



Università degli Studi di Padova

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

**Instabilità in risonanza di  $\mathcal{L}_4$  e  $\mathcal{L}_5$   
nel problema ristretto dei tre corpi**

Laureanda:  
**Elisa Manfrin**  
Matricola 1001901

Relatore:  
**Prof. Francesco Fassò**

---

5 Dicembre 2014



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Il Problema ristretto dei tre corpi</b>	<b>1</b>
1.1 Lagrangiana ed Equilibri . . . . .	1
1.2 Linearizzazione a $\mathcal{L}_4$ . . . . .	4
<b>2 La teoria KAM e la sua applicazione alla stabilità di <math>\mathcal{L}_4</math> e <math>\mathcal{L}_5</math></b>	<b>7</b>
2.1 Sistemi integrabili e quasi integrabili. . . . .	7
2.2 Il teorema KAM. . . . .	8
2.3 Il caso degli equilibri . . . . .	10
2.4 Applicazione a $\mathcal{L}_4$ e $\mathcal{L}_5$ . . . . .	12
<b>3 Instabilità di <math>\mathcal{L}_4</math> per <math>\mu = \mu_2</math> e <math>\mu = \mu_3</math></b>	<b>13</b>
3.1 Il teorema di Chetaev . . . . .	13
3.2 Risonanza 1:2 . . . . .	14
3.3 Risonanza 1:3 . . . . .	17
<b>Appendice</b>	<b>19</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>25</b>



# Introduzione

Il *Problema dei tre corpi* riguarda lo studio del moto di tre punti materiali che, sottoposti alla mutua interazione gravitazionale, si muovono nello spazio. Questo sistema fu studiato da molti matematici, fisici e astronomi importanti già dal XVIII secolo. L'origine del problema può essere fatta coincidere con l'introduzione della teoria della gravitazione da parte di Newton che fu proprio il primo a trattare questo problema. In seguito Euler studiò versioni semplificate di questo sistema, enunciando per la prima volta il problema *ristretto*. Questo modello studia il moto di un punto materiale soggetto alle interazioni gravitazionali di altri due punti materiali, detti *primari*, che si muovono di moto circolare uniforme attorno al proprio centro di massa. Esso costituisce una buona approssimazione di situazioni fisiche come il moto di un asteroide attratto gravitazionalmente da Sole e Giove. Euler scoprì inoltre l'esistenza di tre configurazioni di equilibrio collineari ai primari. In seguito, Lagrange scoprì altre due configurazioni di equilibrio situate ai vertici di un triangolo equilatero di base la distanza tra i primari. Solo più tardi, nei primi anni del '900, vennero osservati degli asteroidi, chiamati Troiani e Greci, che occupavano proprio quelle configurazioni di equilibrio nel sistema Sole-Giove.

È stato dimostrato da Routh nella seconda metà del XIX secolo, che questi equilibri Lagrangiani, chiamati  $\mathcal{L}_4$  e  $\mathcal{L}_5$ , risultano linearmente stabili per valori della massa ridotta  $\mu$  minori di un valore di soglia, chiamato  $\mu_{Routh}$ . Inoltre, nel caso *circolare piano*, la teoria KAM ha permesso di provare la stabilità di questi equilibri per  $\mu < \mu_{Routh}$  eccetto per due valori *risonanti* di  $\mu$ , detti  $\mu_2$  e  $\mu_3$ . Per tali valori, tra il 1966 e il 1971, Markeev e Alfried ne dimostrarono l'instabilità.

Lo scopo di questo lavoro è quello di esaminare la dimostrazione dell'instabilità degli equilibri Lagrangiani  $\mathcal{L}_4$  e  $\mathcal{L}_5$  per i due valori di risonanza  $\mu_2$  e  $\mu_3$ .

Nel primo capitolo calcoleremo la lagrangiana del sistema, troveremo i punti di equilibrio e ne studieremo l'ellitticità.

Nel secondo capitolo passeremo al formalismo hamiltoniano ed enunceremo il teorema KAM e il teorema di Arnold, risultati utili per studiare la stabilità di  $\mathcal{L}_4$ .

Nel terzo capitolo, infine, introdurremo il teorema di Chetaev che ci permetterà di concludere l'instabilità in risonanza di  $\mathcal{L}_4$ .

Per poter applicare questi risultati porteremo l'hamiltoniana del sistema nella cosiddetta *forma normale di Birkhoff*, al cui calcolo sarà dedicata l'Appendice.

# Capitolo 1

## Il Problema ristretto dei tre corpi

Il *problema dei tre corpi* riguarda lo studio del moto di tre corpi soggetti alle mutue interazioni gravitazionali. Particolari esempi di questo tipo di sistemi sono il moto di una sonda spaziale fra Terra e Luna, o quello di un asteroide sotto l'azione di Sole e Giove. In entrambi i casi, sia la sonda che l'asteroide hanno masse molto minori rispetto ai due pianeti e dunque la loro influenza gravitazionale su questi ultimi può essere trascurata. È stata quindi considerata un'approssimazione del problema dei tre corpi che studi il moto di un punto materiale soggetto al campo gravitazionale di altri due punti materiali, chiamati *primari*, che si muovono su un'orbita Kepleriana di moto circolare uniforme. Inoltre, poiché i moti che partono sul piano con velocità parallela ad esso restano sul piano, ci si può restringere al caso in cui il punto materiale si muova sul piano dell'orbita dei primari. Questa modellizzazione si chiama *problema ristretto circolare piano dei tre corpi*.

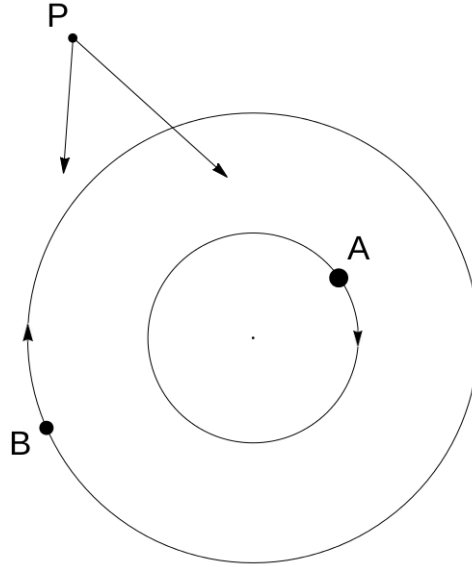
### 1.1 Lagrangiana ed Equilibri

#### Lagrangiana

Chiamiamo i due primari  $A$  e  $B$ ,  $m_A$  e  $m_B$  le rispettive masse e consideriamo un sistema di riferimento con origine nel centro di massa di  $A$  e  $B$ . I primari si muovono di moto circolare uniforme attorno al centro di massa con frequenza angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{Gm}{r^3}}$$

dove  $m = m_A + m_B$ ,  $r$  è la distanza tra i primari e  $G$  la costante gravitazionale.



Osservando che  $\frac{m_B}{m}r$  e  $\frac{m_A}{m}r$  sono rispettivamente le distanze di  $A$  e  $B$  dal centro di massa e indicando con  $x_A(t)$  e  $x_B(t)$  i vettori posizione all'istante  $t$ , si ha  $x_A(t) = R_{\omega t}y_A$  e  $x_B(t) = R_{\omega t}y_B$  dove

$$y_A = \left(-\frac{m_B}{m}r, 0\right), \quad y_B = \left(\frac{m_A}{m}r, 0\right), \quad R_{\omega t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

La Lagrangiana è quindi

$$L'(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + \frac{Gm_A}{|x - R_{\omega t}y_A|} + \frac{Gm_B}{|x - R_{\omega t}y_B|},$$

dove con  $x$  indichiamo la posizione del terzo corpo. Passando ora alle coordinate rotanti  $y = R_{\omega t}x$ , si elimina la dipendenza dal tempo e la nuova Lagrangiana diviene

$$L''(y, \dot{y}) = \frac{1}{2}|\dot{y}|^2 + \omega(\dot{y}_1y_2 - y_1\dot{y}_2) + \frac{\omega^2}{2}|y|^2 + \frac{Gm_A}{|y - y_A|} + \frac{Gm_B}{|y - y_B|}.$$

Operiamo ora dei cambi di coordinate tali da rendere unitaria la distanza tra i due primari e in modo da eliminare le costanti, e, riscalandolo il tempo in modo opportuno, otteniamo infine

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + (\dot{q}_1q_2 - q_1\dot{q}_2) + \frac{1}{2}|q|^2 + \frac{1-\mu}{|q - q_A|} + \frac{\mu}{|q - q_B|} \quad (1.1)$$

dove

$$\mu = \frac{m_B}{m}$$



è il parametro che avrà molta importanza nello studio della stabilità degli equilibri, e  $q_A = (-\mu, 0)$  e  $q_B = (1 - \mu, 0)$  sono le posizioni dei primari nelle nuove coordinate. Osserviamo che  $0 < \mu < 1$ .

Da adesso in poi studieremo il sistema di Lagrangiana (1.1) assumendo  $m_B \leq m_A$  e quindi  $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ .

## Equilibri

Per trovare le configurazioni di equilibrio del sistema dobbiamo studiare i punti critici dell'energia potenziale

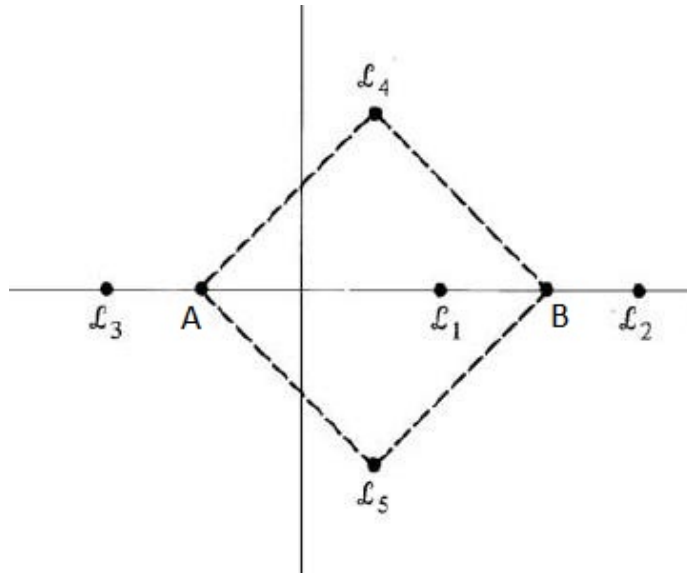
$$V(q) = -\frac{1}{2}|q|^2 - \frac{1-\mu}{d_A(q)} - \frac{\mu}{d_B(q)} \quad (1.2)$$

dove

$$d_A = |q - q_A| = \sqrt{(q_1 + \mu)^2 + q_2^2}, \quad d_B(q) = |q - q_B| = \sqrt{(q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2}.$$

**Proposizione 1.1.** *Il sistema di Lagrangiana (1.1) ha cinque configurazioni di equilibrio:*

1.  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$  collineari con i primari.
2.  $\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5$  posti ai vertici di due triangoli equilateri di base  $AB$ .



*Dimostrazione.* 1. I punti critici  $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2)$  di (1.2) sono collineari ad  $AB$  se  $\bar{q}_2 = 0$ . Ma  $\frac{\partial V}{\partial q_2}(q_1, 0) = 0 \forall q_1$ , quindi  $(\bar{q}_1, 0)$  è punto critico di  $V$  se e solo se  $\frac{\partial V}{\partial q_1}(\bar{q}_1, 0) = 0$ . Studiamo dunque la funzione

$$W(q_1) := V(q_1, 0) = -\frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1-\mu}{|q_1 + \mu|} - \frac{\mu}{|q_1 - 1 + \mu|}.$$

Essa è definita, continua e differenziabile per  $q_1 \neq -\mu$  e  $q_1 \neq 1 - \mu$  e tende a  $-\infty$  per  $q_1 \rightarrow \pm\infty$ ,  $q_1 \rightarrow -\mu$  e  $q_1 \rightarrow 1 - \mu$ . Osservando che la funzione  $W$  è strettamente concava perché  $\frac{d^2W}{dq_1^2} < 0 \forall q_1 \neq -\mu, q_1 \neq 1 - \mu$ , concludiamo che in ogni intervallo aperto  $(-\infty, -\mu)$ ,  $(-\mu, 1 - \mu)$ ,  $(1 - \mu, +\infty)$  c'è uno e un solo punto critico.

2. Per calcolare i punti critici di  $V$  esterni all'asse  $q_1$ , effettuiamo un cambio di coordinate in modo da rendere più agevole il calcolo. Consideriamo come nuove coordinate locali le distanze del terzo corpo dai primari  $d(q) = (d_A(q), d_B(q))$ , che sono definite su tutto il piano eccetto l'asse  $q_1$ . Questo cambio è lecito perché la matrice Jacobiana

$$\frac{\partial d}{\partial q}(q) = \begin{pmatrix} \frac{q_1 + \mu}{d_A(q)} & \frac{q_2}{d_A(q)} \\ \frac{q_1 - 1 + \mu}{d_B(q)} & \frac{q_2}{d_B(q)} \end{pmatrix}$$

ha determinante  $\frac{q_2}{d_A d_B} \neq 0$  e dunque  $d(q)$  è diffeomorfismo locale. Dopo aver calcolato  $q_1^2 + q_2^2 = (1 - \mu)d_A^2 + \mu d_B^2 - \mu(1 - \mu)$ , otteniamo  $V$  nelle nuove coordinate:

$$V(d) = -(1 - \mu) \left( \frac{d_A^2}{2} + \frac{1}{d_A} \right) - \mu \left( \frac{d_B^2}{2} + \frac{1}{d_B} \right).$$

Per trovare i punti critici della nuova  $V$ , calcoliamo

$$\frac{\partial V}{\partial d}(d) = \begin{pmatrix} -(1 - \mu)(d_A - d_A^{-2}) \\ -\mu(d_B - d_B^{-2}) \end{pmatrix}$$

che si annulla se e solo se  $d_A = d_B = 1$  e cioè se e solo se il terzo corpo si trova al vertice di un triangolo equilatero di base  $AB$ . □

## 1.2 Linearizzazione a $\mathcal{L}_4$

Vogliamo ora studiare la stabilità di  $\mathcal{L}_4$  (per simmetria i risultati validi per  $\mathcal{L}_4$  saranno validi anche per  $\mathcal{L}_5$ ). Non potendo usare il teorema di Lagrange-Dirichlet perché  $\mathcal{L}_4$  risulta massimo stretto di  $V$ , useremo il metodo spettrale di Lyapunov che afferma che se la linearizzazione ha almeno un autovalore con parte reale positiva allora l'equilibrio è instabile. Per questo motivo, dato che in sistemi meccanici o hamiltoniani per ogni autovalore c'è sempre anche il suo opposto, si può avere la stabilità solo se la linearizzazione ha tutti gli autovalori con parte reale nulla. Vogliamo quindi determinare per quali valori di  $\mu$  la linearizzazione a  $\mathcal{L}_4$  ha autovalori immaginari non nulli, cioè quando l'equilibrio è ellittico.

**Proposizione 1.2.**  $\mathcal{L}_4$  è ellittico se e solo se  $\mu < \mu_{Routh}$ , dove  $\mu_{Routh} = \frac{9 - \sqrt{69}}{18} \approx 0.0386$ .

*Dimostrazione.* Se poniamo  $\mathbb{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , la Lagrangiana (1.1) assume la forma

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 - q \cdot \mathbb{J}_2 \dot{q} - V(q)$$

e le equazioni di Lagrange sono

$$\ddot{q} = 2\mathbb{J}_2 \dot{q} - V'(q)$$

dove  $V'(q) = \frac{\partial V}{\partial q}(q)$ . La loro linearizzazione a  $\mathcal{L}_4$  è quindi

$$\ddot{q} = 2\mathbb{J}_2 \dot{q} - V''(q_{\mathcal{L}_4})(q - q_{\mathcal{L}_4})$$

cioè

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \mathbb{A} \begin{pmatrix} q - q_{\mathcal{L}_4} \\ v \end{pmatrix}$$

dove  $q_{\mathcal{L}_4} = (\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_2 & \mathbb{1}_2 \\ -V''(q_{\mathcal{L}_4}) & 2\mathbb{J}_2 \end{pmatrix}$  e

$V''(q_{\mathcal{L}_4}) = - \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$  è la matrice Hessiana di  $V$ .

Il polinomio caratteristico è  $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)$  ed esso ha quattro radici immaginarie non nulle se e solo se  $\mu < \frac{9-\sqrt{69}}{18}$  o  $\mu > \frac{9+\sqrt{69}}{18}$ . Poichè stavamo considerando  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ , si conclude.  $\square$

Nel caso in cui  $\mu_{Routh} < \mu \leq \frac{1}{2}$  l'equilibrio è iperbolico, cioè la sua linearizzazione ha autovalori con parte reale non nulla e, per quanto detto all'inizio di questa sezione, l'equilibrio risulta instabile.



## Capitolo 2

# La teoria KAM e la sua applicazione alla stabilità di $\mathcal{L}_4$ e $\mathcal{L}_5$

Nel capitolo precedente abbiamo visto che  $\mathcal{L}_4$  e  $\mathcal{L}_5$  sono equilibri ellittici per  $\mu < \mu_{Routh}$ . Se ora consideriamo il sistema Hamiltoniano corrispondente a quello Lagrangiano considerato fin'ora, possiamo studiare la stabilità dei suoi equilibri attraverso la teoria KAM e, in particolare, attraverso il teorema di Arnold, come vedremo in questo capitolo.

### 2.1 Sistemi integrabili e quasi integrabili.

Prima di tutto introduciamo qualche nozione.

Consideriamo un sistema hamiltoniano a  $n$  gradi di libertà, di hamiltoniana  $H(q, p)$ . Se  $H$  è indipendente dalle coordinate  $q_1, \dots, q_n$ , cioè se  $H(q, p) = h(p)$ , allora le equazioni del moto sono

$$\dot{q}_i = \frac{\partial h}{\partial p_i} =: \omega_i(p), \quad \dot{p}_i = \frac{\partial h}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

e la soluzione con dato iniziale  $(q_i^0, p_i^0)$  è

$$q_i(t) = q_i^0 + \omega_i(p^0)t, \quad p_i(t) = p_i^0 \quad i = 1, \dots, n.$$

È chiaro quindi che le coordinate  $p_i$  sono costanti del moto del sistema, cioè sono integrali primi, mentre le  $q_i$  viaggiano con velocità costante.

In generale non è necessario che  $H$  non dipenda dalle  $q_i$ , ma è sufficiente che esista una trasformazione canonica che coniughi l'hamiltoniana di partenza ad una che abbia le caratteristiche appena discusse, come dice la seguente

**Definizione 2.1.** *Un sistema hamiltoniano è completamente integrabile in un aperto invariante  $W$  del suo spazio delle fasi se esiste una trasformazione canonica che lo coniuga, in  $W$ , ad un sistema la cui hamiltoniana dipende solo dai nuovi momenti.*

Il fatto che la nuova hamiltoniana dipenda solo dagli  $n$  momenti equivale a dire che questi sono  $n$  integrali primi funzionalmente indipendenti per il sistema e sono in *involuzione*, cioè  $\{p_i, p_j\} = 0$ .

Liouville e Arnold dimostrarono che, se gli insiemi di livello di questi integrali primi sono compatti, allora lo spazio delle fasi di un sistema di questo tipo risulta essere foliato in superfici diffeomorfe a tori sui quali il moto è coniugato a moti lineari.

Questo significa che un sistema hamiltoniano di hamiltoniana  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile in un dominio  $D \subset U$  se esiste una trasformazione canonica

$$w : D \rightarrow \mathbb{T}^n \times B \quad (q, p) \mapsto w(q, p) = (\varphi, I),$$

dove  $\mathbb{T}^n$  è un toro  $n$ -dimensionale e  $B \subset \mathbb{R}^n$ , tale per cui la nuova hamiltoniana  $\tilde{H} = H \circ w^{-1}$  dipenda solo da  $I$ , cioè  $\tilde{H}(\varphi, I) = h(I)$ .

Le nuove coordinate  $(\varphi, I)$  sono chiamate coordinate *angolo-azione*.

Sistemi con questa caratteristica, tuttavia, sono difficili da trovare nel mondo fisico. Sono invece abbondanti i sistemi *quasi-integrabili*, cioè sistemi con hamiltoniana della forma

$$H_\varepsilon(\varphi, I) = h(I) + \varepsilon f(\varphi, I, \varepsilon), \quad (2.1)$$

che differisce dalla hamiltoniana  $h$  di un sistema integrabile per la presenza della *perturbazione*  $\varepsilon f$ , con  $\varepsilon \ll 1$ .

Consideriamo come esempio il Sistema Solare formato dal Sole e da otto pianeti. Una prima approssimazione è quella di trascurare le masse dei pianeti, che sono al più la millesima parte di quella del Sole, tenendo conto solo dell'attrazione esercitata su di essi da parte del Sole. In questo modo si riduce il sistema ad otto problemi di Keplero disaccoppiati. Il modello che ne risulta è integrabile, ma basta tener conto dell'interazione fra alcuni dei pianeti oppure considerare il sistema Sole-Giove-asteroide visto nel primo capitolo, per ottenere un sistema quasi-integrabile.

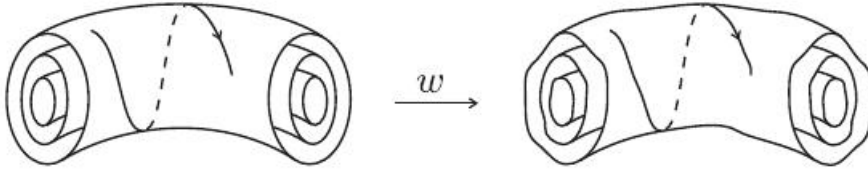
## 2.2 Il teorema KAM.

Consideriamo l'hamiltoniana perturbata  $H_\varepsilon(\varphi, I) = h(I) + \varepsilon f(\varphi, I, \varepsilon)$ , con  $\varepsilon$  sufficientemente piccola. Se vale la *condizione di non degenerazione*

$$\det \left( \frac{\partial^2 h}{\partial I^2} \right) (I) \neq 0 \quad \forall I$$

allora, per ogni  $\varepsilon$  abbastanza piccolo, ad esclusione dallo spazio delle fasi di un insieme di dati iniziali di misura di Lebesgue piccola ( $O(\sqrt{\varepsilon})$ ), la struttura di sistema integrabile persiste anche nel sistema perturbato risultando soltanto deformata di poco.

Precisamente, il teorema KAM garantisce l'esistenza di una trasformazione canonica  $w_\varepsilon$  vicina all'identità, che coniuga l'hamiltoniana di partenza  $H_\varepsilon$  ad una nuova hamiltoniana  $\tilde{H}_\varepsilon$  che, su un certo sottoinsieme  $B_\varepsilon$  di misura grande del dominio, è indipendente dagli angoli. Il corrispondente sistema, quindi, ristretto a questo sottoinsieme, si comporta come se fosse integrabile. Le soluzioni delle equazioni di Hamilton nelle nuove coordinate  $(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$  stanno, cioè, su tori. Inoltre, poiché  $w_\varepsilon$  è prossima all'identità, gli stessi tori, nelle vecchie variabili  $(\varphi, I)$ , risultano "deformati", come rappresentato nella seguente figura:



L'esistenza, su ogni varietà di livello di energia, di tori invarianti del sistema perturbato, il cui complemento ha misura piccola, è garantita dalla *condizione di non degenerazione isoenergetica*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial I^2} & \frac{\partial h}{\partial I} \\ \left(\frac{\partial h}{\partial I}\right)^T & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

che assicura che il rapporto delle frequenze dei moti sui tori si conservi al variare di  $\varepsilon$ .

Tuttavia i moti con dati iniziali che non stanno in  $B_\varepsilon$ , assumono comportamenti diversi a seconda del numero di gradi di libertà del sistema.

Nel caso in cui  $n = 2$ , lo spazio delle fasi ha dimensione 4 e le superfici di livello dell'hamiltoniana hanno dimensione 3. Perciò i tori KAM, avendo dimensione 2, "dividono" le superfici di livello. In questo modo, i moti che partono nell'intercapedine tra due tori, cioè con dato iniziale nel complementare di  $B_\varepsilon$ , rimangono intrappolati in essa. Le azioni, quindi, variano di poco. Su questa idea è basato il teorema di stabilità di Arnold, che vedremo nella prossima sezione.

Nel caso in cui  $n \geq 3$ , invece, questo non accade. I tori KAM, di dimensione  $n$ , non "dividono" le superfici di energia costante, che hanno dimensione  $2n - 1$ , e perciò i moti con dato iniziale nel complementare di  $B_\varepsilon$  non rimangono intrappolati e le azioni possono, quindi, variare significativamente. Questo fenomeno è chiamato *diffusione di Arnold*.

## 2.3 Il caso degli equilibri

Sia  $H(q, p)$  analitica in un intorno dell'origine e tale che ivi abbia un punto critico. Allora il suo sviluppo in serie di Taylor attorno all'origine è

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (2.2)$$

dove gli  $H_s$  sono polinomi omogenei di grado  $s$  per ogni  $s \geq 2$ .

Assumiamo che l'origine sia equilibrio ellittico, cioè che la linearizzazione del sistema in tale punto abbia autovalori immaginari  $\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_n$ , con  $\omega_1, \dots, \omega_n > 0$ .

È noto che se gli  $\omega_i$  sono distinti allora esistono delle coordinate  $(q, p)$  e dei reali  $\Omega_i$  tali che  $|\Omega_i| = \omega_i$ , tali che

$$H_2(q, p) = \sum_{i=1}^n \Omega_i \frac{q_i^2 + p_i^2}{2}.$$

Osserviamo che se  $\Omega_1, \dots, \Omega_n > 0$  allora l'equilibrio è stabile. Il caso interessante, su cui si applica il teorema KAM, è quando gli  $\Omega_i$  hanno segno opposto.

Passando ora alle coordinate angolo-azione

$$q_i = \sqrt{2I_i} \sin \varphi_i, \quad p_i = \sqrt{2I_i} \cos \varphi_i$$

risulta

$$H_2 = \sum_{i=1}^n \Omega_i I_i,$$

che è l'hamiltoniana di  $n$  oscillatori armonici e dipende solo dalle  $I_i$ . Ci siamo quindi ricondotti all'hamiltoniana

$$H(\varphi, I) = H_2(I) + H_3(\varphi, I) + H_4(\varphi, I) + O(5) \quad (2.3)$$

che è proprio della forma (2.1).

Per poter applicare il teorema KAM abbiamo bisogno di ricondurre questa hamiltoniana in una forma opportuna. Prima di farlo, diamo una definizione:

**Definizione 2.2.** Diciamo che  $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n)$  è risonante se esiste  $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$  tale che

$$\Omega \cdot k = 0.$$

Inoltre l'intero  $\sum_{i=1}^n |k_i|$  è detto ordine della risonanza.

Osserviamo che le ipotesi di avere le  $\Omega_i$  non nulle e distinte significano che  $\Omega$  è non risonante fino all'ordine 2.



Come descritto in dettaglio in Appendice per il caso  $n = 2$ , se  $\Omega$  non è risonante fino all'ordine 3 allora esiste una trasformazione canonica che coniuga  $H$  ad una hamiltoniana della forma

$$H'(\varphi, I) = H_2(I) + H'_4(\varphi, I) + O(5).$$

Se inoltre  $\Omega$  non è risonante fino all'ordine 4 esiste una trasformazione canonica che coniuga  $H'$  ad una hamiltoniana della forma

$$H''(\varphi, I) = H_2(I) + H''_4(I) + O(5)$$

che è chiaramente una piccola perturbazione della hamiltoniana integrabile

$$B_4 = H_2(I) + H''_4(I) = \Omega \cdot I + \frac{1}{2}I \cdot AI,$$

dove  $A$  è una matrice simmetrica.  $B_4$  è detta *forma normale di Birkhoff di ordine 4*. A differenza di  $H_2$ ,  $B_4$  ha un fattore quadratico nelle  $I$ , che, se  $\det A \neq 0$ , ci assicura la non degenerazione dell'hessiana di  $B_4$  e questo ci permette di applicare il teorema KAM.

Con tecniche analoghe a quelle del teorema KAM, Arnold dimostrò il seguente

**Teorema 2.1** (Arnold). *Se il sistema ha due gradi di libertà,  $\Omega$  è non risonante fino all'ordine 4 e  $B_4$  soddisfa la condizione di non degenerazione isoenergetica nell'origine, cioè*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 B_4}{\partial I^2} & \frac{\partial B_4}{\partial I} \\ (\frac{\partial B_4}{\partial I})^T & 0 \end{pmatrix} (0) \neq 0,$$

*allora l'origine è stabile.*

Assumiamo quindi  $n = 2$  e vediamo quando sono verificate le ipotesi del teorema di Arnold.

La condizione di non degenerazione isoenergetica per  $B_4$  richiede che

$$\mathcal{D}(0) := \det \begin{pmatrix} A & \Omega + AI \\ [\Omega + AI]^T & 0 \end{pmatrix} (0) = \det \begin{pmatrix} A & \Omega \\ \Omega^T & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Osserviamo che questa condizione è equivalente a richiedere che  $H''_4(\Omega^\perp) \neq 0$ , dove  $\Omega^\perp = (-\Omega_2, \Omega_1)$ . Con questa condizione, il teorema di Arnold si generalizza come segue:

**Teorema 2.2** (Arnold). *Se  $n = 2$ ,  $\Omega$  non risonante fino all'ordine  $2r$  per qualche  $r \geq 2$  e  $H''_{2r}(\Omega^\perp) \neq 0$  allora l'origine è stabile.*

## 2.4 Applicazione a $\mathcal{L}_4$ e $\mathcal{L}_5$

Il teorema di Arnold è stato applicato allo studio della stabilità di  $\mathcal{L}_4$  e  $\mathcal{L}_5$  nel problema ristretto circolare piano dei tre corpi.

Da (1.1) segue che l'hamiltoniana di tale sistema è

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_1 p_2 - q_2 p_1 + \frac{1 - \mu}{|q - q_A|} + \frac{\mu}{|q - q_B|} \quad (2.4)$$

e, come si può vedere, è dipendente dalla massa ridotta  $\mu$ .

Ricordiamo che  $\mathcal{L}_4$  è equilibrio ellittico per  $\mu < \mu_{Routh}$  e per tali valori non vi sono risonanze di ordine 1 e 2.

Tuttavia, per

$$\mu = \mu_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{30} \sqrt{\frac{611}{3}} \approx 0.0242939$$

gli autovalori della linearizzazione della lagrangiana in  $\mathcal{L}_4$  sono

$$\pm 2 \frac{\sqrt{5}i}{5} \text{ e } \pm \frac{\sqrt{5}i}{5}, \text{ quindi } \frac{\omega_1}{\omega_2} = 2$$

e perciò si ha una risonanza di ordine 3.

Per

$$\mu = \mu_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{213}}{30} \approx 0.0135160,$$

invece, gli autovalori della linearizzazione della lagrangiana in  $\mathcal{L}_4$  sono

$$\pm 3 \frac{\sqrt{10}i}{10} \text{ e } \pm \frac{\sqrt{10}i}{10}, \text{ quindi } \frac{\omega_1}{\omega_2} = 3$$

e perciò si ha una risonanza di ordine 4.

Nel 1967 Deprit e Deprit-Bartolomé [10] calcolarono a mano la forma normale di Birkhoff di ordine 4 per  $\mu < \mu_{Routh}$ ,  $\mu \neq \mu_2$ ,  $\mu \neq \mu_3$  e mostrarono che, per tali valori, essa soddisfa la condizione di non degenerazione isoenergetica eccetto per  $\mu = \mu_0 \approx 0.0109$  al quale  $\mathcal{D}(0) = 0$ .

Successivamente Meyer e Schmidt [15] calcolarono, attraverso un calcolatore, la forma normale di Birkhoff di ordine 6 e mostrarono che a  $\mu = \mu_0$  la condizione  $H_6''(\Omega^\perp) \neq 0$  è rispettata.

Quindi, per il teorema di Arnold,  $\mathcal{L}_4$  è equilibrio stabile per valori di  $\mu < \mu_{Routh}$  diversi da  $\mu_2$  e  $\mu_3$ .

Nel prossimo capitolo studieremo la stabilità di  $\mathcal{L}_4$  per  $\mu = \mu_2$  e  $\mu = \mu_3$ .

## Capitolo 3

# Instabilità di $\mathcal{L}_4$ per $\mu = \mu_2$ e $\mu = \mu_3$

Nel capitolo precedente abbiamo visto che, per il teorema di Arnold, l'equilibrio  $\mathcal{L}_4$  è stabile per ogni  $\mu \in ]0, \mu_{Routh}[$  eccetto per  $\mu = \mu_2$  e  $\mu = \mu_3$ , valori per cui si verificano risonanze di ordine 3 e 4 rispettivamente. Per tali valori, Markeev [13] e Alfriend [1] [2] stabilirono l'instabilità di  $\mathcal{L}_4$ .

In questo capitolo, utilizzando l'idea di Alfriend e Richardson [3] di usare il teorema di Chetaev, studieremo la stabilità di equilibri a valori risonanti e poi, seguendo la trattazione di Meyer, Hall e Offin [14], applicheremo i risultati ad  $\mathcal{L}_4$ .

### 3.1 Il teorema di Chetaev

Uno strumento che useremo per studiare la stabilità di  $\mathcal{L}_4$  è il teorema di Chetaev. Esso afferma che se esistono una funzione  $V$  e un aperto  $\Omega$  che verificano certe proprietà, allora l'equilibrio è instabile.

**Teorema 3.1** (Chetaev). *Sia  $\xi_0$  un punto di equilibrio di  $\dot{z} = f(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ . Se esistono un intorno aperto  $O$  di  $\xi_0$ ,  $V : O \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia e  $\Omega$  un sottoinsieme aperto di  $O$  tali che:*

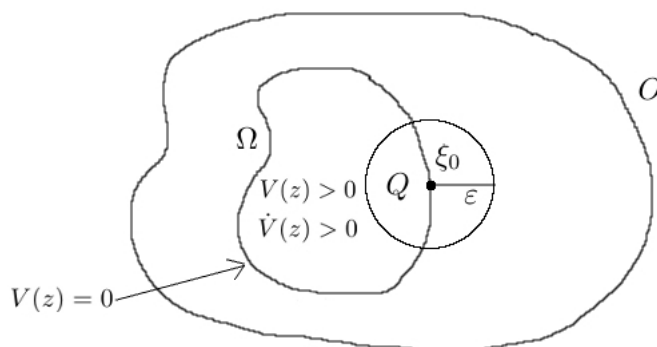
- $\xi_0 \in \partial\Omega$
- $V(z) > 0$  per  $z \in \Omega$
- $V(z) = 0$  per  $z \in \partial\Omega$
- $\dot{V}(z) := \nabla V(z) \cdot f(z) > 0$  per  $z \in \Omega$

*allora  $\xi_0$  è instabile.*

*Dimostrazione.* Provare l'instabilità di  $\xi_0$  significa dimostrare che esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $\delta \in ]0, \varepsilon[$  esistono un punto  $p \in B_\delta(\xi_0)$  e un tempo

$t^* > 0$  tale che la soluzione  $\Phi(t^*, p) \notin B_\varepsilon(\xi_0)$ . In altre parole, vogliamo mostrare che esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che arbitrariamente vicino a  $\xi_0$  riusciamo a trovare dei punti che escono da  $B_\varepsilon(\xi_0)$ .

Scegliamo  $\varepsilon$  tale che  $\partial B_\varepsilon(\xi_0) \cap \Omega \neq \emptyset$  e definiamo  $Q = \Omega \cap B_\varepsilon(\xi_0)$ .



Per come è stato definito,  $Q$  contiene punti arbitrariamente vicini al punto di equilibrio.

Definiamo  $v(t) = V(\Phi(t, p))$ .

Osserviamo che ogni punto di  $Q$  esce da  $Q$  in tempo finito. Supponiamo per assurdo che questo non accada. Allora, se  $\Phi(t, p)$  rimane in  $Q$ , poiché  $\dot{v} > 0$ ,  $v(t)$  è crescente e quindi abbiamo  $v(t) \geq v(0) > 0$  per  $t \geq 0$ . Inoltre la chiusura di  $\{\Phi(t, p) : t \geq 0\}$  è un compatto ed essendo  $\dot{v} > 0$  su questo insieme, esiste  $k > 0$  tale che  $\dot{v}(t) \geq k$  per ogni  $t \geq 0$ . Perciò  $v(t) \geq v(0) + kt$ , che al tendere di  $t$  all'infinito va all'infinito. Ma questa è una contraddizione perchè avevamo supposto che  $\Phi(t, p)$  rimanesse in  $Q$  che è limitato.

Mostriamo ora che ogni tale soluzione esce da  $Q$  attraverso  $\partial B_\varepsilon(\xi_0)$  e quindi esce da  $B_\varepsilon$ . Chiamiamo  $t^* > 0$  il tempo in cui  $\Phi(t, p)$  interseca  $\partial Q$  per la prima volta e  $q^* = \Phi(t^*, p)$ . Il bordo di  $Q$  è formato dai punti  $q$  dove  $V(q) = 0$  o dove  $\|q - \xi_0\| = \varepsilon$ . Ma  $V(q^*) = V(\Phi(t^*, p)) = v(t^*) \geq v(0) > 0$  perché  $\dot{v}(t) > 0$  per  $0 \leq t < t^*$ , quindi abbiamo trovato punti arbitrariamente vicini a  $\xi_0$  che escono da  $B_\varepsilon(\xi_0)$ .  $\square$

### 3.2 Risonanza 1:2

Consideriamo il sistema hamiltoniano del problema ristretto dei tre corpi circolare piano in cui  $\mu = \mu_2$ . In questo caso gli autovalori della linearizzazione sono  $\pm i\omega_1$  e  $\pm i\omega_2$  con  $\omega_1 = 2\omega_2$ . Si ha cioè una risonanza 1:2.

Come si vede in Appendice, l'hamiltoniana (2.3) nel caso in cui  $n = 2$  e  $\Omega_1 = -2\Omega_2$ , normalizzata fino all'ordine tre, assume la forma:

$$H = 2\omega I_1 - \omega I_2 + \delta I_1^{1/2} I_2 \cos \psi + H^* \quad (3.1)$$

dove  $\psi = \varphi_1 + 2\varphi_2$ ,  $H^*(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = O((I_1 + I_2)^2)$ ,  $\omega = \Omega_2$  e  $\delta$  è una costante.

**Teorema 3.2.** *Se  $\delta \neq 0$ , l'origine è instabile per l'hamiltoniana (2.3).*

**Osservazione 3.1.** *Se  $\delta = 0$  si può costruire la forma normale di Birkhoff di ordine 4 e la stabilità dell'equilibrio può essere decisa in base al teorema di Arnold.*

*Dimostrazione.* Per dimostrare questo teorema ci serviremo del teorema di Chetaev (3.1).

Consideriamo la funzione di Chetaev

$$V = \delta I_1^{1/2} I_2 \sin \psi.$$

Per calcolare più agevolmente  $\dot{V}$ , operiamo il cambio di coordinate simpletico

$$\begin{cases} \psi_1 = \varphi_1 + 2\varphi_2 \\ \psi_2 = \varphi_2 \\ J_1 = I_1 \\ J_2 = I_2 - 2I_1 \end{cases},$$

in modo tale da eliminare la dipendenza da una delle nuove variabili (in questo caso  $\psi_2$ ) dalla parte normalizzata di  $H$  e da  $V$ . Nelle nuove coordinate, infatti, l'hamiltoniana  $H$  e la funzione  $V$  diventano

$$\tilde{H} = -\omega J_2 + P(J_1, J_2) \cos \psi_1 + \tilde{H}^* \quad \text{e} \quad \tilde{V} = P(J_1, J_2) \sin \psi_1,$$

dove  $P(J_1, J_2) = \delta J_1^{1/2} (2J_1 + J_2)$ .

Risulta quindi

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} = \{\tilde{V}, \tilde{H}\} &= P \cos \psi_1 \frac{\partial P}{\partial J_1} \cos \psi_1 + \frac{\partial P}{\partial J_1} \sin \psi_1 P \sin \psi_1 + \{\tilde{V}, \tilde{H}^*\} = \\ &= P \frac{\partial P}{\partial J_1} + \{\tilde{V}, \tilde{H}^*\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial J_1} \left( \frac{P^2}{2} \right) + \{\tilde{V}, \tilde{H}^*\}. \end{aligned}$$

dove  $\frac{\partial}{\partial J_1} \left( \frac{P^2}{2} \right) = O((J_1 + J_2)^2)$  è un termine sempre positivo e  $\{\tilde{V}, \tilde{H}^*\} = O((J_1 + J_2)^{5/2})$ .  $\dot{\tilde{V}}$  è quindi positiva in ogni intorno del punto di equilibrio,

mentre  $\tilde{V}$  può assumere sia valori positivi che negativi a seconda del valore di  $\sin \psi_1$  e quindi al variare di  $\psi_1$ .

Per poter applicare il teorema di Chetaev abbiamo bisogno di un aperto  $\Omega$  in cui sia la funzione  $V$  che  $\tilde{V}$  siano positive. Definiamo perciò  $\Omega$  come l'insieme dei punti in cui  $J_i > 0$  per  $i = 1, 2$  e  $0 < \psi_1 < \pi$ . Osserviamo che  $\partial\Omega$  è l'insieme dei punti in cui  $J_i = 0$  per  $i = 1, 2$ ,  $\psi_1 = 0$  o  $\psi_1 = \pi$  e perciò il punto di equilibrio, che avevamo posto in  $(0, 0)$ , appartiene a  $\partial\Omega$ . Inoltre  $V = 0$  su  $\partial\Omega$ .

Le condizioni del teorema di Chetaev sono quindi tutte soddisfatte e perciò possiamo concludere che l'equilibrio è instabile.  $\square$

**Osservazione 3.2.** *Notiamo che la funzione di Chetaev utilizzata nella dimostrazione è l'opposto della derivata rispetto a  $\psi$  della parte normalizzata della hamiltoniana, cioè la derivata temporale delle azioni. La funzione di Chetaev può quindi essere interpretata come “velocità di fuga delle azioni”.*

Grazie a questo risultato possiamo affermare che  $\mathcal{L}_4$  è instabile quando  $\mu = \mu_2$ . Come riportato in [14], infatti, usando Mathematica, si può portare l'hamiltoniana (2.3) nella forma normale (3.1) con

$$\omega = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.447213 \text{ e } \delta = \frac{11\sqrt{11}}{18\sqrt[4]{5}} \approx 1.35542.$$

Si può dimostrare una forma più forte del teorema (3.2). Enunciamo prima un risultato preliminare:

**Teorema 3.3** (del centro di Lyapunov). *Supponiamo che il sistema  $\dot{x} = f(x)$ , con  $x \in \mathbb{R}^m$ , ammetta un integrale non degenere, abbia un equilibrio  $\zeta$  e gli autovalori della linearizzazione in  $\zeta$  siano  $\pm i\omega, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ , dove  $\pm i\omega \neq 0$  sono immaginari puri. Se  $\lambda_j/i\omega \notin \mathbb{Z}$  per  $i = 3, \dots, m$  allora esiste una famiglia 1-parametrica di orbite periodiche emanate dal punto di equilibrio. Inoltre, all'avvicinarsi della famiglia all'equilibrio, il periodo tende a  $2\pi/\omega$ .*

La varietà formata al variare del parametro da cui dipende la famiglia è detto *centro di Lyapunov*.

Applichiamo questo teorema a  $\mathcal{L}_4$ : siano  $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$  gli autovalori della linearizzazione, con  $0 < \omega_2 < \omega_1$ . Poiché  $i\omega_2/i\omega_1$  è minore di 1 in modulo, e quindi non è un intero, il teorema del centro di Lyapunov assicura l'esistenza di una famiglia di orbite periodiche emanate da  $\mathcal{L}_4$  con periodo  $2\pi/\omega_2$  per ogni  $\mu \in ]0, \mu_{Routh}[$ . Questa famiglia è chiamata *famiglia di periodo corto*. Ora, per ogni  $r \in \mathbb{Z}$  definiamo  $\mu_r$  il valore di  $\mu$  per il quale  $\omega_1/\omega_2 = r$ . Se  $0 < \mu < \mu_{Routh}$  e  $\mu \neq \mu_r$  allora il teorema del centro di Lyapunov assicura l'esistenza di una famiglia di orbite periodiche emanate da  $\mathcal{L}_4$  con periodo  $2\pi/\omega_2$ . Questa famiglia è chiamata *famiglia di periodo lungo*.

Possiamo ora enunciare il seguente

**Teorema 3.4.** *Se valgono le ipotesi del teorema (3.2), allora esiste un intorno  $O$  dell'equilibrio tale che ogni soluzione che parte in  $O$ , ma non nel centro di Lyapunov, lascia  $O$  sia in tempi positivi che negativi.*

### 3.3 Risonanza 1:3

Studiamo ora il sistema hamiltoniano del problema ristretto dei tre corpi circolare piano in cui  $\mu = \mu_3$ . In questo caso gli autovalori della linearizzazione sono  $\pm i\omega_1$  e  $\pm i\omega_2$  con  $\omega_1 = 3\omega_2$  e si ha, cioè, una risonanza 1:3.

Come si può vedere in Appendice, l'hamiltoniana (2.3) nel caso in cui  $n = 2$  e  $\Omega_1 = -3\Omega_2$ , normalizzata fino all'ordine quattro, assume la forma:

$$H = 3\omega I_1 - \omega I_2 + \delta I_1^{1/2} I_2^{3/2} \cos \psi + \frac{1}{2}(aI_1^2 + 2bI_1 I_2 + cI_2^2) + H^* \quad (3.2)$$

dove  $\psi = \varphi_1 + 3\varphi_2$ ,  $H^* = O((I_1 + I_2)^{5/2})$  e  $\delta, a, b$  e  $c$  sono delle costanti.

**Teorema 3.5.** *Se  $6\sqrt{3}|\delta| > |D|$ , dove  $D = a + 6b + 9c$ , l'origine è instabile per l'hamiltoniana (2.3).*

*Dimostrazione.* Procediamo come nella dimostrazione del teorema (3.2). Consideriamo la funzione di Chetaev

$$V = \delta I_1^{1/2} I_2^{3/2} \sin \psi. \quad (3.3)$$

Operiamo il cambio di coordinate simplettico

$$\begin{cases} \psi_1 = \varphi_1 + 3\varphi_2 \\ \psi_2 = \varphi_2 \\ J_1 = I_1 \\ J_2 = I_2 - 3I_1 \end{cases}$$

in modo tale che l'hamiltoniana  $H$  e la funzione  $V$  nelle nuove coordinate diventino

$$\tilde{H} = -\omega J_2 + \delta P(J_1, J_2) \cos \psi_1 + G(J_1, J_2) + H^* \quad \text{e} \quad \tilde{V} = P(J_1, J_2) \sin \psi_1$$

dove  $P(J_1, J_2) = \delta J_1^{1/2} (J_2 + 3J_1)^{3/2}$  e  $G(J_1, J_2) = \frac{1}{2}(aJ_1^2 + 2bJ_1(J_2 + 3J_1) + c(J_2 + 3J_1)^2)$ . Risulta quindi

$$\dot{\tilde{V}} = \{\tilde{V}, \tilde{H}\} = \frac{\partial}{\partial J_1} \left( \frac{P^2}{2} \right) + P \frac{\partial G}{\partial J_1} \cos \psi_1 + \{\tilde{V}, \tilde{H}^*\}$$

dove  $\{\tilde{V}, \tilde{H}^*\} = O((J_1 + J_2)^{7/2})$ . Tornando ora alle coordinate originarie, si ha

$$\dot{V} = \delta^2 \left( \frac{1}{2} I_2^3 + \frac{9}{2} I_1 I_2^2 \right) + \delta I_1^{1/2} I_2^{3/2} (aI_1 + bI_2 + 3bI_1 + 3cI_2) \cos \psi + O((I_1 + I_2)^{7/2}).$$

Consideriamo ora il flusso sulla superficie  $H = 0$ . Risolvendo per  $I_2$  si ottiene  $I_2 = 3I_1 + O((I_1 + I_2)^2)$  e sostituendo questa espressione in  $V$  e  $\dot{V}$  si ha

$$V = 3\sqrt{3}\delta I_1^2 \sin \psi + O((I_1 + I_2)^{5/2}) \quad (3.4)$$

e

$$\dot{V} = \delta^2 I_1^3 (54 + \delta^{-1} 3^{3/2} (a + 6b + 9c) \cos \psi) + O((I_1 + I_2)^{7/2}). \quad (3.5)$$

Per poter applicare il teorema di Chetaev, dobbiamo trovare un aperto  $\Omega$  in cui  $V$  e  $\dot{V}$  siano positive. Studiamo perciò il segno di  $V$  e  $\dot{V}$ . A causa della presenza di  $\cos \psi$  in (3.5),  $\dot{V}$  varia da  $\delta^2 I_1^3 (54 - \delta^{-1} 3^{3/2} (a + 6b + 9c) \cos \psi) + O((I_1 + I_2)^{7/2})$  a  $\delta^2 I_1^3 (54 + \delta^{-1} 3^{3/2} (a + 6b + 9c) \cos \psi) + O((I_1 + I_2)^{7/2})$ . Affinché  $\dot{V}$  sia positiva, quindi, è necessario che  $54 > |\delta^{-1} 3\sqrt{3}D|$ , cioè  $6\sqrt{3}|\delta| > |D|$  che vale per ipotesi.  $\Omega$  sarà quindi definito come l'insieme dei punti in cui  $V$  è positiva, cioè quando  $I_i > 0$  per  $i = 1, 2$  e  $0 < \psi < \pi$ . Osserviamo che l'equilibrio, che consideriamo in  $(0, 0)$ , appartiene a  $\partial\Omega$  e  $V = 0$  in  $\partial\Omega$ . Applicando quindi il teorema di Chetaev si conclude che l'equilibrio è instabile.  $\square$

Nel caso di  $\mathcal{L}_4$  per  $\mu = \mu_3$ , come riportato da Meyer, Hall e Offin [14], usando Mathematica si trovano

$$\omega = \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0.316228, \quad \delta = \frac{3\sqrt{14277}}{80} \approx 4.48074,$$

$$\text{e } |D| \approx 8.34107.$$

Risulta quindi

$$6\sqrt{3}|\delta| \approx 46.5652 > |D|$$

e perciò sono rispettate le ipotesi del teorema precedente. Si può allora affermare che, per  $\mu = \mu_3$ ,  $\mathcal{L}_4$  è instabile.



# Appendice

## La forma normale di Birkhoff

Le forme normali per una hamiltoniana nell'intorno di un suo punto ellittico si chiamano *forme normali di Birkhoff*.

Nel capitolo 2 abbiamo parlato di una trasformazione canonica che porti l'hamiltoniana in forma normale. Vediamo ora esplicitamente come trovare tale trasformazione. Il metodo che useremo è chiamato *metodo di Lie*.

Il nostro scopo è quello di cercare una hamiltoniana generatrice  $\chi$  analitica, tale che il suo flusso al tempo 1,  $\Phi_1^\chi$ , sia la trasformazione che cerchiamo, cioè  $H \circ \Phi_1^\chi = H_2 + G_3 + O(4)$ .

Ricordiamo che per ogni funzione  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  analitica, si ha

$$F \circ \Phi_1^\chi = F + \{F, \chi\} + \frac{1}{2}\{\{F, \chi\}, \chi\} + \dots$$

Applichiamo quindi questo sviluppo alla hamiltoniana  $H = H_2 + H_3 + \dots$  dove  $H_s$  è un polinomio omogeneo di grado  $s$  e  $H_2 = \sum_{i=1}^N \omega_i \frac{q_i^2 + p_i^2}{2}$ . Si ha

$$\begin{aligned} H \circ \Phi_1^\chi &= (H_2 + H_3 + \dots) \circ \Phi_1^\chi = \\ &= H_2 \circ \Phi_1^\chi + H_3 \circ \Phi_1^\chi + \dots = \\ &= (H_2 + \{\chi, H_2\} + \dots) + (H_3 + \dots) + \dots = \\ &= H_2 + (\{\chi, H_2\} + H_3) + \dots \end{aligned}$$

e poiché vogliamo che  $H \circ \Phi_1^\chi = H_2 + G_3 + O(4)$  allora dobbiamo imporre che

$$\{\chi, H_2\} = G_3 - H_3 \tag{1}$$

e che sia un polinomio omogeneo di grado 3. Al fine di rendere più semplice questo calcolo, operiamo il cambio di coordinate canonico

$$w_j = \frac{q_j - ip_j}{i\sqrt{2}}, \quad z_j = \frac{q_j + ip_j}{\sqrt{2}}.$$

Queste nuove coordinate sono chiamate *coordinate complesse*. Osserviamo che  $iw_j z_j = \frac{q_j^2 + p_j^2}{2}$  e quindi

$$H_2(w, z) = \sum_{i=1}^N iw_i z_i.$$

Risulta quindi

$$\begin{aligned} \{\chi, H_2\} &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \chi}{\partial w_j} \frac{\partial H_2}{\partial z_j} - \frac{\partial \chi}{\partial z_j} \frac{\partial H_2}{\partial w_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \chi}{\partial w_j} i\omega_j w_j - \frac{\partial \chi}{\partial z_j} i\omega_j z_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^N i\omega_j \left( w_j \frac{\partial \chi}{\partial w_j} - z_j \frac{\partial \chi}{\partial z_j} \right). \end{aligned}$$

Restringiamoci ora al caso che ci interessa, cioè a  $N = 2$  e scriviamo  $\chi$  in serie di Taylor usando la notazione multi-indice

$$\chi = \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} \chi_{mn} w^m z^n.$$

Allora

$$\begin{aligned} \{\chi, H_2\} &= \sum_{j=1}^2 i\omega_j \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} (m_j \chi_{mn} w^m z^n - n_j \chi_{mn} w^m z^n) = \\ &= \sum_{j=1}^2 i\omega_j (m_j - n_j) \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} \chi_{mn} w^m z^n = \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} [i\omega \cdot (m - n) \chi_{mn}] w^m z^n. \end{aligned}$$

Scriviamo anche  $G_3 - H_3$  in serie di Taylor usando la notazione multi-indice:

$$\begin{aligned} G_3 - H_3 &= \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^2 \\ |m|+|n|=3}} (G_3)_{mn} w^m z^n - \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^2 \\ |m|+|n|=3}} (H_3)_{mn} w^m z^n = \\ &= \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^2 \\ |m|+|n|=3}} [(G_3)_{mn} - (H_3)_{mn}] w^m z^n. \end{aligned}$$

Per la condizione (1) si ha

$$\sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^2 \\ |m|+|n|=3}} [i\omega \cdot (m - n) \chi_{mn}] w^m z^n = \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^2 \\ |m|+|n|=3}} [(G_3)_{mn} - (H_3)_{mn}] w^m z^n$$

cioè

$$i\omega \cdot (m - n) \chi_{mn} = (G_3)_{mn} - (H_3)_{mn} \quad \forall m, n. \quad (2)$$

Se  $\omega$  non è risonante di ordine 3, allora  $\forall k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  si ha  $k \cdot \omega \neq 0$ . In particolare  $\omega \cdot (m - n) \neq 0 \quad \forall m \neq n$ . Allora una soluzione di (2) è

$$\begin{cases} \chi_{mn} = \frac{-(H_3)_{mn}}{i\omega \cdot (m - n)} \\ (G_3)_{mn} = 0 \end{cases}.$$

Se invece  $m - n = 0$  allora è

$$\begin{cases} \chi_{mm} = 0 \\ (G_3)_{mm} = (H_3)_{mm} \end{cases} .$$

Quindi nel caso di  $\omega$  non risonante fino all'ordine 3, l'hamiltoniana ha la forma normale

$$H_2 + \bar{H}_3 + \dots \quad (3)$$

dove

$$\bar{H}_3 = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^2 \\ |m|=3}} (H_3)_{mm} w^m z^m$$

che è chiaramente nullo.

Se invece  $\omega$  è risonante allora esiste  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tale che  $k \cdot \omega = 0$ . In particolare  $\omega \cdot (m - n) = 0 \quad \forall m, n$  tali che  $m - n \parallel k$ . Se  $(m - n) \parallel k$ , una soluzione di (2) è

$$\begin{cases} \chi_{mn} = 0 \\ (G_3)_{mn} = (H_3)_{mn} \end{cases}$$

mentre se  $(m - n) \not\parallel k$  è

$$\begin{cases} \chi_{mn} = \frac{-(H_3)_{mn}}{i\omega \cdot (m-n)} \\ (G_3)_{mn} = 0 \end{cases} .$$

L'hamiltoniana assume, quindi, la forma

$$H_2 + \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{N}^2 \\ m-n \parallel k \\ |m|+|n|=3}} (H_3)_{mn} w^m z^n + \dots \quad (4)$$

Nel caso in cui  $\omega$  sia risonante 1:2 allora  $k = (1, 2)$ . Quindi, affinché  $(m - n) \parallel k$ , si deve avere

$$\begin{cases} m_1 - n_1 = 1 \\ m_2 - n_2 = 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} m_1 - n_1 = -1 \\ m_2 - n_2 = -2 \end{cases} .$$

Le uniche possibilità sono

$$\begin{cases} m = (1, 2) \\ n = (0, 0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} m = (0, 0) \\ n = (1, 2) \end{cases} .$$

L'hamiltoniana (4) diventa quindi

$$H_2 + [(H_3)_{(1,2)(0,0)} w_1 w_2^2 + (H_3)_{(0,0)(1,2)} z_1 z_2^2] + \dots$$

Operando il cambio di coordinate canonico

$$w_j = \sqrt{I_j} e^{-i\varphi_j}, \quad z_j = \sqrt{I_j} e^{i\varphi_j},$$

il termine di grado 3 della nuova hamiltoniana assume la forma

$$(H_3)_{(1,2)(0,0)} \sqrt{I_1} I_2 e^{-i(\varphi_1+2\varphi_2)} + (H_3)_{(0,0)(1,2)} \sqrt{I_1} I_2 e^{i(\varphi_1+2\varphi_2)},$$

dove i coefficienti  $(H_3)_{(1,2)(0,0)}$  e  $(H_3)_{(0,0)(1,2)}$  sono uno il coniugato dell'altro.

Inoltre applicando l'identità trigonometrica

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \vartheta) \quad \text{con} \quad \tan \vartheta = \frac{b}{a},$$

e operando una traslazione dell'angolo, questa hamiltoniana può essere portata nella forma

$$\delta \sqrt{I_1} I_2 \cos \psi,$$

dove  $\psi = \varphi_1 + 2\varphi_2$  e  $\delta$  è una costante.

La forma normale dell'hamiltoniana con  $\omega$  risonante 1:2 è quindi

$$H = 2\omega I_1 - \omega I_2 + \delta \sqrt{I_1} I_2 \cos \psi + H^*$$

dove  $H^* = O((I_1 + I_2)^2)$ .

Per normalizzare l'hamiltoniana al grado successivo, basterà iterare la procedura appena descritta a partire dall'hamiltoniana (3).

Stavolta la condizione da imporre sarà

$$\{\chi, H_2\} = G_4 - \widehat{H}_4$$

dove  $\widehat{H}_4$  indica il termine di grado 4 dell'hamiltoniana (3) e l'equazione da risolvere sarà

$$i\omega \cdot (m - n) \chi_{mn} = (G_4)_{mn} - (\widehat{H}_4)_{mn}. \quad (5)$$

Se  $\omega$  non è risonante di ordine 4, allora  $\forall k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  si ha  $k \cdot \omega \neq 0$ . In particolare  $\omega \cdot (m - n) \neq 0 \quad \forall m \neq n$ . Allora una soluzione di (5) è

$$\begin{cases} \chi_{mn} = \frac{-(\widehat{H}_4)_{mn}}{i\omega \cdot (m-n)} \\ (G_4)_{mn} = 0 \end{cases}$$

Se invece  $m - n = 0$  allora è

$$\begin{cases} \chi_{mm} = 0 \\ (G_4)_{mm} = (\widehat{H}_4)_{mm} \end{cases} .$$

Quindi nel caso di  $\omega$  non risonante fino all'ordine 4, l'hamiltoniana ha la forma normale

$$H_2 + \bar{H}_4 + \dots$$

dove  $\bar{H}_4 = \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^2 \\ m-n \parallel k \\ |m|+|n|=4}} (\hat{H}_4)_{mn} w^m z^n$  che a differenza di  $\bar{H}_3$  non è nulla.

Se invece  $\omega$  è risonante allora esiste  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tale che  $k \cdot \omega = 0$ . In particolare  $\omega \cdot (m - n) = 0 \quad \forall m, n$  tali che  $m - n \parallel k$ . Se  $m - n \parallel k$  allora una soluzione di (5) è

$$\begin{cases} \chi_{mn} = 0 \\ (G_4)_{mn} = (\hat{H}_4)_{mn} \end{cases}$$

mentre se  $m - n \not\parallel k$  è

$$\begin{cases} \chi_{mn} = \frac{-(\hat{H}_4)_{mn}}{i\omega \cdot (m-n)} \\ (G_4)_{mn} = 0 \end{cases} .$$

L'hamiltoniana assume quindi la forma

$$H_2 + \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^2 \\ m-n \parallel k \\ |m|+|n|=4}} (\hat{H}_4)_{mn} w^m z^n + \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^2 \\ m-n \not\parallel k \\ |m|+|n|=4}} (\hat{H}_4)_{mn} w^m z^n + \dots \quad (6)$$

Nel caso in cui  $\omega$  sia risonante 1:3 allora  $k = (1, 3)$ . Quindi, affinché  $(m - n) \parallel k$ , si deve avere

$$\begin{cases} m_1 - n_1 = 1 \\ m_2 - n_2 = 3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} m_1 - n_1 = -1 \\ m_2 - n_2 = -3 \end{cases} .$$

Le uniche possibilità sono

$$\begin{cases} m = (1, 3) \\ n = (0, 0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} m = (0, 0) \\ n = (1, 3) \end{cases} .$$

L'hamiltoniana (6) diventa quindi

$$H_2 + [(\hat{H}_4)_{(1,3)(0,0)} w_1 w_2^3 + (\hat{H}_4)_{(0,0)(1,3)} z_1 z_2^3] + \bar{H}_4 + \dots$$

Operando il cambio di coordinate canonico

$$w_j = \sqrt{I_j} e^{-i\varphi_j} \quad z_j = \sqrt{I_j} e^{i\varphi_j},$$

il termine di grado 4 della nuova hamiltoniana assume la forma

$$(\hat{H}_4)_{(1,3)(0,0)} I_1^{1/2} I_2^{3/2} e^{-i(\varphi_1+3\varphi_2)} + (\hat{H}_4)_{(0,0)(1,3)} I_1^{1/2} I_2^{3/2} e^{i(\varphi_1+3\varphi_2)} + \bar{H}_4$$

che può essere portato nella forma

$$\delta I_1^{1/2} I_2^{3/2} \cos \psi + \bar{H}_4$$

dove  $\psi = \varphi_1 + 3\varphi_2$ ,  $\delta$  una costante e  $\bar{H}_4$  è un polinomio di grado 2 nelle  $I$  della forma  $\frac{1}{2}(aI_1^2 + 2bI_1I_2 + cI_2^2)$ , con  $a, b, c$  delle costanti.

La forma normale dell'hamiltoniana con  $\omega$  risonante 1:3 è quindi

$$H = 3\omega I_1 - \omega I_2 + \delta I_1^{1/2} I_2^{3/2} \cos \psi + \frac{1}{2}(aI_1^2 + 2bI_1I_2 + cI_2^2) + H^*$$

dove  $H^* = O((I_1 + I_2)^{5/2})$ .

# Bibliografia

- [1] Alfriend K. T., *The stability of the triangular Lagrangian points for commensurability of order two*, Celestial Mechanics **1**, 1970, 351-359.
- [2] Alfriend K. T., *Stability of and motion about  $\mathcal{L}_4$  at three-to-one commensurability*, Celestial Mechanics **4**, 1971, 60-77.
- [3] Alfriend K. T. e Richardson D. L., *Third and fourth order resonances in hamiltonian systems*, Celestial Mechanics **7**, 1973, 408-420.
- [4] Arnold V. I., *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti university press, 2010.
- [5] Bambusi D., *An introduction to Birkhoff normal form*, Università di Milano, 2014.
- [6] Barrow-Green J., *Il problema dei tre corpi e la stabilità del Sistema Solare*, [http://www.treccani.it/enciclopedia/l-ottocento-astronomia-il-problema-dei-tre-corpi-e-la-stabilita-del-sistema-solare\\_%28Storia-della-Scienza%29/](http://www.treccani.it/enciclopedia/l-ottocento-astronomia-il-problema-dei-tre-corpi-e-la-stabilita-del-sistema-solare_%28Storia-della-Scienza%29/)
- [7] Benacchio T., *Stability of  $\mathcal{L}_4$  and  $\mathcal{L}_5$  in the restricted planar three-body problem*, Tesi di laurea, Università di Padova, A. A. 2006-2007.
- [8] Benettin G., *Appunti per il corso di meccanica analitica*, Università di Padova, 2014.
- [9] Cardin F., *Sistemi dinamici meccanici*, Università di Padova, 2011.
- [10] Deprit A. e Deprit-Bartolomê A., *Stability of the Lagrange points*, The Astronomical Journal **72(2)**, 1967, 173-179.
- [11] Fassò F., *Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica*, Università di Padova, 2013.
- [12] Fassò F., *Note per la II parte del corso di meccanica hamiltoniana per il corso di laurea in fisica*, Università di Padova, 2013.

- [13] Markeev A. P., *On the stability of the triangular libration points in the circular bounded three body problem*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics **33**, 1966, 105-110.
- [14] Meyer K. R., Hall G. R. e Offin D., *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer, 2009.
- [15] Meyer K. R. e Schmidt D. S., *The stability of the Lagrange triangular point and a theorem of Arnold*, Journal of Differential Equations **62**, 1986, 222-236.