dalla fibra di  $i$ , cioè dai tori espressi nelle coordinate  $(\alpha)$ .

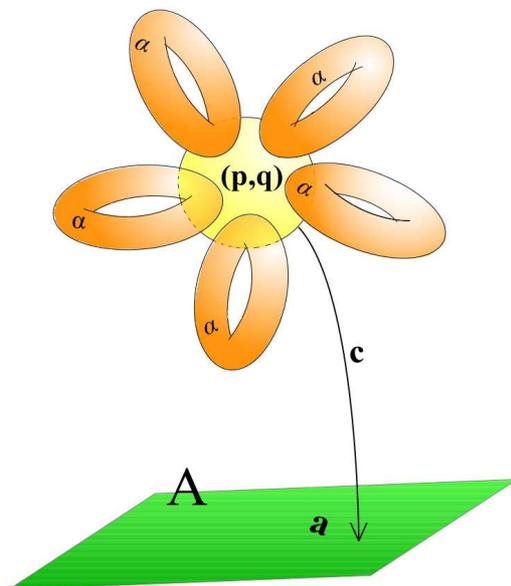


Figura 3.1: Schema della fibrazione vista come un fiore

# Capitolo 4

## Azioni di gruppo e integrabilità

In questo capitolo enunciamo delle condizioni per le quali una simmetria di un sistema implica la sua integrabilità.

Data un'azione di gruppo fortemente Hamiltoniana su una varietà ci chiediamo sotto quali condizioni la mappa momento sia una fibrazione semplicemente completa con fibre isotrope. In questo modo possiamo usare il teorema di Mischenko-Fomenko per derivare l'integrabilità del sistema.

### 4.1 Origine grupitale della bifibrazione

Indichiamo con  $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$  l'insieme dei punti di  $\mathfrak{g}$  regolari nell'azione aggiunta e con  $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$  l'insieme dei punti di  $\mathfrak{g}^*$  regolari nell'azione coaggiunta.

**Proposizione 4.1.1.** *Sia  $\mathbb{J}$  la mappa momento di un'azione fortemente Hamiltoniana di un gruppo di Lie compatto e connesso  $G$  su una varietà simplettica  $P$ . Supponiamo che  $B := \mathbb{J}(P) \subseteq \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$  e che gli insiemi di livello di  $\mathbb{J}$  siano sottovarietà:*

- *connesse,*
- *compatte,*
- *isotrope.*

Allora, detta  $c : P \rightarrow P/G$  la mappa quoziente rispetto alle orbite,

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \mathbb{J} \swarrow & & \searrow c \\ B & \xrightarrow{s} & P/G \end{array}$$

produce una bifoliazione su  $P$ .

Inoltre le foglie simplettiche della struttura di Poisson di  $B$  per la quale  $\mathbb{J}$  è un morfismo di Poisson sono le orbite coaggiunte.

*Dimostrazione.* La prima parte segue dalla proposizione 3.2.2 e dal fatto che gli insiemi di livello di  $c$  siano le orbite.

Essendo gli insiemi di livello di  $\mathbb{J}$  isotropi, ogni orbita è l'unione di insiemi di livello. Possiamo dunque definire una mappa  $s : \mathbb{J} \rightarrow P/G$  che manda un punto  $\mu \in \mathbb{J}(P)$  in  $s(\mu) = c(\mathbb{J}^{-1}(\mu))$ . Abbiamo che  $s \circ \mathbb{J} = c$ .

Per ogni  $[p] \in P/G$

$$s^{-1}([p]) = \mathbb{J}(c^{-1}([p])) = \mathbb{J}(\mathcal{O}_p).$$

Vediamo ora che  $\mathbb{J}(\mathcal{O}_p) = \mathcal{O}_{\mathbb{J}(p)}$  per ogni  $p \in P$ :

se  $g \cdot p \in \mathcal{O}_p$

$$\mathbb{J}(g \cdot p) = Ad_{g^{-1}}^* \mathbb{J}(p) \in \mathcal{O}_{\mathbb{J}(p)};$$

se  $Ad_g^* \mathbb{J}(p) \in \mathcal{O}_{\mathbb{J}(p)}$

$$\mathbb{J}^{-1}(Ad_g^* \mathbb{J}(p)) = g \cdot \mathbb{J}^{-1}(\mathbb{J}(p)) \subseteq g \cdot \mathcal{O}_p = \mathcal{O}_p.$$

Quindi le fibre di  $s$  sono le orbite coaggiunte di  $\mathbb{J}(P)$ , in altre parole  $s$  è la mappa quoziente da  $\mathbb{J}(P)$  rispetto alle orbite coaggiunte.

Dalla proposizione 3.2.6 sappiamo che gli integrali primi di  $\mathcal{O}_p$  sono i sollevamenti in  $P$  dei Casimir di  $B$ , quindi le foglie simplettiche sono l'immagine attraverso  $\mathbb{J}$  delle fibre di  $c$ , ovvero

$$\mathbb{J}(c^{-1}([p])) = \mathbb{J}(\mathcal{O}_p) = \mathcal{O}_{\mathbb{J}(p)}.$$

□

Nei prossimi paragrafi, seguendo [4], vogliamo trovare un modello per  $P/G$  e vedere che la mappa  $c$  è a sua volta la mappa momento di un'azione di un toro massimale di  $G$ .

Vedremo poi delle condizioni sul gruppo e sull'azione equivalenti all'isotropia delle fibre di  $\mathbb{J}$ . Potremo quindi utilizzare il teorema di Mischenko-Fomenko per dedurre la superintegrabilità dalla simmetria.

## 4.2 Camere di Weyl

A questo proposito dobbiamo preliminarmente introdurre alcune nozioni sulla struttura della teoria dei gruppi e delle algebre di Lie.

Definiamo un sottoinsieme di  $\mathfrak{g}$  e di  $\mathfrak{g}^*$  che ci saranno utili per avere un

modello di  $P/G$ .

Ricordiamo che per ogni  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{g}_\mu$  indica l'algebra di Lie del gruppo di isotropia  $G_\mu$  nell'azione coaggiunta:

$$\mathfrak{g}_\mu = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = 0\};$$

mentre, per  $\xi \in \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}_\xi$  è l'algebra di Lie del gruppo di isotropia di  $\xi$  nell'azione aggiunta:

$$\mathfrak{g}_\xi = \{\sigma \in \mathfrak{g} \mid \sigma_{\mathfrak{g}}(\xi) = 0\}.$$

**Lemma 4.2.1.** *Esiste un isomorfismo equivariante  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  tale che  $\mathfrak{g}_\mu = \mathfrak{g}_{\rho^{-1}(\mu)}$ , per ogni  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ .*

*Dimostrazione.* In  $\mathfrak{g}$  prendiamo un qualsiasi prodotto interno  $\ll \cdot, \cdot \gg$  invariante per l'azione aggiunta di  $G$ <sup>1</sup>, cioè tale che

$$\ll Ad_g(\xi), \sigma \gg = \ll \xi, Ad_{g^{-1}}(\sigma) \gg \quad \forall g \in G, \xi, \sigma \in \mathfrak{g}.$$

Ad ogni  $\xi \in \mathfrak{g}$  possiamo associare  $\rho(\xi) \in \mathfrak{g}^*$  tale che

$$\langle \rho(\xi), \sigma \rangle = \ll \xi, \sigma \gg \quad \forall \sigma \in \mathfrak{g}.$$

Allora  $\rho$  è un isomorfismo equivariante rispetto all'azione aggiunta e coaggiunta; infatti

$$\begin{aligned} \langle \rho(Ad_g \xi), \sigma \rangle &= \ll Ad_g \xi, \sigma \gg = \\ &= \ll \xi, Ad_g^{-1} \sigma \gg = \\ &= \langle \rho(\xi), Ad_{g^{-1}} \sigma \rangle = \\ &= \langle Ad_g^* \rho(\xi), \sigma \rangle \quad \forall g \in G, \xi, \sigma \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Avremo che per ogni  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ , se  $\xi = \rho^{-1}(\mu)$ , risulta

$$\begin{aligned} G_\xi &= \{g \in G \mid Ad_g \xi = \xi\} = \\ &= \{g \in G \mid \rho(Ad_g \xi) = \rho(\xi)\} = \\ &= \{g \in G \mid Ad_g^* \mu = \mu\} = G_\mu, \end{aligned}$$

e quindi anche le rispettive algebre sono uguali. □

**Lemma 4.2.2.** *Sia  $G$  un gruppo compatto, allora tutte le sottoalgebre abeliane massimali  $\mathfrak{t}$  di  $\mathfrak{g}$  sono coniugate, cioè per ogni coppia di sottoalgebre abeliane massimali  $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}'$  esiste  $g \in G$  tale che  $Ad_g \mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$ .*

<sup>1</sup>Tale prodotto interno esiste per ogni gruppo compatto, basta fare una media opportuna di un prodotto interno arbitrario.

**Proposizione 4.2.3.** *Se  $G$  è un gruppo di Lie allora  $\mathfrak{g}_{reg}^*$  è aperto e denso in  $\mathfrak{g}$ ; inoltre per ogni  $\mu \in \mathfrak{g}_{reg}^*$  l'algebra  $\mathfrak{g}_\mu$  è abeliana.*

Per la dimostrazione del lemma si veda [7] mentre per la proposizione si veda [9].

**Corollario 4.2.4.** *Se  $G$  è un gruppo connesso e compatto, le sottoalgebre abeliane massimali di  $\mathfrak{g}$  sono tutte e sole quelle della forma  $\mathfrak{g}_\mu$ , per  $\mu \in \mathfrak{g}_{reg}^*$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\mu$  è un elemento di  $\mathfrak{g}_{reg}^*$  allora la proposizione 4.2.3 dice che  $\mathfrak{g}_\mu$  è abeliana.  $\mathfrak{g}_\mu$  è massimale poiché lo è  $\mathfrak{g}_{\rho(\mu)}$ ; infatti se  $\xi \in \mathfrak{g}$  è tale che  $[\xi, \mathfrak{g}_{\rho(\mu)}] = 0$ , allora  $[\xi, \rho(\mu)] = 0$  cioè  $\xi$  appartiene a  $\mathfrak{g}_{\rho(\mu)}$ . Viceversa se  $\mathfrak{t}$  è una sottoalgebra abeliana massimale allora per un  $\mu' \in \mathfrak{g}_{reg}^*$  esiste  $g \in G$  tale che  $\mathfrak{t} = Ad_g \mathfrak{g}_{\mu'}$ . Vediamo che

$$\begin{aligned} Ad_g \mathfrak{g}_{\mu'} &= \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \langle \mu', [Ad_{g^{-1}}^* \xi, \cdot] \rangle = 0\} = \\ &= \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \langle \mu', Ad_{g^{-1}} [\xi, \cdot] \rangle = 0\} = \\ &= \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \langle Ad_g^* \mu', [\xi, \cdot] \rangle = 0\} = \\ &= \mathfrak{g}_{Ad_g^* \mu'} \end{aligned}$$

e quindi  $\mathfrak{t} = Ad_g \mathfrak{g}_{\mu'} = \mathfrak{g}_{Ad_g^* \mu'}$ . □

Da ora in poi assumiamo che il gruppo  $G$  sia compatto e connesso e seguiamo [4].

Data una sottoalgebra abeliana massimale  $\mathfrak{t}$  di  $\mathfrak{g}$ , denotiamo

$$\mathfrak{t}^\perp := [\mathfrak{t}, \mathfrak{g}] = \{[\xi, \eta] \mid \xi \in \mathfrak{t}, \eta \in \mathfrak{g}\}.$$

Ricordiamo che l'annichilatore di un sottospazio  $U$  in uno spazio vettoriale  $V$  è

$$Ann(U) = \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \forall u \in U\}.$$

**Definizione 4.2.5.** *Se  $\mathfrak{t}$  è una sottoalgebra abeliana massimale di  $\mathfrak{g}$  definiamo*

$$\widehat{\mathfrak{t}} = Ann(\mathfrak{t}^\perp) \quad e \quad \widehat{\mathfrak{t}}^\perp = Ann(\mathfrak{t}).$$

**Proposizione 4.2.6.** *Se  $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_\mu$  per un  $\mu \in \mathfrak{g}_{reg}^*$ , allora*

$$\widehat{\mathfrak{t}} = \{\eta \in \mathfrak{g}^* \mid \mathfrak{g}_\eta = \mathfrak{t}\}.$$

*Dimostrazione.* Sappiamo che per ogni  $\eta \in \mathfrak{g}_{reg}^*$

$$\mathfrak{g}_\eta = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \xi_{\mathfrak{g}^*}(\eta) = 0\} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \langle \eta, [\xi, \cdot] \rangle = 0\}.$$

Quindi  $\mathfrak{t}$  è contenuto in  $\mathfrak{g}_\eta$  se e solo se

$$\langle \eta, [\xi, \sigma] \rangle = 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{t}, \sigma \in \mathfrak{g},$$

cioè se  $\langle \eta, [\mathfrak{t}, \mathfrak{g}] \rangle = 0$ , ovvero se  $\eta$  appartiene a  $\text{Ann}([\mathfrak{t}, \mathfrak{g}]) = \widehat{\mathfrak{t}}$ .

Essendo  $\mathfrak{t}$  una sottoalgebra massimale abbiamo che

$$\eta \in \widehat{\mathfrak{t}} \iff \mathfrak{g}_\eta = \mathfrak{t}.$$

□

**Definizione 4.2.7.** Sia  $\mathfrak{t}$  una sottoalgebra abeliana massimale di  $\mathfrak{g}$ ; dato  $\xi \in \mathfrak{g}$  (risp.  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ ), la camera di Weyl  $\mathcal{W}_\xi$  in  $\mathfrak{g}$  (risp.  $\mathcal{W}_\mu$  in  $\mathfrak{g}^*$ ) è la componente connessa contenente  $\xi$  (risp.  $\mu$ ) di  $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}$  (risp.  $\widehat{\mathfrak{t}} \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ ).

**Osservazione 4.2.8.**

1. Essendo  $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$  un insieme aperto di  $\mathfrak{g}^*$ , se  $\mathfrak{t}$  è una sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$ , la camera di Weyl di ogni punto di  $\widehat{\mathfrak{t}}$  è un aperto di  $\widehat{\mathfrak{t}}$ .
2. Dalla dimostrazione della proposizione precedente abbiamo che per ogni due punti  $w_1, w_2$  di  $\mathcal{W}_\mu$ ,  $\mathfrak{g}_{w_1} = \mathfrak{g}_{w_2}$ .

Illustreremo due esempi di camere di Weyl nel prossimo capitolo.

### 4.3 Decomposizione di $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$

Come spiegheremo qui, per ogni punto  $\mu$  di  $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$  la camera di Weyl  $\mathcal{W}_\mu$  e l'orbita coaggiunta  $\mathcal{O}_\mu$  si intersecano solo in  $\mu$ , i loro spazi tangenti sono complementari in  $T_\mu \mathfrak{g}^*$  ed esiste un diffeomorfismo

$$\gamma : \mathcal{O}_\mu \times \mathcal{W}_\mu \longrightarrow \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*.$$

**Lemma 4.3.1.** Se  $\mathfrak{t}$  è una sottoalgebra abeliana massimale di  $\mathfrak{g}$  allora

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}^\perp.$$

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_\mu$  per qualche  $\mu \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ ; allora  $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_\xi$  con  $\xi = \rho^{-1}(\mu) \in \mathfrak{g}$  per il lemma 4.2.1.

Essendo  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie, per ogni  $\sigma$  possiamo definire un endomorfismo attraverso le parentesi di Lie:

$$\begin{aligned} ad_\sigma : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ \tau &\longmapsto [\sigma, \tau]. \end{aligned}$$

Notiamo che grazie alla proposizione 1.2.1

$$\mathfrak{g}_\xi = \{\sigma \in \mathfrak{g} \mid \sigma_{\mathfrak{g}}(\xi) = 0\} = \{\sigma \in \mathfrak{g} \mid [\sigma, \xi] = 0\} = \ker(ad_\xi).$$

L'immagine di  $ad_\xi$  è  $[\xi, \mathfrak{g}]$ , quindi possiamo scomporre  $\mathfrak{g}$  nell'unione disgiunta di  $\mathfrak{t}$  e  $[\xi, \mathfrak{g}]$ .

Per concludere la dimostrazione dobbiamo provare che  $[\xi, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{t}, \mathfrak{g}]$ , cioè che vale l'inclusione  $[\mathfrak{t}, \mathfrak{g}] \subseteq [\xi, \mathfrak{g}]$  dato che l'altra è ovvia.

Se  $\sigma \in \mathfrak{t}$ , avremo che

$$[\sigma, \mathfrak{g}] = [\sigma, \mathfrak{t} \oplus [\xi, \mathfrak{g}]] \subseteq [\sigma, \mathfrak{t}] + [\sigma, [\xi, \mathfrak{g}]] = [\sigma, [\xi, \mathfrak{g}]],$$

possiamo quindi scrivere un qualsiasi elemento di  $[\sigma, \mathfrak{g}]$  come  $[\sigma, [\xi, \tau]]$  per  $\tau \in \mathfrak{g}$ . Dall'identità di Jacobi ricaviamo che

$$[\sigma, [\xi, \tau]] = -[\tau, [\sigma, \xi]] - [\xi, [\tau, \sigma]] = [\xi, [\sigma, \tau]] \in [\xi, \mathfrak{g}]$$

ovvero che  $[\sigma, \mathfrak{g}] \subseteq [\xi, \mathfrak{g}]$ .

□

Ricordiamo che, se  $V$  è uno spazio vettoriale e  $U, W$  sono due suoi sottospazi, allora

$$V = U \oplus W \iff V^* = \text{Ann}(U) \oplus \text{Ann}(W)$$

e in questo caso  $\dim(W) = \dim(\text{Ann}(U))$ .

**Proposizione 4.3.2.** *Sia  $\mathfrak{t}$  una sottoalgebra massimale abeliana di  $\mathfrak{g}$  e  $\mu$  un punto regolare di  $\widehat{\mathfrak{t}} \subset \mathfrak{g}^*$ . Identificando lo spazio tangente  $T_\mu \mathcal{O}_\mu$  dell'orbita coaggiunta con un sottospazio di  $\mathfrak{g}^*$ , c'è un isomorfismo di spazi vettoriali*

$$\widehat{\mathfrak{t}}^\perp \cong T_\mu \mathcal{O}_\mu.$$

*Dimostrazione.* Prendiamo la mappa

$$\begin{aligned} ad_\mu^* : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \xi &\longmapsto \langle \mu, [\xi, \cdot] \rangle; \end{aligned}$$

notiamo che il nucleo è  $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_\mu$  e l'immagine non è altro che

$$\{\langle \mu, [\xi, \cdot] \rangle \mid \xi \in \mathfrak{g}\} = \{-\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) \mid \xi \in \mathfrak{g}\} = T_\mu \mathcal{O}_\mu.$$

Quindi avremo che

$$\dim(T_\mu \mathcal{O}_\mu) = \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{t}) = \dim(\mathfrak{t}^\perp) = \dim(\widehat{\mathfrak{t}}^\perp)$$

e basterà provare che  $T_\mu \mathcal{O}_\mu \subset \widehat{\mathfrak{t}}^\perp$ .

Sia  $\eta \in T_\mu \mathcal{O}_\mu$ , allora esiste  $\xi \in \mathfrak{g}$  tale che  $ad_\mu^*(\xi) = \eta$ ; per ogni  $\tau \in \mathfrak{t}$  abbiamo che

$$\langle \eta, \tau \rangle = \langle \mu, [\xi, \tau] \rangle = -\langle \mu, [\tau, \xi] \rangle = ad_\mu^*(\tau)(\xi) = 0.$$

Pertanto  $\eta \in Ann(\mathfrak{t}) = \widehat{\mathfrak{t}}^\perp$ . □

**Proposizione 4.3.3.** *Sia  $\mu \in \mathfrak{g}_{reg}^*$ , allora  $T_\mu \mathfrak{g}^* = T_\mu \mathcal{W}_\mu \oplus T_\mu \mathcal{O}_\mu$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_\mu$ ,  $\mathcal{W}_\mu$  è aperto in  $\widehat{\mathfrak{t}}$  quindi  $T_\mu \mathcal{W}_\mu \cong \widehat{\mathfrak{t}}$ . Dalla proposizione precedente sappiamo che  $\widehat{\mathfrak{t}}^\perp \cong T_\mu \mathcal{O}_\mu$ ; quindi otteniamo che

$$T_\mu \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^* = \widehat{\mathfrak{t}} \oplus \widehat{\mathfrak{t}}^\perp \cong T_\mu \mathcal{W}_\mu \oplus T_\mu \mathcal{O}_\mu.$$

□

**Proposizione 4.3.4.** *Dato  $\mu \in \mathfrak{g}_{reg}^*$ , la sua camera di Weyl e la sua orbita coaggiunta si intersecano solo in  $\mu$ :*

$$\mathcal{W}_\mu \cap \mathcal{O}_\mu = \mu.$$

Per la dimostrazione si veda il teorema di Weyl [7].

**Proposizione 4.3.5.** *Per ogni  $\mu \in \mathfrak{g}_{reg}^*$   $\mathfrak{g}_{reg}^*$  è diffeomorfo a  $\mathcal{W}_\mu \times \mathcal{O}_\mu$ .*

*Dimostrazione.* Qui daremo solo un'idea di come costruire un diffeomorfismo, per verificare che è tale si veda [4].

Sia  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  e  $G_\mu$  il suo gruppo di isotropia rispetto all'azione coaggiunta. Dalla proposizione 1.1.2 sappiamo che per ogni  $g \in G$  esiste un diffeomorfismo  $\psi_\mu : G/G_\mu \rightarrow \mathcal{O}_\mu$ .

Prendiamo un elemento  $(\eta, w) \in \mathcal{O}_\mu \times \mathcal{W}_\mu$ ; applicando l'inversa di  $\psi_\mu$  a  $\eta = Ad_g^* \mu$  otteniamo un punto  $[g] \in G/G_\mu$ .

Essendo  $G$  compatto, lo sono anche  $G_\mu$  e  $G_w$  e inoltre la mappa esponenziale è suriettiva; sappiamo che  $\mathfrak{g}_\mu = \mathfrak{g}_w$ , allora  $G_\mu = G_w$ .

Abbiamo pertanto che  $[g] \in G/G_w$  e possiamo applicare la mappa  $\psi_w$ .

Riassumendo abbiamo costruito una mappa differenziabile  $\gamma : \mathcal{O}_\mu \times \mathcal{W}_\mu \rightarrow \mathfrak{g}^*$ :

$$\gamma(\eta, w) := \psi_w(\psi_\mu^{-1}(\eta)) \quad \forall \eta \in \mathcal{O}_\mu, w \in \mathcal{W}_\mu.$$

Si può mostrare che  $\gamma(\mathcal{O}_\mu \times \mathcal{W}_\mu) = \mathfrak{g}_{reg}^*$  ed è di fatto un diffeomorfismo. □

Possiamo scrivere ogni punto di  $\mathfrak{g}_{reg}^*$  in coordinate  $(\eta, w)$  dove  $\eta$  appartiene all'orbita coaggiunta di  $\mu$  e  $w$  appartiene alla camera di Weyl di  $\mu$ .

Fissato un elemento  $\mu \in \mathfrak{g}_{reg}^*$ , indichiamo con  $\pi_{\mathcal{O}_\mu}$  e  $\pi_{\mathcal{W}_\mu}$  le proiezioni rispettivamente su  $\mathcal{O}_\mu$  e su  $\mathcal{W}_\mu$ .

Essendo questi due insiemi connessi, le fibre di  $\pi_{\mathcal{O}_\mu}$  sono camere di Weyl mentre le fibre di  $\pi_{\mathcal{W}_\mu}$  sono orbite coaggiunte.

## 4.4 La fibrazione coisotropa come mappa momento

Tornando al problema posto all'inizio del capitolo abbiamo ottenuto la seguente

**Proposizione 4.4.1.** *Nelle ipotesi della proposizione 4.1.1 fissiamo  $\mu \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$  e definiamo la mappa  $j_\mu := \pi_{\mathcal{W}_\mu} \circ \mathbb{J}$ . Allora esiste un diffeomorfismo*

$$P/G \xrightarrow{\psi} A_\mu := j_\mu(P) \subseteq \mathcal{W}_\mu.$$

*Dimostrazione.* La proiezione  $\pi_{\mathcal{W}_\mu}$  è esattamente la mappa quoziente da  $\mathbb{J}(P)$  rispetto alle orbite coaggiunte. Di conseguenza la bifoliazione della proposizione 4.1.1 è equivalente a

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \mathbb{J} \swarrow & & \searrow j_\mu \\ \mathbb{J}(P) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{W}_\mu}} & A_\mu. \end{array}$$

□

**Osservazione 4.4.2.**

1. Si può dimostrare [12] che per ogni  $p \in P$  il rango di  $T_p\mathbb{J}$  è uguale alla dimensione di  $\mathcal{O}_p$ . Come conseguenza abbiamo che  $\mathbb{J}$  è una immersione se e solo se  $\dim(\mathcal{O}_p) = \dim(G)$ , cioè se il gruppo di isotropia  $G_p$  è discreto. Questo equivale a dire che l'azione è **localmente libera**: per ogni  $g \in G$  esiste un intorno  $U$  di  $g$  tale che  $U \cap G_p$  è costituito da un solo elemento.
2. Se assumiamo che la mappa momento  $\mathbb{J}$  sia una fibrazione, allora le sue fibre sono sottovarietà connesse ed inoltre anche  $j$  è una fibrazione. Con questa ipotesi abbiamo che se le fibre sono isotrope, allora  $A \xleftarrow{j} P \xrightarrow{\mathbb{J}} B$  è una bifibrazione di  $P$ .

Si vuole ora vedere  $j_\mu$  come una mappa momento di un'azione fortemente Hamiltoniana di  $G_\mu$  su  $P$ .

**Lemma 4.4.3.** *Per ogni  $\eta \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ ,  $G_\mu$  è un toro massimale di  $G$ .*

*Dimostrazione.*  $G$  è compatto quindi lo è anche  $G_\mu$  e la mappa esponenziale è suriettiva. Anche la restrizione  $\exp|_{\mathfrak{g}_\mu}$  è suriettiva su  $\exp(\mathfrak{g}_\mu) = G_\mu$ . Essendo  $\mathfrak{g}_\mu$  una sottoalgebra abeliana allora lo è anche  $G_\mu$ . Concludiamo quindi che  $G_\mu$  è un toro massimale di  $G$ .  $\square$

Fissiamo  $\mu \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$  e definiamo  $\pi_\mu := \pi_{\mathcal{O}_\mu} \circ \mathbb{J}$ .

**Lemma 4.4.4.** *Per ogni  $\mu \in \mathcal{O}_\mu$  ogni insieme di livello  $\pi_\mu^{-1}(\eta)$  è invariante per l'azione del toro  $G_\eta$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $\eta \in \mathcal{O}_\mu$ ,  $g \in G_\eta$  e  $p \in P$  tale che  $\pi_\mu(p) = \eta$ . Allora

$$\pi_\mu(g \cdot p) = \pi_{\mathcal{O}_\mu} \circ \mathbb{J}(g \cdot p) = \pi_{\mathcal{O}_\mu} \circ \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mathbb{J}(p) = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\pi_{\mathcal{O}_\mu} \circ \mathbb{J}(p)) = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \eta = \eta.$$

$\square$

Vogliamo unire le azioni su ciascuna fibra di  $\pi_\mu$  per ottenere un'azione globale di  $G_\mu$  su  $P$ .

Per ogni  $p \in P$  esiste  $h = h_\mu(p) \in G$  tale che  $\pi_\mu(p) = \text{Ad}_h^* \mu$ . Definiamo l'azione  $\psi$  di  $G_\mu$  su  $P$ :

$$\begin{aligned} \psi : G_\mu \times P &\longrightarrow P \\ (t, p) &\longmapsto (h_\mu(p) t h_\mu^{-1}(p)) \cdot p. \end{aligned}$$

Notiamo che  $\psi$  è ben definita; infatti se  $\text{Ad}_h^* \mu = \text{Ad}_{h'}^* \mu$  allora esiste  $t' \in G_\mu$  tale che  $h' = ht'$ . Abbiamo dunque che

$$h'th'^{-1} = (ht')t(t'^{-1}h^{-1}) = hth^{-1}$$

poiché  $G_\mu$  è abeliano.

**Lemma 4.4.5.** *Fissiamo  $\mu \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ ; le fibre di  $\pi_\mu$  sono invarianti per l'azione  $\psi$  di  $G_\mu$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $t \in G_\mu$ ,  $p \in \pi_\mu^{-1}(\eta)$  per  $\eta \in \mathcal{O}_\mu$  e  $h = h_\mu(p)$ . Allora

$$\pi_\mu(\psi(t, p)) = \pi_\mu((hth^{-1}) \cdot p) = \text{Ad}_{ht^{-1}h^{-1}}^* \pi_\mu(p) = \text{Ad}_{ht^{-1}}^* \mu = \text{Ad}_h^* \mu = \pi_\mu(p).$$

$\square$

È facile verificare che  $\psi$  sia effettivamente un'azione, infatti è differenziabile in  $P$  e

$$\psi(e_G, p) = p \quad \text{e} \quad \psi(t', \psi(t, p)) = (ht'h^{-1})(hth^{-1}) \cdot p = \psi(t't, p)$$

per ogni  $p \in P$ ,  $t, t' \in G_\mu$ .

**Proposizione 4.4.6.** *L'azione  $\psi$  sopra descritta di  $G_\mu$  su  $P$  è fortemente Hamiltoniana e  $j_\mu = \pi_{\mathcal{O}_\mu} \circ \mathbb{J}$  ne è la mappa momento.*

*Dimostrazione.* Fissiamo  $p \in P$ ,  $\mu = \mathbb{J}(p)$  e  $h = h_\mu(p) \in G$ ; indichiamo con  $\mathfrak{J}$  la mappa  $j_\mu = \pi_{\mathcal{O}_\mu} \circ \mathbb{J}$  e con  $j_\xi$  la funzione tale che  $j_\xi(x) = \langle \mathfrak{J}(x), \xi \rangle$  per ogni  $x \in P$  e  $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$ .

Notiamo che  $j$  è  $G$ -invariante:

$$j(g \cdot p) = \pi_{\mathcal{W}_\mu} Ad_{g^{-1}}^* \mathbb{J}(p) = j(p) \quad \forall g \in G,$$

ed è quindi anche  $G_\mu$ -invariante. Facciamo vedere che per ogni  $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$   $dj_\xi = dJ_{Ad_h \xi}$  e quindi

$$X_{j_\xi}(p) = X_{J_{Ad_h \xi}}(p) = (Ad_h \xi)_P(p) = \xi_P^{G_\mu}(p),$$

dove  $\xi_P^{G_\mu}$  è il generatore infinitesimo dell'azione di  $G_\mu$ .

Per ogni  $p' \in \pi^{-1}(\mu)$  abbiamo che  $Ad_{h^{-1}}^* \mathbb{J}(p') \in \mathcal{W}_\mu$ , quindi per ogni  $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$

$$\begin{aligned} j_\xi(p') &= \langle \mathfrak{J}(p'), \xi \rangle = \langle Ad_{h^{-1}}^* \mathbb{J}(p'), \xi \rangle = \\ &= \langle \mathbb{J}(p'), Ad_h \xi \rangle = \mathbb{J}_{Ad_h \xi}(p'). \end{aligned}$$

Abbiamo dunque che  $dj_\xi$  e  $d\mathbb{J}_{Ad_h \xi}$  coincidono in  $\pi^{-1}(\mu)$ . Con un po' di conti si vede che entrambi si annullano sullo spazio tangente dell'orbita di  $p$  [4]. Sapendo che  $\pi^{-1}(\mu)$  e  $T_p \mathcal{O}_p$  sono complementari in  $P$ , vale l'uguaglianza

$$dj_\xi = dJ_{Ad_h \xi} \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}_\mu$$

su tutto  $TP$ .

Questo dimostra che l'azione è Hamiltoniana; per dimostrare che è fortemente Hamiltoniana basta vedere che  $j_\mu$  è equivariante. Infatti

$$j(g \cdot p) = \pi_{\mathcal{W}}(Ad_{g^{-1}}^* \mathbb{J}(p)) = j(p) \quad \forall g \in G_\eta,$$

dato che  $G_\mu$  è abeliano e quindi  $Ad_{g^{-1}}^* = id$ . □

**Osservazione 4.4.7.**

- *Le fibre della mappa momento  $\mathbb{J}$  sono le orbite dell'azione di  $G_\mu$ , quindi i petali dei fiori hanno dimensione minore o uguale al rango di  $G$ .*
- *Le coordinate azione (a) del teorema di Mischenko-Fomenko sono le componenti della mappa momento di un'azione torica. Questo era già noto nel caso non degenere, per esempio si veda [5].*
- *Se  $P$  è una varietà compatta, per il teorema della convessità,  $A = j(P)$  è un politopo convesso in una camera di Weyl.*

## 4.5 Condizioni gruppali per l'isotropia

Il teorema di Mischenko-Fomenko pone come condizioni per la superintegrabilità l'esistenza di una bifoliazione con fibre isotrope e compatte. Vediamo qualche condizione equivalente all'isotropia delle fibre della mappa momento  $\mathbb{J}$ .

**Proposizione 4.5.1.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie compatto e connesso che agisce in modo fortemente Hamiltoniano su  $P$ . Supponiamo che  $\mathbb{J}(P) \subseteq \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ . Se  $p \in P$  e  $\mu \in \mathbb{J}(P)$ ,  $G_p$  è il gruppo di isotropia di  $p$  per l'azione e  $G_\mu$  è il gruppo di isotropia per l'azione coaggiunta. Supponiamo che per ogni  $\mu \in \mathbb{J}(P)$ ,  $\mathbb{J}^{-1}(\mu)$  sia una sottovarietà di  $P$ . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- i)  $\mathbb{J}^{-1}(\mu)$  è isotropa  $\quad \forall \mu \in \mathbb{J}(P)$ ;*
- ii)  $\mathbb{J}^{-1}(\mu) = G_\mu \cdot p \quad \forall \mu \in \mathbb{J}(P), p \in \mathbb{J}^{-1}(\mu)$ ;*
- iii)  $\dim(P) = \dim(G) + \dim(G_\mu) - 2 \dim(G_p) \quad \forall \mu \in \mathbb{J}(P), p \in \mathbb{J}^{-1}(\mu)$ ;*
- iv)  $\dim(P) = \dim(\mathbb{J}(P)) + \dim(P/G)$ .*

*Dimostrazione.*

*i*  $\Leftrightarrow$  *ii*) Usando la proposizione 3.2.2 sappiamo che  $\mathbb{J}^{-1}(\mu)$  è isotropa se è contenuta in  $\mathcal{O}_p$ . Se per ogni  $q \in \mathbb{J}^{-1}(\mu)$  esiste  $g \in G$  tale che  $q = g \cdot p$ , allora

$$\mu = \mathbb{J}(q) = \mathbb{J}(g \cdot p) = g \cdot \mathbb{J}(p) = g \cdot \mu,$$

per l'equivarianza della mappa momento. In altre parole  $g$  appartiene al gruppo di isotropia di  $\mu$ . Deduciamo quindi che avremo l'isotropia se e solo se

$$\mathbb{J}^{-1}(\mu) = G_\mu \cdot p.$$

*ii*  $\Leftrightarrow$  *iii*) Osserviamo che

$$\mathbb{J}(q) = \tilde{g} \cdot \mathbb{J}(p) = \tilde{g} \cdot \mu = \mu \quad \forall q = \tilde{g} \cdot p \in G_\mu \cdot p,$$

quindi  $G_\mu \cdot p \subseteq \mathbb{J}^{-1}(\mu)$ .

Ne deduciamo che  $T_p(G_\mu \cdot p)$  è un sottospazio di  $T_p(\mathbb{J}^{-1}(\mu))$  e coincideranno se avranno uguale dimensione, cioè se

$$\dim(\mathbb{J}^{-1}(\mu)) = \dim(G_\mu \cdot p) = \dim(G_\mu) - \dim(G_p).$$

Dalla proposizione 3.2.2 abbiamo che

$$\dim(\mathbb{J}^{-1}(\mu)) = \dim(P) - \dim(\mathcal{O}_p) = \dim(P) - \dim(G) + \dim(G_p);$$

allora otteniamo che  $\mathbb{J}^{-1}(\mu)$  è isotropo se e solo se

$$\dim(P) = \dim(G) + \dim(G_\mu) - 2 \dim(G_p).$$

*i*  $\Leftrightarrow$  *iv*) Dalla proposizione 3.2.6 sappiamo che esiste una struttura di Poisson su  $\mathbb{J}(P) \subseteq \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$  tale che la mappa momento sia un morfismo di Poisson e il rango di  $\mathbb{J}(P)$  in un punto  $\mu$  è uguale a  $\dim(\mathcal{O}_\mu)$ . Dalla proposizione 3.2.7 abbiamo che gli insiemi di livello di  $\mathbb{J}$  sono isotropi se e solo se il rango della struttura di Poisson di  $B$  equivale a  $2 \dim(B) - \dim(P)$ . Ricordando che le orbite  $\mathcal{O}_\mu$  sono le fibre di  $\pi_{\mathcal{W}}$ , la condizione diventa equivalente a dire che

$$\begin{aligned} \dim(P) &= 2 \dim(\mathbb{J}(P)) - \dim(\mathcal{O}_\mu) = \\ &= 2 \dim(\mathbb{J}(P)) - (\dim(\mathbb{J}(P)) - \dim(P/G)) = \\ &= \dim(\mathbb{J}(P)) + \dim(P/G). \end{aligned}$$

□

#### Osservazione 4.5.2.

1. Nelle condizioni della proposizione 4.1.1 le foglie isotrope sono date dalle  $G_\mu$ -orbite mentre quelle coisotrope sono date dalle  $G$ -orbite.
2. Un sistema superintegrabile si dice anche integrabile nel senso non commutativo, la ragione sta nel fatto che se prendiamo un'azione di un gruppo abeliano ci riconduciamo automaticamente al caso del teorema di Liouville. Infatti se  $G$  è abeliano allora per ogni  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  avremo che  $G = G_\mu$ , quindi avremo che  $\mathbb{J} = j$  e le fibre saranno lagrangiane.
3. Le coordinate locali date dal teorema di Mischenko-Fomenko possono essere utilizzate come coordinate di  $B$  e di  $A$ . Infatti se le coordinate angolo che costituiscono i tori massimali descrivono le fibre della mappa momento,  $(a, p, q)$  sono integrali primi della fibrazione e si possono usare come coordinate in  $B$  dove  $(p, q)$  indicheranno le foglie simplettiche della struttura di Poisson che ne deriva. Infine le coordinate azione  $(a)$ , essendo quelle trasversali alle fibre di  $j$ , sono coordinate locali di  $A$ .

4. Abbiamo visto che da un'azione del gruppo  $G$  possiamo dare delle condizioni affinché il sistema su cui agisce  $G$  sia superintegrabile. Una questione interessante sarebbe il problema inverso, cioè trovare una simmetria in un sistema superintegrabile. Data una varietà con una fibrazione completamente integrabile, con fibre compatte e isotrope, riuscire a trovare un'azione di gruppo fortemente Hamiltoniana tale che la mappa momento che ne deriva sia esattamente tale fibrazione.

Possiamo quindi enunciare un teorema che collega la simmetria di un sistema alla sua integrabilità.

**Teorema 4.5.3.** *Sia  $\mathbb{J}$  una mappa momento di un'azione fortemente Hamiltoniana di un gruppo di Lie compatto e connesso. Supponiamo che*

1.  $\mathbb{J}(P) \subseteq \mathfrak{g}_{reg}^*$  e  $\mathbb{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}_{reg}^*$  sia una sommersione con foglie connesse;
2. sia soddisfatta una delle condizioni della proposizione 4.5.1.

Allora

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 \mathbb{J} \swarrow & & \searrow c \\
 \mathbb{J}(P) & \xrightarrow{s} & P/G
 \end{array}$$

è una bifibrazione con fibre compatte.

*Dimostrazione.* Dalla proposizione 4.5.1 sappiamo che i petali, cioè gli insiemi di livello di  $\mathbb{J}$  sono orbite di tori massimali e sono quindi compatti. Sappiamo dalla proposizione 4.1.1 che su  $P$  la foliazione isotropa data da  $\mathbb{J}$  ha una foliazione polare (coisotropa) data dalle orbite. Inoltre  $\mathbb{J}$  è una sommersione con fibre compatte e connesse ed è quindi una fibrazione per il teorema di Ehresmann (vedi [2]).  $\square$

# Capitolo 5

## Esempi

### 5.1 Punto in campo centrale

Consideriamo un sistema in un campo di forze centrali, dunque invariante per rotazioni nello spazio.

Analizziamo pertanto il gruppo di Lie  $SO(3)$  calcolando la sua algebra di Lie, il duale e le rispettive azioni aggiunte e coaggiunte. Di quest'ultima vediamo cosa sono le orbite, il gruppo di isotropia e la sua algebra. Consideriamo poi le camere di Weyl nell'algebra di Lie e nel suo duale, così da poter scomporre  $\mathfrak{so}^*(3)$  in un prodotto di un'orbita coaggiunta e una camera di Weyl.

Solleghiamo poi l'azione di  $SO(3)$  al fibrato cotangente  $T^*\mathbb{R}^3$ . L'azione è fortemente Hamiltoniana e la mappa momento non è altro che il prodotto vettoriale tra le coordinate posizione e momento.

Azione aggiunta:

In  $SO(3)$  consideriamo l'azione di coniugio del gruppo in se stesso data da

$$\begin{aligned} C_A : SO(3) &\longrightarrow SO(3) \\ B &\longmapsto ABA^{-1} \end{aligned}$$

per  $A, B \in SO(3)$ .

Ricordiamo che esiste un isomorfismo  $\sim$  tra l'algebra delle matrici antisimmetriche  $\mathfrak{so}(3)$  e  $\mathbb{R}^3$  tale che  $vq = \tilde{v} \times q$ , per ogni vettore  $q \in \mathbb{R}^3$ . Definiamo ora l'azione aggiunta di  $SO(3)$  in  $\mathfrak{so}(3)$  come la mappa tangente all'azione di coniugio calcolata nell'identità:

$$Ad_A(v) := \frac{d}{dt} (\varphi_A(B(t)))|_{t=0}$$

dove  $B(t)$  è un qualunque cammino in  $SO(3)$  tale che  $B(0) = I_3$  e  $\dot{B}(0) = v$ .  
Abbiamo quindi che

$$Ad_A(v) := \frac{d}{dt} (AB(t)A^{-1})|_{t=0} = A\dot{B}(0)A^{-1} = AvA^{-1}.$$

E se moltiplichiamo la matrice ottenuta per un vettore  $\tilde{w} \in \mathbb{R}^3$ :

$$(AvA^{-1})\tilde{w} = A(v(A^{-1}\tilde{w})) = A(\tilde{v} \times A^{-1}\tilde{w}) = A\tilde{v} \times \tilde{w}.$$

Possiamo definire quindi l'azione aggiunta in  $\mathbb{R}^3$  come una mappa  $\widetilde{Ad} : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$\widetilde{Ad}_A(\tilde{v}) = A\tilde{v} \quad \forall v \in \mathfrak{so}(3), A \in SO(3).$$

Azione coaggiunta:

Possiamo identificare anche il duale dell'algebra di Lie di  $SO(3)$  con  $\mathbb{R}^3$ . Ad ogni  $\mu \in \mathfrak{so}^*(3)$  possiamo associare un vettore  $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}^3$  tale che  $\langle \mu, v \rangle = \langle \tilde{\mu}, \tilde{v} \rangle$  per ogni  $v \in \mathfrak{so}(3)$ .

L'azione coaggiunta di  $A \in SO(3)$  in  $\mu \in \mathfrak{so}^*(3)$  è data da

$$\langle Ad_A^*(\mu), v \rangle := \langle \mu, Ad_{A^{-1}}(v) \rangle \quad \forall A \in SO(3), v \in \mathfrak{so}(3), \mu \in \mathfrak{so}^*(3).$$

Passando in  $\mathbb{R}^3$  abbiamo che l'azione diventa:

$$\langle \widetilde{Ad}_A^*(\mu), \tilde{v} \rangle = \langle \tilde{\mu}, (A^{-1}\tilde{v}) \rangle = \tilde{\mu}^T A^{-1}\tilde{v} = (A\tilde{\mu})^T \tilde{v} = \langle A\tilde{\mu}, \tilde{v} \rangle$$

e otteniamo che

$$\left( \widetilde{Ad}_A^*(\mu) \right) = A\tilde{\mu}.$$

Calcoliamo ora il gruppo di isotropia di un elemento  $\mu \in \mathfrak{so}^*(3)$  sotto l'azione di  $SO(3)$ .

Per  $\mu = 0$  abbiamo che  $Ad_A^*(0) = 0$  per ogni matrice  $A$ , quindi il gruppo di isotropia di 0 è tutto  $SO(3)$ .

Per  $\mu \neq 0$  vediamo che  $Ad_A^*(\mu) = \mu$  se e solo se  $A$  è una rotazione attorno all'asse dato da  $\tilde{\mu}$ . Quindi il gruppo di isotropia  $SO(3)_\mu$  è diffeomorfo a  $S^1$ .  
Assumiamo da ora che  $\mu \in \mathfrak{so}^*(3)$  sia diverso da 0, in quanto 0 è l'unico punto a non essere regolare.

Generatore infinitesimo:

Fissiamo  $\mu \in \mathfrak{so}^*(3)$ , abbiamo visto che per  $v, w \in \mathfrak{so}(3)$ , il generatore infinitesimo di  $v$  equivale a

$$\langle v_{\mathfrak{so}^*(3)}(\mu), w \rangle = -\langle \mu, [v, w] \rangle.$$

Passando in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\langle \widetilde{(v_{\mathfrak{so}^*(3)}(\mu))}, \tilde{w} \rangle = -\langle \tilde{\mu}, \tilde{v} \times \tilde{w} \rangle = -\langle \tilde{\mu} \times \tilde{v}, \tilde{w} \rangle$$

quindi

$$\widetilde{(v_{\mathfrak{so}^*(3)}(\mu))} = \tilde{v} \times \tilde{\mu}$$

e  $\mathfrak{so}(3)_\mu$  corrisponde a

$$\mathfrak{t} = \{ \tilde{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{v} \times \tilde{\mu} = 0 \} = \{ \lambda \tilde{\mu} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}$$

ovvero alla retta lungo il vettore  $\mu$ .

**Proposizione 5.1.1.**  $\mathfrak{t}$  è una sottoalgebra abeliana massimale di  $\mathfrak{so}(3)$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $\eta, \sigma \in \mathfrak{so}(3)_\mu$  abbiamo che

$$[\widetilde{\eta}, \widetilde{\sigma}] = \tilde{\eta} \times \tilde{\sigma} = 0$$

quindi  $\mathfrak{so}(3)_\mu$  è abeliano come anche  $\mathfrak{t}$ .

Se prendiamo  $\eta$  tale che  $[\mathfrak{t}, \eta] = 0$ , allora abbiamo che  $\tilde{\mu} \times \tilde{\eta} = 0$  e quindi  $\tilde{\eta} = k\tilde{\mu} \in \mathfrak{t}$ ; cioè  $\mathfrak{t}$  è massimale.

Verificando facilmente che  $\mathfrak{t}$  è una sottoalgebra, si conclude la dimostrazione.  $\square$

Indichiamo con  $\alpha$  il piano ortogonale alla retta  $\mathfrak{t}$  in  $\mathbb{R}^3$ . Così abbiamo che  $\mathbb{R}^3 = \mathfrak{t} \oplus \alpha$  e  $\mathbb{R}^3 = \mathfrak{t}^* \oplus \alpha^*$ .

Ricordiamo che una camera di Weyl di un punto nel duale dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}^*$ , è la componente connessa dei punti regolari di  $\hat{\mathfrak{t}}$  che contiene tale punto. Nel nostro caso  $\hat{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}$  e avremo che la camera di Weyl di  $\mu \in \mathfrak{so}^*(3)$  è  $\mathcal{W}_\mu := \{ \lambda \tilde{\mu} \mid \lambda \in \mathbb{R}^> \}$ .

Identificando  $\mathfrak{so}^*(3)$  con  $\mathbb{R}^3$ , abbiamo visto che l'azione coaggiunta di  $SO(3)$  è

$$Ad_A^*(\mu) = A\mu.$$

Le orbite sono quindi le sfere  $\mathcal{O}_\mu = S_{\|\mu\|}^2$ .

Si può notare che  $\mathcal{W}_\mu$  e  $\mathcal{O}_\mu$  hanno spazi tangenti ortogonali in  $\mu$  e si intersecano solo in questo punto.

Possiamo scrivere un elemento  $\eta$  di  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  in coordinate di  $\mathcal{W}_\mu$  e  $\mathcal{O}_\mu$ .

Supponendo  $\|\mu\| = 1$  possiamo definire le due proiezioni canoniche:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{O}} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathcal{O}_\mu & \text{e} & & \pi_{\mathcal{W}} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathcal{W}_\mu \\ \eta &\longmapsto \frac{\tilde{\eta}}{\|\tilde{\eta}\|} & & & \eta &\longmapsto \|\tilde{\eta}\| \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Facciamo ora agire il gruppo  $SO(3)$  su  $\mathbb{R}^3$  tramite la moltiplicazione matrice-vettore:

$$\begin{aligned}\varphi_A : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ q &\longmapsto Aq.\end{aligned}$$

Sollevando l'azione al fibrato cotangente abbiamo che per  $(q, p) \in T_q^*\mathbb{R}^3$

$$T_q^*\varphi_A(q, p) = (Aq, Ap)$$

come visto nel primo capitolo.

Da questa azione si ottiene la mappa momento data da

$$\begin{aligned}\mathbb{J} : \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (q, p) &\longmapsto q \times p.\end{aligned}$$

Abbiamo visto che tutti i punti non nulli di  $\mathbb{R}^3$  sono regolari, andiamo quindi a considerare l'aperto  $\mathbb{J}^{-1}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  di  $\mathbb{R}^6$ . Questa sottovarietà che indicheremo con  $P$  è costituita dalle coppie di vettori  $q$  e  $p$  di  $\mathbb{R}^3$  che non sono allineate. L'immagine  $B = \mathbb{J}(P)$  è  $\mathbb{R}^3 \setminus 0$  mentre  $A = \pi_{\mathcal{W}}(B)$  è costituito dai valori reali strettamente positivi.

Avremo quindi le proiezioni

$$\begin{aligned}\pi := \pi_{\mathcal{O}} \circ \mathbb{J} : P &\longrightarrow S^2 & \text{e} & & j := \pi_{\mathcal{W}} \circ \mathbb{J} : P &\longrightarrow A \\ (q, p) &\longmapsto \frac{q \times p}{\|q \times p\|} & & & (q, p) &\longmapsto \|q \times p\|.\end{aligned}$$

Otteniamo infine il seguente schema:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow \mathbb{J} & \\ \pi & B & j \\ \swarrow \pi_{\mathcal{O}} & & \searrow \pi_{\mathcal{W}} \\ S^2 & & A \end{array}$$

Dal momento che

$$\dim(P) \neq \dim(B) + \dim(A),$$

le mappe  $\mathbb{J}$  e  $j$  non costituiscono una bifibrazione per  $P$ .

In questo caso abbiamo due possibilità.

1. Aggiungiamo un'ulteriore simmetria allargando il gruppo. Per esempio possiamo far agire  $\mathbb{R}$  in modo tale che la mappa momento associata sia la funzione Hamiltoniana; purtroppo  $\mathbb{R}$  non è compatto e quindi dovremmo rivedere tutto dall'inizio. Nei casi (banali) di Keplero e dell'oscillatore armonico il campo vettoriale  $X_H$  ha dinamica periodica e definisce un'azione libera di  $S^1$  che commuta con quella di  $SO(3)$ . Allora avremo che i petali guadagnano una dimensione mentre le foglie simplettiche restano invariate (perché  $S^1$  è abeliano). Questo veramente non è un risultato profondo perché se  $X_H$  ha dinamica periodica servirebbe una bifoliazione con tori 1-dimensionali. Negli altri campi di forza centrale la dinamica non è periodica, ma quasi periodica (teorema di Bertrand).

2. Restringiamo la varietà a  $T^*S^2$  e il conto torna:

$$\dim(T^*S^2) = 4 = \dim(B) + \dim(A).$$

Abbiamo che il fiore è  $SO(3)$  e la mappa  $\pi : SO(3) \rightarrow S^2$  è la fibrazione di Hopf. Anche questo è un risultato abbastanza banale poiché rappresenta il flusso geodetico sulla sfera.

L'azione in questo caso è un sollevamento al fibrato cotangente.

## 5.2 Corpo rigido di Eulero-Poinsot simmetrico

Consideriamo l'esempio del corpo rigido con due momenti principali d'inerzia uguali:  $I_1 = I_2$ . Abbiamo dunque una simmetria per rotazioni nello spazio attorno all'origine e una per rotazioni attorno all'asse  $z$ .

Andiamo ora ad analizzare il gruppo di Lie  $SO(3) \times S^1$  facendolo poi agire sulla trivializzazione a sinistra  $SO(3) \times \mathbb{R}^3$  di  $T^*SO(3)$ .

La sua algebra di Lie  $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{s}^1$  è isomorfa a  $\mathbb{R}^4$  sapendo che  $\mathfrak{s}^1 \cong \mathbb{R}$  e avendo già visto che  $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ . Così avremo anche che il duale  $\mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{s}^{1*}$  sarà isomorfo a  $\mathbb{R}^4$ .

Prendendo  $(A, \theta)$  e  $(B, \varphi)$  in  $SO(3) \times S^1$ , l'azione di coniugio è data da

$$C_{(A,\theta)}(B, \varphi) = (ABA^{-1}, \varphi + \theta - \theta) = (ABA^{-1}, \varphi).$$

Notiamo che nella prima componente avviene la stessa azione dell'esempio precedente mentre la seconda resta immutata per ogni elemento del gruppo. È facile vedere pertanto che l'azione aggiunta su un elemento  $(v, r) \in \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{s}^1$  e quella coaggiunta su  $(\eta, \mu) \in \mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{s}^{1*}$  sono date da

$$Ad_{(A,\theta)}(v, r) = (Av, r) \quad Ad_{(A,\theta)}^*(\eta, \mu) = (A\eta, \mu),$$

ricordando che  $v$  e  $\eta$  sono identificati con vettori di  $\mathbb{R}^3$ .  
Il gruppo di isotropia dell'azione coaggiunta per  $\eta \neq 0$  è

$$\begin{aligned} (SO(3) \times S^1)_{(\eta, \mu)} &= \{(A, \theta) \mid (A\eta, \mu) = (\eta, \mu)\} = \\ &= \{(A, \theta) \mid A \text{ è una rotazione attorno all'asse } \eta\} \cong \\ &\cong S^1 \times S^1, \end{aligned}$$

mentre le orbite coaggunte sono  $\mathcal{O}_{(\eta, \mu)} = (SO(3) \times S^1) \cdot (\eta, \mu) \cong S^2$ , ovvero sfere date dalla rotazione del vettore  $\eta$ .

Riprendendo l'esempio precedente, vediamo che il generatore infinitesimo in questo caso è dato da

$$(v, r)_{\mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{s}^{1*}}(\eta, \mu) = (\eta \times v, 0),$$

quindi  $(\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{s}^1)_{(\eta, \mu)}$  equivale a

$$\mathfrak{t} = \{(v, r) \in \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{s}^1 \mid \eta \times v = 0\} = \{(\lambda\eta, r) \mid \lambda \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}\}.$$

Abbiamo quindi che una camera di Weyl corrisponde a

$$\mathcal{W}_{(\eta, \mu)} = \{(\lambda\eta, r) \mid r \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^>\} \cong \mathbb{R}^> \times \mathbb{R}.$$

Definiamo quindi le mappe di proiezione

$$\pi_{\mathcal{O}}(v, r) = \frac{v}{\|v\|} \in S^2 \quad \text{e} \quad \pi_{\mathcal{W}}(v, r) = (\|v\|, r) \in \mathbb{R}^> \times \mathbb{R}.$$

Facciamo ora agire questo gruppo su  $SO(3) \times \mathbb{R}^3$  attraverso la mappa

$$\begin{aligned} \varphi_{(A, \theta)} : SO(3) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow SO(3) \times \mathbb{R}^3 \\ (R, m) &\longmapsto (ARR_{\theta}, R_{\theta}m) \end{aligned}$$

definita per ogni  $(A, \theta) \in SO(3) \times S^1$ , dove  $R_{\theta}$  è la matrice di rotazione di ampiezza  $\theta$  attorno all'asse  $z$ .

Risulta <sup>1</sup> che la mappa momento dell'azione è data da

$$\mathbb{J}(R, m) = (Rm, m_3).$$

Un punto  $(\eta, \mu)$  è regolare in  $\mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{s}^{1*}$  se  $\eta \neq 0$ . La retroimmagine attraverso  $\mathbb{J}$  di tutti i punti regolari è costituita dai punti  $(R, m) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$  tali che  $Rm \neq 0$ , cioè da

$$P = \{(R, m) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3 \mid m \neq 0\}.$$

---

<sup>1</sup>I calcoli per trovare la mappa momento sono lunghi e complicati; per approfondire rimandiamo a [8].

Avremo quindi che

$$B = \mathbb{J}(P) = \{(\eta, \mu) \in \mathfrak{so}^*(3) \times \mathfrak{s}^{1*} \mid \eta \neq 0\} \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$$

e

$$A = \pi_{\mathcal{W}}(B) = \{(\lambda, r) \in \mathbb{R}^> \times \mathbb{R} \mid \lambda \neq 0\} \cong \mathbb{R}^> \times \mathbb{R}.$$

Definiamo

$$\pi = \pi_{\mathcal{O}} \circ \mathbb{J}(R, m) = \frac{Rm}{\|Rm\|} = \frac{Rm}{\|m\|},$$

$$j = \pi_{\mathcal{W}} \circ \mathbb{J}(R, m) = (\|Rm\|, m_3) = (\|m\|, m_3)$$

e otteniamo lo schema

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 \pi \swarrow & \downarrow \mathbb{J} & \searrow j \\
 & B & \\
 \pi_{\mathcal{O}} \swarrow & & \searrow \pi_{\mathcal{W}} \\
 S^2 & & A.
 \end{array}$$

Si vede facilmente che la mappa momento  $\mathbb{J}$  è equivariante.

Fissato  $(\eta, \mu) \in \mathbb{R}^4$ ,  $\mathbb{J}^{-1}(\eta, \mu)$  è una sottovarietà di  $P$  connessa e compatta. Infatti

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}^{-1}(\eta, \mu) &= \{(R, m) \mid Rm = \eta, m_3 = \mu\} = \\
 &= \{R \in SO(3) \mid Rm = \eta\} \times \{m \in \mathbb{R}^3 \mid \|m\| = \|\eta\|, m_3 = \mu\} \\
 &\cong S^1 \times S^1.
 \end{aligned}$$

Inoltre queste fibre sono isotrope poiché vale

$$\dim(P) = \dim(B) + \dim(A).$$

Quindi possiamo applicare la proposizione 4.1.1 e otteniamo una bifoliazione in  $P$ .

Effettuiamo ora un cambio di coordinate per studiare meglio lo schema. Possiamo scrivere il vettore  $m \in \mathbb{R}^3$  nelle coordinate  $(\|m\|, \theta, m_3)$  dove  $m_3$  è la componente lungo l'asse  $z$  e  $\theta$  rappresenta l'angolo attorno a tale asse. La matrice  $R$  invece possiamo vederla come una rotazione in  $\mathbb{R}^3$  e possiamo quindi scomporla nell'asse di rotazione, descritto dalle coordinate sferiche  $(\psi, \alpha)$ , e l'angolo di rotazione attorno ad esso,  $\varphi \in [0, \pi)$ . In coordinate locali possiamo scrivere

$$(R, m) = \{(\psi, \alpha, \varphi, \|m\|, m_3, \theta) \mid \|m\| > |m_3| > 0, \theta, \psi \in S^1, \varphi \in [0, \pi], \alpha \in (0, \pi)\}.$$

La mappa  $j$  può quindi essere scritta come

$$j(\psi, \alpha, \varphi, \|m\|, m_3, \theta) = (\|m\|, m_3).$$

Se consideriamo  $(e_3, a) \in B$ , avremo che

$$\mathbb{J}^{-1}(e_3, a) = \{(R, m) \mid m_3 = a, Rm = e_3\}.$$

L'insieme di livello di  $\mathbb{J}$  per  $(e_3, a)$  (e, attraverso un'opportuna rotazione, per ogni altro punto regolare) è definito da:  $m_3 = a$ ,  $\|m\| = \|e_3\| = 1$ ,  $\varphi = \arccos(m_3) = \arccos(a)$  e  $\alpha = 0$  poiché l'asse di rotazione poggia sul piano  $z = 0$ .

Quindi lo schema in coordinate locali diventa:

$$\begin{array}{ccc}
 & (\psi, \alpha, \varphi, \|m\|, m_3, \theta) & \\
 & \downarrow \mathbb{J} & \\
 \pi \swarrow & (\alpha, \varphi, \|m\|, m_3) & \searrow j \\
 \pi_{\mathcal{O}} \swarrow & & \searrow \pi_{\mathcal{W}} \\
 (\alpha, \varphi) & & (\|m\|, m_3)
 \end{array}$$

In coordinate locali le foglie della bifoliazione di  $P$  possono essere espresse nelle coordinate

$$\mathcal{F} = \{(\theta, \psi)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{\Omega} = \{(\theta, \psi, \alpha, \varphi)\}.$$

Riprendendo la rappresentazione a fiore del sistema avremo che in questo caso il prato è dato dalle coordinate  $(\|m\|, m_3)$ , il centro del fiore da  $(\alpha, \varphi)$  e i petali da  $(\theta, \psi)$ .

# Bibliografia

- [1] Abraham R. e Marsden J.E.: Foundations of Mechanics. *Addison-Wesley Publishing Co.*, Reading, Massachusetts. (1978)
- [2] Abraham R., Marden J.E. e Ratiu T.S.: Manifolds, Tensor Analysis and Application. *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York. (1988)
- [3] Arnol'd V.I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics. *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, New York. (1989)
- [4] Blaom A.D.: Hamiltonian G-spaces with regular momenta. *California Institute of Technology*, Technical Memorandum no. cit-cds**96-008** (1996)
- [5] Blaom, A.D.: A Geometric Setting for Hamiltonian Perturbation Theory. *Mem. Amer. Math. Soc.* **153**, no. 727, xviii+112 pp. (2001)
- [6] Bates L. e Śniatycki J.: On Action-Angles Variables. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **120**, 337-343. (1992)
- [7] Bröcker T. e tom Dieck T.: Representations of Compact Lie Groups. *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York. (1985)
- [8] Cushman R. e Bates L.: Global Aspects of Classical Integrable Systems. *Birkhäuser*, Basel. (1997)
- [9] Duflo M. e Vergne M.: Une Propriété de la Représentation Coadjointe d'une Algèbre de Lie, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, **268** A583-A585. (1969)
- [10] Fassò F.: Notes on Finite Dimensional Integrable Hamiltonian Systems. Unpublished. (1999)
- [11] Fassò F.: Superintegrable Hamiltonian Systems: Geometry and Perturbations. *Acta Applicandae Mathematicae*, **87**, 93-121. (2005)

- [12] Libermann P. e Marle C.M.: Symplectic Geometry and Analytical Mechanics. *D. Reidel* Springer, Dordrecht. (1987)
- [13] Marsden J.E. e Ratiu T.S.: Introduction to Mechanics and Symmetry. *Texts in Applied Mathematics* **17**, Springer, New York. (1998)
- [14] Peremolov A.M.: Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras. *Birkhäuser*, Verlag. (1990)
- [15] Weinstein A.: The Local Structure of Poisson Manifolds, *Differential Geometry*, **18**, 523-557. (1983)
- [16] Woodhouse N.M.J.: Geometric Quantization. *Clarendon Press*, Oxford. (1997)