UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA E APPLICATA
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di laurea
UNA RECENTE DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA KAM

Relatore
Ch.mo Prof. Francesco Fassò

Laureando
Stefano Pasquali

Anno Accademico 2010-2011

Contents

1	Introduzione	3
1.1	Scopo della tesi	3
1.2	Il Teorema KAM	4
1.3	Panoramica sulle dimostrazioni del Teorema KAM	5
2	L'approccio di Pöschel: notazione ed enunciato	8
3	Alcune generalità sulle funzioni analitiche	10
4	Una stima per i polinomi trigonometrici	12
5	La dimostrazione di Pöschel	14
5.1	Il passo base della costruzione perturbativa	14
5.1.1	Decomposizione della perturbazione	15
5.1.2	Stima dei piccoli divisori	16
5.1.3	Stima della soluzione dell'equazione omologica	17
5.1.4	Il cambiamento di coordinate	18
5.1.5	Stima della nuova perturbazione	19
5.1.6	Trasformazione delle frequenze	21
5.2	Iterazione	23
5.3	Convergenza	26
6	Appendice	29

1 Introduzione

1.1 Scopo della tesi

Nello studio dei sistemi di equazioni differenziali associati a numerosi problemi di interesse fisico, e non solo, la dinamica può essere molto complessa.

Ne sono un esempio i sistemi hamiltoniani quasi-integrabili, cioè retti da un'Hamiltoniana

$$H(I, \vartheta) = h(I) + f(I, \vartheta) \quad (1)$$

dove le variabili $I \in B \overset{\text{aperto}}{\subset} \mathbb{R}^n$ e le variabili $\vartheta \in \mathbb{T}^n$ costituiscono le cosiddette variabili azione-angolo del sistema, mentre la funzione $h(I)$ è detta *parte imperturbata*.

L'ambiente della Meccanica Hamiltoniana si è rivelato adatto a descrivere i sistemi detti integrabili alla Liouville. Questi, infatti, possono essere ricondotti tramite trasformazioni canoniche a sistemi aventi come Hamiltoniana:

$$H(I, \vartheta) = h(I)$$

le cui equazioni di Hamilton associate

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 0 \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial h}{\partial I}(I) =: \omega(I) \end{aligned}$$

sono banalmente risolte da

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \\ \vartheta(t) &= \vartheta_0 + t\omega(I_0) \end{aligned}$$

cioè da moti lineari su tori n-dimensionali, genericamente quasi-periodici.

Un generico sistema integrabile perturbato risulterà invece non integrabile, a causa della dipendenza dell'Hamiltoniana H dagli angoli ϑ ; è lecito chiedersi, comunque, sotto quali ipotesi i moti quasi-periodici persistano, eventualmente deformati. Questo è il problema studiato dalla teoria KAM, che garantisce la continuità di interi tori invarianti se:

- sono verificate particolari condizioni strutturali sul sistema, ad esempio se è Hamiltoniano o se soddisfa certe condizioni di reversibilità;
- le frequenze di questi tori soddisfano certe condizioni di tipo aritmetico.

La teoria KAM è una branca relativamente recente ma di enorme importanza in meccanica classica, come è riportato in [1] e [5]. Lo scopo della tesi è quello di presentare una recente dimostrazione del Teorema KAM, dovuta a Rüssmann (vd. [11]) e a Pöschel (vd. [10]), evidenziandone le peculiarità e le somiglianze con altri approcci adottati precedentemente.

Per un'introduzione più estesa alla Meccanica Hamiltoniana ed ai problemi della Teoria delle Perturbazioni si rimanda il lettore a [2] e a [3].

1.2 Il Teorema KAM

Il teorema KAM è stato inizialmente introdotto da Kolmogorov nel 1954, che ne diede una dimostrazione priva di numerosi dettagli; successivamente fu ripreso da Moser nel 1961 e da Arnol'd nel 1962 (un'esposizione dettagliata e corredata di problemi legati alla meccanica celeste si può trovare in [2]).

In esso si garantisce la continuabilità delle soluzioni quasi-periodiche di un sistema hamiltoniano quasi-integrabile con dato iniziale (I, ϑ) per valori di $\|f\|$ al di sotto di una certa soglia (in una norma opportuna) se valgono alcune ipotesi di regolarità su H , di non-degenerazione di h e se $\omega(I)$ è fortemente non-risonante, il caso più noto del quale è la condizione diofantea di Siegel (1942), che impone che la frequenza $\omega(I) \in \mathbb{R}^n$ soddisfi per qualche $\gamma > 0$ e per qualche $\nu > n - 1$ le seguenti disuguaglianze ($|\cdot|$ denota la 1-norma per vettori interi):

$$\langle \omega(I), k \rangle \geq \frac{\gamma}{|k|^\nu} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}. \quad (2)$$

Una frequenza che soddisfa la condizione precedente viene detta (γ, ν) -diofantina. È noto che, una volta fissati $\gamma > 0$ e $\nu > n - 1$, l'insieme delle frequenze (γ, ν) diofantea ha misura grande:

Proposizione 1.1. Sia B_R la palla centrata in 0 e di raggio R in $\mathbb{R}^n$, e sia $\Omega_{\gamma, \nu} \subset B_R$ l'insieme delle frequenze in cui vale (2).

Allora se $\nu > n - 1$ e γ è piccolo l'insieme $\Omega_{\gamma, \nu}$ è un chiuso con interno vuoto, ma ha misura di Lebesgue grande. In particolare vale

$$\frac{\lambda_n(B_R \setminus \Omega_{\gamma, \nu})}{\lambda_n(B_R)} < C_{n, \nu} \frac{\gamma}{R}$$

dove $C_{n, \nu}$ è una costante dipendente solo da n e da ν , e dove con λ_n si indica l'usuale misura di Lebesgue n -dimensionale.

Si può inoltre generalizzare il risultato precedente affermando che, fissato $\nu > n - 1$, quasi-ogni frequenza in $\mathbb{R}^n$ è (γ, ν) -diofantina per qualche $\gamma > 0$, nel senso della misura di Lebesgue (vd. [9]).

Una formulazione tipica del Teorema KAM è la seguente (vd. [9]):

Teorema 1.1. (KAM classico) Siano $(I, \vartheta) \in B \times \mathbb{T}^n$, e siano $\gamma > 0$ e $\nu > n - 1$ fissati. Si consideri un'Hamiltoniana $H(I, \vartheta) = h(I) + f(I, \vartheta)$, e si supponga

- che l'Hamiltoniana imperturbata h sia non degenere;
- che la mappa delle frequenze $\omega : B \rightarrow \omega(B)$ sia un diffeomorfismo;
- che H sia analitica su un'estensione complessa di $B \times \mathbb{T}^n$.

Allora $\forall \Omega_{\gamma, \nu}$ compatto di $\mathbb{R}^n$ che consiste di frequenze fortemente non-risonanti (γ, ν) -diofantee, se $|f|$ è abbastanza piccola, tutti i moti lineari sui tori del sistema imperturbato aventi frequenze $\omega \in \Omega_{\gamma, \nu}$ persistono, eventualmente deformati, e con le stesse frequenze. Inoltre i tori invarianti dipendono in maniera lipschitziana da ω e ricoprono lo spazio delle fasi $B \times \mathbb{T}^n$ a meno di un insieme di misura $O(|f|^{1/2})$.

1.3 Panoramica sulle dimostrazioni del Teorema KAM

Una delle peculiarità del Teorema KAM è che il dominio dello spazio delle fasi in cui esso vale è un chiuso di misura grande, ma con interno vuoto: ciò pregiudica la possibilità di definire un diffeomorfismo canonico definito su un aperto che coniughi l'Hamiltoniana del sistema perturbato alla sua parte imperturbata.

Per mostrare la causa di queste difficoltà, ci proponiamo di mostrare un passo perturbativo nella trattazione di un sistema hamiltoniano perturbato. Si consideri l'Hamiltoniana $H(I, \vartheta) = h(I) + f(I, \vartheta)$ dove $\|f\|_\infty \ll 1$. Si vuole vedere se è possibile coniugare questa hamiltoniana ad una del tipo $\tilde{H}(I, \vartheta) = \tilde{h}(\tilde{I}) + \tilde{f}(\tilde{I}, \tilde{\vartheta})$ con $\|\tilde{f}\|_\infty \sim \|f\|_\infty^2$.

Se per la coniugazione ci si avvallesse della mappa al tempo 1 del flusso di un'Hamiltoniana $\chi(\tilde{I}, \tilde{\vartheta})$, che è una trasformazione canonica, si avrebbe

$$H \circ \Phi_\chi^1 = H + \{\chi, H\} + O(\|\chi\|_\infty^2)$$

e si vorrebbe che ciò fosse uguale a

$$h + f_0 + O(\|\chi\|_\infty^2)$$

dove f_0 è la media di f sugli angoli. Segue da ciò la cosiddetta

Equazione Omologica.

$$\{h, \chi\} = f_0 - f$$

Sviluppando la funzione χ in serie di Fourier in modo formale, si evince che si può effettuare il passo perturbativo se e solo se le componenti di Fourier di χ e di f soddisfano

$$i \langle \omega(I), k \rangle \chi_k(I) = f_k(I) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$$

ma se la perturbazione f ammette uno sviluppo di Fourier pieno (vd. proposizione successiva), allora si possono avere problemi di convergenza per la serie di Fourier che definisce χ : questo è l'effetto dei "piccoli denominatori", che costringono ad adottare tecniche piuttosto sottili per superare queste difficoltà (ipotesi come la condizione diofantea di Siegel sono state formulate proprio in questa ottica).

Sin da Poincarè erano noti casi in cui l'equazione omologica non poteva essere risolta, e ne è un esempio la seguente

Proposizione 1.2. (Poincarè) Si consideri

$$H(I, \vartheta) = h(I) + \epsilon f(I, \vartheta) \quad (I, \vartheta) \in B \times \mathbb{T}^n$$

e si supponga che:

- h sia non degenere, cioè $\det(\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}) \neq 0$ in un aperto $B_0 \subseteq B$;
- f abbia uno sviluppo di Fourier pieno, ossia se data

$$f(I, \vartheta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k(I) e^{i \langle k, \vartheta \rangle}$$

valga che $\forall k \in \mathbb{Z}^n \exists \bar{k}$ parallelo a k t.c. $f_{\bar{k}}(I) \neq 0$ in B_0 .

Allora non esiste una funzione differenziabile χ che risolva l'equazione omologica in B_0 .

Infatti, la non degenerazione di h porge il fatto che $\omega : B_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo locale, pertanto l'insieme dei punti aventi frequenza risonante è denso in B_0 . D'altra parte, il fatto che f abbia uno sviluppo di Fourier pieno implica che in ogni aperto $B \subseteq B_0$ esiste almeno un I^* t.c. $\langle \omega(I^*), k \rangle = 0$ per un $k \in \mathbb{Z}^n$ t.c. $f_k(I^*) \neq 0$. Pertanto in questo caso non si può risolvere

l'equazione omologica, e il passo perturbativo non può essere compiuto.

Sono stati trovati molti modi per superare il problema dei piccoli divisori: Kolmogorov ha introdotto il teorema KAM tramite lo studio di forme normali adattate ad un singolo toro, Arnol'd ha adottato lo schema della "convergenza quadratica" e Moser, in [8], ha introdotto una tecnica che sfrutta dei parametri ausiliari. Tecniche più recenti, ad esempio, hanno sfruttato lo sviluppo delle soluzioni quasi-periodiche delle equazioni del moto tramite serie formali semplicemente o addirittura assolutamente convergenti, impiegando le cosiddette serie di Lindstedt (per ulteriori approfondimenti si consiglia la lettura di [6] e di [7]).

Fra queste la tecnica più usata per la dimostrazione del teorema KAM è quella di Arnol'd, che sfrutta la cosiddetta "convergenza quadratica": ad ogni passo si definisce una trasformazione canonica prossima all'identità $(I, \vartheta) = w_m(\tilde{I}, \tilde{\vartheta})$ che coniuga l'Hamiltoniana analitica

$$H_m(I, \vartheta) = h_m(I) + f_m(I, \vartheta)$$

con l'Hamiltoniana

$$H_{m+1}(\tilde{I}, \tilde{\vartheta}) := H_m \circ w_m(\tilde{I}, \tilde{\vartheta}) = h_{m+1}(\tilde{I}) + f_{m+1}(\tilde{I}, \tilde{\vartheta})$$

dove vale la stima $\|f_{m+1}\|_\infty = O(\|f_m\|_\infty^\kappa)$ per qualche $\kappa > 1$. Sotto delle ipotesi aggiuntive si ha che, posta $W_m = w_m \circ \dots \circ w_1$, la successione $(W_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge ad un embedding di tori invarianti, definito su un solo punto dello spazio delle azioni.

Con questo metodo ad ogni passo, dopo aver definito una conveniente trasformazione canonica w_m , è necessario trasformare le frequenze per ottenere l'(m+1)-esima parte imperturbata e si deve dunque definire una trasformazione definita in un aperto nello spazio delle frequenze. Si ovvia a questo problema approssimando la perturbazione $f_m(I, \vartheta)$ con un polinomio trigonometrico negli angoli di un opportuno ordine N_m

$$g_m(I, \vartheta) = \sum_{k \leq N_m} \hat{f}_k(I) e^{i\langle k, \vartheta \rangle}$$

detta anche "parte infrarossa" (o parte IR) della perturbazione. L'ordine N_m del polinomio trigonometrico g_m è detto cut-off.

Recentemente Pöschel, sviluppando un'idea di Rüssmann (vd. [11]), ha proposto in [10] un'argomentazione che evita la necessità della convergenza quadratica della costruzione di tipo iterativo di forme normali. Un ingrediente tecnico è una migliore stima sulla soluzione dell'equazione omologica. La successione delle norme dei resti decresce geometricamente

$$|f_{m+1}| \leq q|f_m|$$

con ragione $q \in]0, 1[$.

2 L'approccio di Pöschel: notazione ed enunciato

Nel seguito della tesi il simbolo $|\cdot|$ denoterà la norma-1 per vettori interi, $|v| = |v_1| + \dots + |v_n| \forall v \in \mathbb{Z}^n$, e la sup-norma per vettori reali o complessi, $|v| = \sup_{i=1, \dots, n} |v_i| \forall v \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$. Poi, fissato $\nu > n-1$, si definisce per ogni $\gamma > 0$

$$\Omega(\gamma) = \{\omega \in \mathbb{R}^n : |\langle \omega, k \rangle| \geq \gamma/|k|^\nu\}.$$

Con un riscaldamento del tempo ci si può ricondurre al solo $\Omega(2)$, che nel seguito denoteremo con Ω .

Inoltre, per ogni $s > 0$ ed $h > 0$, definiamo

$$D_s := \{\vartheta \in \mathbb{T}^n : |\text{Im}(\vartheta)| < s\}, \quad \Omega_h := \{z \in \mathbb{C}^n : \text{dist}_\infty(z, \Omega) < h\} \quad (3)$$

dove dist_∞ indica la distanza in $(\mathbb{C}^n, |\cdot|)$.

Inoltre, per ogni campo vettoriale analitico in $D_s \times \Omega_h$ e che sia della forma

$$P(\omega, \vartheta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} p_k(\omega) e^{i\langle k, \vartheta \rangle},$$

dove i vettori $p_k \in \mathbb{C}^n$ sono le componenti di Fourier al variare di $k \in \mathbb{Z}^n$, si definisce la norma pesata:

$$|P|_{s,h} := \sup_{\omega \in \Omega_h} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |p_k(\omega)| e^{|k|s}. \quad (4)$$

La versione del Teorema KAM dimostrata da Pöschel con la nuova tecnica è un caso particolare del più generale Teorema 1.1.

Teorema 2.1. (KAM) Sia τ tale che

$$\mathcal{R} := 8(\nu + 1) \int_\tau^\infty \frac{\log(t)}{t^2} dt < +\infty.$$

Nelle notazioni precedenti, si supponga che il campo vettoriale $X(\omega, \vartheta) = F(\omega) + G(\omega, \vartheta)$ sia reale analitico su $\Omega_{\mathcal{H}} \times D_S$, dove F è un campo vettoriale costante su $\mathbb{T}^n$,

$$\mathcal{H} < \frac{1}{\tau^{\nu+1}}, \quad S > 2\mathcal{R},$$

e

$$\epsilon := |G|_{S,\mathcal{H}} < \frac{\mathcal{H}}{16}. \quad (5)$$

Allora esistono una mappa reale $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega_{\mathcal{H}}$ e, $\forall \omega \in \Omega$, un cambiamento di coordinate $\Phi(\omega)$ reale analitico e definito su $\mathbb{T}^n$ tale che

$$\Phi(\omega)^*(\varphi(\omega) + G) = \omega.$$

Inoltre si ha che, $|\varphi - id|_{\Omega} \leq \epsilon$, $|\Phi - id|_{S^{-2}\mathcal{R}, \Omega} \leq \epsilon\tau^{\nu+1}/2$.

In realtà il Teorema KAM può essere dimostrato introducendo una definizione di frequenza fortemente non-risonante più debole di quella diofantea.

Definizione 2.1. (vd. [11]) Una funzione crescente e illimitata $\Delta : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ è detta *funzione approssimante secondo Brjuno-Rüssmann* se soddisfa

$$\int_1^{\infty} \frac{\log \Delta(t)}{t^2} dt < +\infty. \quad (6)$$

Si definiscono *frequenze fortemente non-risonanti* le $\omega \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\alpha}{\Delta(|k|)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$$

per qualche $\alpha > 0$ e per qualche funzione approssimante Δ .

Chiaramente la funzione $\Delta(t) = t^{\nu}$ con $\nu > n - 1$ è una funzione approssimante, essendo

$$\int_1^{\infty} \frac{\log(t^{\nu})}{t^2} dt = \nu \int_1^{\infty} \frac{\log(t)}{t^2} dt = \nu \left[-\frac{1}{t} - \frac{\log(t)}{t} \right]_1^{\infty} = \nu < +\infty$$

e la definizione di Rüssmann è più generale di quella di Siegel. Per semplicità nel seguito considereremo solo le funzioni approssimanti nella forma di Siegel, ma ogni risultato vale anche per una generica funzione approssimante.

La strategia di Pöschel consisterà nello scindere la perturbazione in una parte IR modificata e in una parte UV modificata che conterrà in modo opportuno anche coefficienti di Fourier di ordine basso, e nello stimare la prima con la tecnica presentata da Rüssmann in [11].

Prima della dimostrazione del Teorema 2.1 seguono alcune generalità sulle funzioni analitiche e le stime dovute a Rüssmann.

3 Alcune generalità sulle funzioni analitiche

Questa sezione espone dei risultati fondamentali che possono essere ritrovati in ogni testo classico di analisi, ad esempio in [4] (cap.10).

Nella dimostrazione del Teorema KAM, infatti, si considereranno funzioni analitiche nelle variabili frequenze-angolo (ω, ϑ) dove $\omega \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, e $\vartheta \in \mathbb{T}^n$.

Le funzioni trattate nel seguito sono analitiche. La scrittura $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}^{\infty}$ denoterà la sup-norma per funzioni a valori complessi definite in un generico dominio C , $|f|_{\mathbb{C}}^{\infty} = \sup_{z \in C} |f(z)|$.

Formula di Cauchy(per il circolo) 3.1. Sia $A \stackrel{\text{aperto}}{\subseteq} \mathbb{C}$, e sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analitica. Siano poi $c \in A$ e $r > 0$ tale che $B(c, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| \leq r\} \subseteq A$. Allora $\forall z \in B(c, r]$ si ha che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Proposizione (stime di Cauchy per le funzioni analitiche) 3.2. Sia $\rho > 0$, sia $B_{\rho} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$ e sia $f : B_{\rho} \rightarrow \mathbb{C}$ analitica. Allora $\forall 0 < \delta < \rho$ e $\forall r \in \mathbb{N}$ vale:

$$|f^{(r)}(0)| \leq r! \frac{|f|_{\rho}}{\delta^r}$$

Dimostrazione. Infatti derivando la formula di Cauchy si ha che $\forall r \in \mathbb{N}$

$$f^{(r)}(0) = \frac{r!}{2\pi i} \int_{\partial B_{\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{r+1}} d\zeta$$

da cui segue che

$$|f^{(r)}(0)| \leq \frac{r!}{2\pi} \int_{\partial B_{\delta}} \frac{|f|_{\rho}}{|\zeta|^{r+1}} |d\zeta| \leq \frac{r!}{2\pi} |f|_{\rho} \frac{2\pi\delta}{\delta^{r+1}}.$$

□

Da qui segue la

Proposizione (stima della decrescita delle componenti di Fourier per le funzioni analitiche) 3.3. Sia $f : D_s \rightarrow \mathbb{C}$ analitica per qualche $s > 0$. Allora $\forall k \in \mathbb{Z}^n$ vale la seguente stima:

$$|f_k| \leq \|f\|_{D_s}^{\infty} e^{-|k|s}, \quad (7)$$

dove f_k è il k-esimo coefficiente di Fourier nello sviluppo in serie

$$f(\vartheta) = \sum_k f_k e^{i\langle k, \vartheta \rangle}.$$

Dimostrazione. Infatti i coefficienti di Fourier f_k di f sono dati da

$$f_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\vartheta) e^{-i\langle k, \vartheta \rangle} d\vartheta$$

Dato che l'integrale di una funzione analitica lungo un circuito nullomotopico è nullo, e dato che f è periodica in ogni argomento anche nei complessi, il cammino di integrazione può essere spostato nei complessi, così che

$$f_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\vartheta - i\varphi) e^{-i\langle k, \vartheta - i\varphi \rangle} d\vartheta$$

per ogni vettore reale costante φ con $|\varphi| < s$. Scegliendo $\varphi = (s - \delta)(e_1, \dots, e_n)$ con $e_j = \text{sgn}(k_j)$ per $j = 1, \dots, n$ si ha che

$$|f_k| \leq \|f\|_{D_s}^\infty e^{-|k|(s-\delta)} \quad \forall 0 < \delta < s$$

e passando al $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ si conclude.

□

4 Una stima per i polinomi trigonometrici

Enunciamo qui la stima proposta da Rüssmann in [11], che permette di stimare i polinomi trigonometrici noti su arbitrari domini prodotto di dischi e strisce. Nella dimostrazione del Teorema 2.1 dovuta a Pöschel non si utilizzano le stime riportate di seguito, in quanto la stima della parte IR modificata è ottenuta tramite tecniche standard. Se si volesse usare la tecnica riportata in [10] per provare il Teorema 1.1, invece, servirebbero le stime di Rüssmann, che per completezza qui riportiamo.

Premettiamo un po' di notazione:

Dati $a, b \in \mathbb{C}^n$, si denoterà con $\langle a, b \rangle$ il prodotto scalare hermitiano.

Si fissi $d > 0$, e siano $m_1, \dots, m_d \geq 0$ naturali fissati, allora si porrà

$$m := m_1 + \dots + m_d.$$

Decomponendo $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_d}$ si consideri $v \in \mathbb{C}^m$, dove $v = (v_1, \dots, v_d)$ e $v_j \in \mathbb{C}^{m_j}$ per ogni $j=1, \dots, d$.

Inoltre, per ogni

$$v_j = (v_{j1}, \dots, v_{jm_j}) \in \mathbb{C}^{m_j}$$

e per ogni

$$l_j = (l_{j1}, \dots, l_{jm_j}) \in \mathbb{N}^{m_j},$$

definiamo

$$v_j^{l_j} := v_{j1}^{l_{j1}} \dots v_{jm_j}^{l_{jm_j}},$$

dove $l_j^* := l_{j1} + \dots + l_{jm_j}$ si chiama *grado* del monomio $v_j^{l_j}$.

Se $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{C}^m$ e $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{N}^m$, si definisce

$$v^l := v_1^{l_1} \dots v_d^{l_d}.$$

Infine, fissata per ogni $j=1, \dots, d$ una arbitraria norma $\|\cdot\|_j$ su $\mathbb{C}^{m_j}$, e dati $r > 0$ e $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{R}^d$ con $s_j > 0 \forall j$, si definiscono

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_s &:= \{v \in \mathbb{C}^m : \|v_j\|_j < s_j \forall j = 1, \dots, d\}, \\ \mathcal{S}_r &:= \{x \in \mathbb{C}^m : |Im(x_j)| < r \forall j = 1, \dots, d\}. \end{aligned}$$

Inoltre, se $F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$, la notazione $\|F\|_{r,s}^\infty$ denoterà la sup-norma di F su $\mathcal{S}_r \times \mathcal{V}_s$.

Proposizione 4.1. Dati un insieme finito $I \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}^m$ e, per ogni $(k, l) \in I$, un complesso $F_{kl} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sia $F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ data da

$$F(x, v) = \sum_{(k,l) \in I} F_{kl} v^l e^{i\langle k, x \rangle}.$$

Allora per ogni $r > 0$ e per ogni $s \in \mathbb{R}^d$ con $s > 0$ si ha che $\forall (x, v) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$

$$|F(x, v)| \leq M(x, v) \|F\|_{r,s}^\infty$$

dove

$$M(x, v) := \max_{(k,l) \in I} \left\{ \max[1, e^{|k|(|\text{Im}(x)|_\infty - r)}] \left(\frac{\|v_1\|_1}{s_1}\right)^{l_1} \dots \left(\frac{\|v_d\|_d}{s_d}\right)^{l_d} \right\}.$$

Per la dimostrazione si consiglia la lettura di [11].

5 La dimostrazione di Pöschel

5.1 Il passo base della costruzione perturbativa

In questa sezione è descritto il singolo passo dell'iterazione usata nella dimostrazione di Pöschel. Si consideri un campo vettoriale hamiltoniano della forma

$$X(\omega, \vartheta) = N(\omega) + P(\omega, \vartheta) \quad (8)$$

reale e analitico in $\Omega_h \times D_s$, definiti come in (3).

Proposizione 5.1. Siano $0 < \sigma < s/2$ e $\tau \geq 1$. Si ponga $a := 1 - e^{-\sigma\tau}$ e si supponga che $h > 0$ soddisfi

$$h \leq \frac{1}{\tau^{\nu+1}}. \quad (9)$$

Si supponga inoltre che valga

$$|P|_{s,h} := \epsilon < \min \left\{ \frac{h}{2a}, \frac{1}{2\tau^{\nu+1}} \right\}. \quad (10)$$

Allora esiste una trasformazione

$$(\varphi, \Phi) : \Omega_{h-2a\epsilon} \times D_{s-2\sigma} \rightarrow \Omega_h \times D_s$$

che è diffeomorfismo con l'immagine e ha inversa analitica che coniuga il campo vettoriale $X = N + P$ con $X_+ = N + P_+$, e

$$|P_+|_{s-2\sigma, h-2a\epsilon} \leq q\epsilon,$$

dove

$$q = (1 - a + a^2b)(1 + b)e^{a/(1+a)}, \quad (11)$$

con $b = \epsilon\tau^{\nu+1}$.

Inoltre $|\varphi - id|_{h-2a\epsilon} \leq a\epsilon$, $|\Phi - id|_{s-2\sigma, h-2a\epsilon} \leq \sigma\tau^{\nu+1}\epsilon$.

Il resto della sezione è dedicato alla dimostrazione. Nel seguito si analizzerà punto per punto l'articolo di Pöschel [10], confrontandolo ripetutamente con un approccio analogo che utilizza la decomposizione usuale e che evita la stima sui polinomi trigonometrici con la procedura della convergenza super-lineare dell'articolo [9] per coglierne meglio le differenze.

La dimostrazione della Proposizione 5.1 è nelle prossime sottosezioni.

5.1.1 Decomposizione della perturbazione

Il primo passo della dimostrazione è il seguente

Lemma 5.1. Nelle ipotesi della proposizione 5.1 esistono una decomposizione della perturbazione $P = \widetilde{P} + \widehat{P}$ e $\tilde{\sigma} > 0$ tali che $\widetilde{P}$ sia un polinomio trigonometrico di grado τ , e si abbiano le stime

$$|\widehat{P}|_{s-\sigma, h} \leq (1-a)\epsilon, \quad |\widetilde{P}|_{s+\tilde{\sigma}, h} \leq a\epsilon.$$

Dimostrazione. Infatti basta definire $P = \widetilde{P} + \widehat{P}$, con

$$\widehat{P}(\omega, \vartheta) = \sum_{|k| \geq \tau} p_k(\omega) e^{i\langle k, \vartheta \rangle} + (1-a) \sum_{|k| < \tau} p_k(\omega) e^{|k|\sigma} e^{i\langle k, \vartheta \rangle}.$$

Da ciò segue facilmente che

$$|\widehat{P}|_{s-\sigma, h} \leq (1-a)|P|_{s, h} \leq (1-a)\epsilon = e^{-\sigma\tau}\epsilon$$

mentre il resto della perturbazione

$$\widetilde{P} = \sum_{0 < |k| < \tau} \widetilde{p}_k(\omega) e^{i\langle k, \vartheta \rangle}, \quad \widetilde{p}_k(\omega) := (1 - e^{-\sigma\tau} e^{|k|\sigma}) p_k(\omega)$$

soddisfa la stima seguente, per $\tilde{\sigma} = \sigma(1-a)/a$

$$|\widetilde{P}|_{s+\tilde{\sigma}, h} \leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} (1 - e^{-\sigma\tau} e^{t\sigma}) e^{t\tilde{\sigma}} \sum_{|k| < \tau} |p_k| e^{|k|s} \leq a\epsilon = (1 - e^{-\sigma\tau})\epsilon$$

dato che la funzione di cui si prende il sup è decrescente per $0 \leq t \leq \tau$. $\square$

Osservazione 5.1. Si scelga la decomposizione usuale della perturbazione in parte IR e parte UV, fissando un cut-off $\tau > 0$ nel modo seguente

$$P_{IR}(\omega, \vartheta) = \sum_{0 < |k| \leq \tau} p_k(\omega) e^{i\langle k, \vartheta \rangle}, \quad P_{UV}(\omega, \vartheta) = \sum_{|k| \geq \tau} p_k(\omega) e^{i\langle k, \vartheta \rangle}$$

La stima sulla parte UV è analoga a quella mostrata nel lemma 5.1, ricordando che $a = 1 - e^{-\sigma\tau}$,

$$|P_{UV}|_{s-\sigma, h} = \sum_{|k| \geq \tau} |p_k(\omega)| e^{|k|(s-\sigma)} \leq e^{-\sigma\tau} |P|_{s, h} \leq (1-a)\epsilon,$$

mentre la stima sulla parte IR è $|P_{IR}|_{s, h} \leq \epsilon$.

Osservazione 5.2. Anche in [9] la perturbazione $P(I, \vartheta, \omega)$, che in questo caso dipende anche dalle azioni I in un dominio $\{I : |I| < r\}$, è approssimata con una funzione $R(I, \vartheta, \omega)$ che sia affine nelle I e un polinomio trigonometrico nelle ϑ . In seguito, posto Q lo sviluppo di Taylor di P nelle I calcolato per $I = 0$, si ha che

$$|Q|_{r,s,h} \ll \epsilon, \quad |P - Q|_{r/4,s,h} \ll \epsilon/64$$

dove $u \ll v$ indica $u \leq cv$ per una qualche costante $c \geq 1$ che dipende soltanto da n e da v . Troncando poi la serie di Fourier di Q all'ordine τ si ha la stima

$$|R - Q|_{r,s-\sigma,h} \ll \tau^n e^{-\tau\sigma} \epsilon$$

e dato che in seguito si stimerà $\tau^n e^{-\sigma\tau} \ll 1$, si può concludere che

$$|R|_{r,s-\sigma,h} \ll \epsilon.$$

5.1.2 Stima dei piccoli divisori

L'equazione linearizzata $[F, N] = \tilde{P} - \langle P \rangle$ è risolta come al solito da

$$F(\omega, \vartheta) = \sum_{0 < |k| < \tau} \frac{\tilde{p}_k(\omega)}{i\langle k, \omega \rangle} e^{i\langle k, \vartheta \rangle}.$$

Per ottenere una stima dei piccoli denominatori si sfrutta il

Lemma 5.2. Nelle ipotesi della proposizione 5.1 per ogni $\omega \in \Omega_h$ vale la stima $|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{1}{\tau^v}$.

Dimostrazione. Per definizione $\forall \omega \in \Omega_h \exists \omega^* \in \Omega$ tale che $|\omega - \omega^*| < h \leq 1/\tau^{v+1}$ per (10), perciò

$$|\langle k, \omega - \omega^* \rangle| \leq |k| |\omega - \omega^*| \leq \tau h \leq \frac{1}{\tau^v}$$

Ma dato che ω^* soddisfa (2) con $\gamma = 2$, tutti i piccoli divisori ammettono la sottostima

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq |\langle k, \omega^* \rangle| - |\langle k, \omega - \omega^* \rangle| \geq \frac{2}{\tau^v} - \frac{1}{\tau^v} = \frac{1}{\tau^v}.$$

□

Osservazione 5.3. Nell'articolo [9] è riproposta di fatto la stessa stima. Infatti si osservi che la condizione diofantea vale solo su Ω . Ma l'ipotesi

$$h \leq \frac{\gamma}{2\tau^{v+1}}$$

implica che $\forall |k| \leq \tau, k \neq 0$ vale

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\gamma}{2|k|^v}$$

per ogni $\omega \in \Omega_h$. Infatti, poichè per ogni $\omega \in \Omega_h$ esiste qualche $\omega^* \in \Omega$ tale che $|\omega - \omega^*| < h$, si ha che

$$|\langle k, \omega - \omega^* \rangle| \leq |k||\omega - \omega^*| \leq \tau h \leq \frac{\gamma}{2\tau^v} \leq \frac{\gamma}{2|k|^v}$$

per $|k| \leq \tau$, da cui la stima finale per i piccoli divisori.

5.1.3 Stima della soluzione dell'equazione omologica

Sfruttando i lemmi precedenti segue banalmente il

Lemma 5.3. Nelle ipotesi della proposizione 5.1 sia F la soluzione formale dell'equazione omologica $[F, N] = \widetilde{P} - \langle P \rangle$, allora

$$|F|_{s+\widetilde{\sigma}, h} \leq \sigma$$

Dimostrazione. Infatti si ha dal Lemma 5.1 e dal Lemma 5.2 che

$$|F|_{s+\widetilde{\sigma}, h} \leq \tau^v |\widetilde{P}|_{s+\widetilde{\sigma}, h} \leq a\tau^v \epsilon \leq \sigma\tau^{v+1}\epsilon$$

dato che $a = 1 - e^{-\sigma\tau} \leq \tau\sigma$. Si conclude ricordando (10). □

Osservazione 5.4. In [9] si vuole risolvere l'equazione $[F, N] = R - \langle R \rangle$ (dove $\langle \cdot \rangle$ indica nuovamente la media negli angoli). Si ha facilmente che

$$|R|_{r, s-\sigma, h} \ll \epsilon.$$

L'equazione omologica può essere risolta per F uniformemente $\forall \omega \in \Omega_h$, grazie alla stima dei piccoli divisori e grazie al fatto che R è un polinomio trigonometrico. Da qui segue la stima

$$|F|_{r, s-2\sigma, h} \ll \frac{|R|_{r, s-\sigma, h}}{\gamma\sigma^v} \ll \frac{\epsilon}{\gamma\sigma^v}.$$

È importante confrontare le stime della soluzione dell'equazione omologica: in [9] la soluzione è stimata con $O(\epsilon/\sigma^v)$, in [10] la soluzione è stimata con $O(\sigma)$.

Ad essere precisi si può notare che nel Lemma 5.3 si ha la stima

$$|F|_{s+\widetilde{\sigma}, h} \leq a\tau^v \epsilon,$$

mentre da [9] si può dedurre la stima

$$|F|_{r, s-2\sigma, h} \ll \tau^v \epsilon,$$

chiaramente peggiore rispetto alla precedente, dato che $a \in]0, 1[$.

Osservazione 5.5. Analogamente, se si considera la decomposizione $P = P_{IR} + P_{UV}$ descritta nell'Osservazione 5.2, si ha la stima

$$|F|_s \leq \tau^v |P_{IR}|_s \leq \tau^v \epsilon \leq \sigma/a$$

dato che $a \leq \sigma\tau$.

5.1.4 Il cambiamento di coordinate

Come conseguenza il Lemma 5.3 porge

Lemma 5.4. Nelle ipotesi della proposizione 5.1 sia Φ la mappa al tempo 1 del flusso generato dal campo vettoriale F , allora vale

$$|\Phi - id|_{s-2\sigma, h-2a\epsilon} \leq \sigma\tau^{v+1}\epsilon.$$

Dimostrazione. La prova è una conseguenza immediata del Lemma 5.3. Si noti inoltre che

$$\Phi : D_{s-2\sigma} \rightarrow D_{s-\sigma}.$$

□

Osservazione 5.6. Anche in [9] si definisce Φ come la mappa al tempo 1 del flusso X_t^F del campo vettoriale hamiltoniano X^F , e che

$$\Phi : D_{r/8, s-5\sigma, h} \rightarrow D_{r/4, s-4\sigma, h}$$

è definita da

$$\Phi(I, \vartheta, \omega) = (U(I, \vartheta, \omega), V(\vartheta, \omega)).$$

A causa della differente stima della soluzione dell'equazione omologica, si ha che

$$\left| \frac{\partial U}{\partial I} - Id \right| < \frac{\epsilon}{\gamma r \sigma^{v+1}}, \quad \left| \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right| < \frac{\epsilon}{\gamma \sigma^{\tau+2}}, \quad \left| \frac{\partial V}{\partial \vartheta} - Id \right| < \frac{\epsilon}{\gamma r \sigma^{v+1}}.$$

Osservazione 5.7. Con la decomposizione descritta nell'Osservazione 5.2 si ha che il campo vettoriale F genera un flusso, la cui mappa al tempo 1 $\Phi : D_{s-2\sigma} \rightarrow D_{s-\sigma}$ soddisfa

$$|\Phi - id|_{s-2\sigma} \leq \tau^v \epsilon.$$

5.1.5 Stima della nuova perturbazione

Segue il punto centrale dell'argomentazione.

Lemma 5.5. Nelle ipotesi della proposizione 5.1 il cambiamento di coordinate $\Phi : D_{s-2\sigma} \rightarrow D_s$ coniuga il campo vettoriale $X = N + P$ al campo vettoriale $X_+ = N + P_+$, dove, posta F_t la mappa al tempo t del flusso generato dal campo vettoriale F , si ha

$$P_+ = \Phi^* \tilde{P} + \int_0^1 F_t^*[\mathcal{P}, F] dt, \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(t) := t\tilde{P} + (1-t)\langle P \rangle,$$

e vale

$$|P_+|_{s-2\sigma, h-2a\epsilon} \leq q\epsilon,$$

dove q è definito come nella proposizione 5.1.

Dimostrazione. Dato che

$$|\mathcal{P}|_{s+\tilde{\sigma}} \leq t|\tilde{P}|_{s+\tilde{\sigma}} + (1-t)|\langle P \rangle|_{s+\tilde{\sigma}} \leq a\epsilon$$

e che

$$(s + \tilde{\sigma}) - (s - \sigma) = \frac{1-a}{a}\sigma + \sigma = \frac{\sigma}{a}.$$

Sfruttando il Lemma 6.1 si ha che, ponendo $b := \tau^{\nu+1}\epsilon$, vale la stima

$$\|[\mathcal{P}, F]\|_{s-\sigma} \leq \frac{a}{\sigma} |\mathcal{P}|_{s+\tilde{\sigma}} |F|_{s+\tilde{\sigma}} \leq a^2 \tau^{\nu+1} \epsilon^2 = a^2 b \epsilon.$$

In seguito, per sfruttare il Lemma 5.3, si applica il lemma 6.2 con $r = s - \sigma$ e con $\lambda = 1/a$, ottenendo che

$$\int_0^1 |F_t^*[\mathcal{P}, F]|_{s-2\sigma} dt \leq (1+b)e^{\frac{a}{a+1}} \|[\mathcal{P}, F]\|_{s-\sigma} \leq a^2 b (1+b) e^{\frac{a}{a+1}} \epsilon.$$

Analogamente si ha che

$$|F_1^* \widehat{P}|_{s-2\sigma} \leq (1+b)e^{\frac{a}{a+1}} |\widehat{P}|_{s-\sigma} \leq (1-a)(1+b)e^{\frac{a}{a+1}} \epsilon.$$

Pertanto, ricordando che $P_+ = F_1^* \widehat{P} + \int_0^1 F_t^*[\mathcal{P}, F] dt$, si ottiene la stima voluta

$$|P_+|_{s-2\sigma, h-2a\epsilon} \leq q\epsilon,$$

dove $q = (1-a+a^2b)(1+b)e^{\frac{a}{a+1}}$.

□

Osservazione 5.8. In [9] sono eseguite stime sostanzialmente simili a quelle eseguite in [10], ma con uno scopo sostanzialmente diverso, dato che qui si vuole utilizzare la cosiddetta convergenza quadratica. Infatti si può notare che per le stime di Cauchy

$$\begin{aligned} |R, F|_{r/2, s-3\sigma} &\leq |R_I| |F_\vartheta| + |R_\vartheta| |F_I| \\ &\leq \frac{\epsilon}{r} \frac{\epsilon}{\gamma \sigma^{\nu+1}} + \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\epsilon}{\gamma r \sigma^\nu} \leq \frac{\epsilon^2}{\gamma r \sigma^{\nu+1}} \end{aligned}$$

e analogamente per $[[R], F]_{r/2, s-3\sigma}$. Da ciò segue che

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (1-t)[R] + tR, F \circ X_F^t dt \right|_{r/8, s-5\sigma} &\leq |(1-t)[R] + tR, F|_{r/2, s-4\sigma} \\ &\leq \frac{\epsilon^2}{\gamma r \sigma^{\nu+1}}. \end{aligned}$$

Inoltre, dato che vale la seguente stima,

$$\begin{aligned} |(P-R) \circ \Phi|_{r/8, s-5\sigma} &\leq |P-R|_{r/4, s-4\sigma} \\ &\leq |P-Q|_{r/4, s-4\sigma} + |Q-R|_{r/4, s-4\sigma} \\ &\leq (1/64 + \tau^n e^{-\tau\sigma})\epsilon \end{aligned}$$

si perviene alla seguente stima della nuova perturbazione

$$|P_+|_{r/8, s-5\sigma, h/4} \leq \frac{\epsilon^2}{\gamma r \sigma^{\nu+1}} + (1/64 + \tau^n e^{-\tau\sigma})\epsilon.$$

Osservazione 5.9. Se si considera la decomposizione sopra descritta $P = P_{IR} + P_{UV}$, allora anche in questo caso si può definire $\mathcal{P} := tP_{IR} + (1-t)\langle P \rangle$, ottenendo così che

$$|\mathcal{P}|_s \leq t|P_{IR}|_s + (1-t)|\langle P \rangle|_s \leq \epsilon.$$

Inoltre, proseguendo come in [10], si eseguono le seguenti stime:

$$\begin{aligned} \|[\mathcal{P}, F]\|_{s-\sigma/a} &\leq 2(e\sigma)^{-1} a |\mathcal{P}|_s |F|_s \leq 2(e\sigma)^{-1} a \epsilon^2 \tau^\nu \leq b\epsilon \\ \int_0^1 |F_t^*[\mathcal{P}, F]\|_{s-3\sigma/a} dt &\leq (1 + \tau^{\nu+1}\epsilon) \|[\mathcal{P}, F]\|_{s-\sigma/a} \leq (1 + \tau^{\nu+1}\epsilon) b\epsilon. \end{aligned}$$

Analogamente si ha che

$$|F_1^* P_{UV}|_{s-3\sigma/a} \leq (1 + \tau^{\nu+1}\epsilon) |P_{UV}|_{s-\sigma} \leq (1-a)e^{1-a/3} (1 + \tau^{\nu+1}\epsilon)\epsilon = (1-a)e^{1-a/3} (1+b)\epsilon,$$

ricordando che $b = \tau^{\nu+1}\epsilon$. Pertanto si ottiene che

$$\begin{aligned}
|P_+|_{s-3\sigma/a} &= |F_1^* P_{UV} + \int_0^1 F_t^*[\mathcal{P}, F] dt|_{s-3\sigma/a} \\
&\leq (1 + \tau^{v+1}\epsilon)[(1-a)e^{1-a/3} + b]\epsilon \\
&= (1+b)[(1-a)e^{1-a/3} + b]\epsilon \\
&=: \widetilde{q}\epsilon,
\end{aligned}$$

dove $\widetilde{q} = \widetilde{q}(a, b)$.

Dato che $b \in [0, 1/2]$ per (10), e che $(1-a)e^{1-a/3} \in]0, e[\forall a \in]0, 1[$, non si può usare la decomposizione usuale della perturbazione per assicurare la convergenza della successione di cambiamenti di coordinate (se $\widetilde{q} > 1$ la stima sulla perturbazione peggiorerebbe ad ogni passo, ottenendo al passo n -esimo $|P_n| \leq \widetilde{q}^n \epsilon$, ed il secondo membro chiaramente diverge per $n \rightarrow \infty$). A posteriori, dopo aver determinato i valori di a e b , si potrebbe verificare che con la decomposizione usuale si avrebbe effettivamente $\widetilde{q} > 1$.

5.1.6 Trasformazione delle frequenze

Dai passi precedenti in [10] si osserva che $N_+ = N + \langle P \rangle$ ha frequenza associata $\omega_+ = \omega + p_0(\omega)$, ma, dato che

$$|p_0|_h \leq |\widetilde{P}|_{s+\widetilde{\sigma}, h} \leq a\epsilon < h/2$$

per (10), la mappa $\omega \mapsto \omega_+$ ammette un'inversa per il lemma 6.3 riportato in appendice.

Pertanto si può dedurre il

Lemma 5.6. Nelle ipotesi della proposizione 5.1 esiste una mappa $\varphi : \Omega_{h-2a\epsilon} \rightarrow \Omega_{h-a\epsilon}$ tale che $\omega = \varphi(\omega_+)$ e che soddisfa

$$|\varphi - id|_{h-2\epsilon} \leq a\epsilon.$$

Dunque N_+ si può riportare in forma normale, e così termina il passo base.

Si conclude la sezione con la

Dimostrazione. (della proposizione 5.1) Per effettuare un passo perturbativo basta applicare i Lemmi 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 con le notazioni introdotte nella proposizione 5.1.

□

Osservazione 5.10. Anche in [9] si inverte la mappa

$$\omega \mapsto \omega_+ = \omega + v(\omega), \quad v = \langle R_I \rangle$$

per portare $N + \langle R \rangle$ in forma normale. Grazie all'ipotesi $\epsilon \leq hr$ si sfrutta la seguente stima di Cauchy

$$|v|_{h/2} = |\langle R_I \rangle|_{h/2} < \frac{\epsilon}{r} \leq \frac{h}{4}.$$

Il teorema della funzione implicita assicura che esiste un'inversa analitica

$$\varphi : \Omega_{h/4} \rightarrow \Omega_{h/2}$$

che manda ω_+ in ω , e per cui valgono le seguenti stime su $\Omega_{h/4}$

$$|\varphi - id|, |\varphi' - Id| < \frac{\epsilon}{r}.$$

Ponendo $N_+ = (N + \langle R \rangle) \circ \varphi$ si conclude il passo base in [9].

5.2 Iterazione

Il punto di partenza è il campo vettoriale Hamiltoniano

$$X_0(\omega, \vartheta) = N_0(\omega) + P_0(\omega, \vartheta)$$

analitico in $\Omega_{h_0} \times D_{s_0}$ e tale che $|P_0|_{s_0, h_0} := \epsilon_0$; ci si propone di applicare iterativamente il passo base descritto nella sezione precedente.

Per iterare il passo base si sceglieranno $\forall m \in \mathbb{N}$

$$h_m = h_0 q^m, \quad \tau_m = \tau_0 (1/q)^{m/(v+1)} \quad (12)$$

e si sceglieranno le successioni $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}, (s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in modo che $\forall m \in \mathbb{N}$

$$1 - a = e^{-\tau_m \sigma_m} \quad s_{m+1} = s_m - 2\sigma_m. \quad (13)$$

Si noti che per queste particolari scelte di $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}, (\tau_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ si ottiene che

$$\epsilon_m = q^m \epsilon_0 \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

e che i valori di a e di b , in questo modo, non variano più ad ogni passo. Nella sezione successiva si studierà il problema della convergenza, mostrando che la successione $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ha limite strettamente positivo se si fissa un τ_0 sufficientemente grande.

Proposizione 5.2. Sia $0 < \sigma_0 < s_0/2$ e sia $\tau_0 > 1$ sufficientemente grande. Si supponga che, fissati $a = 1 - e^{-\sigma_0 \tau_0}$ e $b \in]0, 1/2[$ e definito q come nella proposizione 5.1, si abbia

$$|P_0|_{s_0, h_0} = \epsilon_0 < \frac{(1-q)h_0}{2a} \wedge \frac{b}{\tau_0^{v+1}}, \quad h_0 \leq \frac{1}{\tau_0^{v+1}}.$$

Allora $\forall m \in \mathbb{N}$, presi $\sigma_m, \tau_m, s_m, h_m$ come in (12) e (13), esiste una trasformazione analitica

$$(\Phi_{m+1}, \varphi_{m+1}) : D_{s_{m+1}} \times \Omega_{h_{m+1}} \rightarrow D_{s_m} \times \Omega_{h_m}$$

che è un diffeomorfismo con l'immagine e che coniuga il campo vettoriale $X_m = N + P_m$ al campo vettoriale $X_{m+1} = N + P_{m+1}$, dove

$$|P_{m+1}|_{s_{m+1}, h_{m+1}} \leq \epsilon_{m+1} := q^{m+1} \epsilon_0.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione.

Fissato $m \geq 1$, si supponga che per ogni $l = 1, \dots, m-1$ esista

$$(\Phi_l, \varphi_l) : D_{s_l} \times \Omega_{h_l} \rightarrow D_{s_0} \times \Omega_{h_0}$$

che coniugano il campo vettoriale $N + P_{l-1}$ al campo vettoriale $N + P_l$, dove

$$|P_l|_{s_l, h_l} \leq q^l \epsilon_0.$$

Si mostrerà che è possibile determinare $\sigma_m, \tau_m, s_m, h_m$ e $(\Phi_m, \varphi_m) : D_{s_m} \times \Omega_{h_m} \rightarrow D_{s_0} \times \Omega_{h_0}$ tali che coniughino il campo vettoriale di partenza $X_{m-1} = N + P_{m-1}$ al campo vettoriale $X_m = N + P_m$, e tali per cui valga la stima

$$|P_m|_{s_m, h_m} \leq q^m \epsilon_0.$$

Le ipotesi di induzione sono soddisfatte per $m = 1$, e in questo caso si conclude applicando la Proposizione 5.1, ogni volta con lo stesso q , come in (11) (si noti a e b sono indipendenti dal passo).

Applicando la Proposizione 5.1 a X_{m-1} , si ha la tesi ponendo

$$h_m = h_0 q^m, \quad \tau_m = \tau_0 (1/q)^{m/(v+1)},$$

definendo gli altri parametri tramite le condizioni

$$1 - a = e^{-\tau_m \sigma_m}, \quad s_m = s_{m-1} - 2\sigma_{m-1},$$

e notando che per costruzione vale

$$\begin{aligned} \epsilon_m \tau_m^{v+1} &= \epsilon_0 \tau_0^{v+1} \leq b < 1/2, \\ \frac{h_m - 2a\epsilon_m}{h_{m+1}} &= \frac{h_0 - 2a\epsilon_0}{qh_0} \geq 1. \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.11. Anche in [9] si definiscono delle successioni per poter iterare il passo base definito nelle Osservazioni 5.1, 5.3, 5.4, 5.6, 5.8 e 5.10.

Ad esempio, scegliendo i nuovi parametri $\sigma_+ = \sigma/2$, $r_+ = r/8$ in funzione dei vecchi si ha la stima della nuova perturbazione in funzione della vecchia

$$\frac{\epsilon_+}{\gamma r_+ \sigma_+^{v+1}} \leq \left(\frac{\epsilon}{\gamma r \sigma^{v+1}} \right)^{3/2},$$

dove ϵ_+ è la norma della nuova perturbazione ed ϵ è la norma della vecchia perturbazione.

Da ciò segue che

$$\begin{aligned} \epsilon_+ &\leq \gamma^{-1/2} \frac{r_+}{r^{3/2}} \left(\frac{\sigma_+}{\sigma^{3/2}} \right)^{v+1} \epsilon^{3/2} \\ &\leq \gamma^{-1/2} 2^{-3} r^{-1/2} 2^{-(v+1)} \sigma^{-1/2} \epsilon^{3/2} \\ &=: c \epsilon^{3/2}, \end{aligned}$$

dove appare evidente il meccanismo della cosiddetta convergenza superlineare.

Scelti dunque $r_0 > 0$ ed $s_0 > 0$ come ampiezze della striscia di analiticità rispettivamente nelle azioni e negli angoli, il cut-off iniziale τ_0 e lo scorniciamento σ_0 in modo da avere $\tau_0\sigma_0 \geq 1$ (ad esempio ponendo $\sigma_0 = s_0/20$), e l'allargamento del dominio delle frequenze fortemente non risonanti $h_0 = O(\epsilon/r_0)$, si definiscono le successioni

$$\sigma_{m+1} = \sigma_m/2, \quad \tau_{m+1} = 4\tau_m, \quad h_{m+1} = h_m/4^{v+1}, \quad r_{m+1} = 2^{-3}r_m, \quad s_{m+1} = s_m - 5\sigma_m$$

e i domini complessi

$$D_m = \{I : |I| < r_m\} \times \{\vartheta : |Im(\vartheta)| < s_m\}, \quad \Omega_m = \{\omega : |\omega - \Omega| < h_m\}.$$

Si noti che $s_m \rightarrow s_0/2$ e che $r_m \rightarrow 0$, cioè che il dominio di analiticità nelle azioni si riduce in un punto, mentre il dominio di analiticità negli angoli si riduce ad una striscia più piccola di quella di partenza. Considerando $H = N + P_0$, si può dimostrare il seguente

Lemma iterativo 5.7. Si supponga che P_0 sia reale analitica su $D_0 \times O_0$ e che valga

$$|P_0|_{r_0, s_0, h_0} \leq \epsilon_0.$$

Allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste una forma normale N_m e una trasformazione reale analitica

$$\mathcal{F}^{(j)} = \mathcal{F}_0 \circ \dots \circ \mathcal{F}_{m-1} : D_m \times O_m \rightarrow D_0 \times O_0$$

tale che $H \circ \mathcal{F}^{(m)} = N_m + P_m$, dove

$$|P_m|_{r_m, s_m, h_m} \leq \epsilon_m = O(\epsilon_0^{(3/2)^m}).$$

5.3 Convergenza

Dopo aver verificato nella precedente sezione che il passo base perturbativo può essere iterato sotto opportune ipotesi per un numero qualunque di volte, ora si studierà il $\lim_{m \rightarrow \infty}$ della costruzione iterativa.

Come già ripetuto precedentemente, verrà verificato che l'iterazione del passo base porge un cambio di coordinate nello spazio frequenze-angoli definito su una striscia negli angoli. Segue la dimostrazione del Teorema 2.1.

Dimostrazione. (del Teorema KAM) Si vuole applicare la costruzione iterativa definita precedentemente nel caso $N_0 = F, P_0 = G, s_0 = \mathcal{S}, h_0 = \mathcal{H}$.

Per applicare la Proposizione 5.2 per infinite volte bisogna innanzitutto verificare che la successione $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tende ad un limite strettamente positivo. Infatti vale che

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{\tau_m} &\leq \int_0^\infty \frac{dm}{(\tau_0^{v+1} q^{-m})^{1/(v+1)}} \\ &= \int_0^\infty \frac{dm}{\tau_0 q^{-m/(v+1)}} \\ &= \frac{1}{\log(1/q)} \int_{\tau_0}^\infty \frac{d(t^{v+1})}{t^{v+2}}. \end{aligned}$$

ponendo $t = \tau_0 q^{-m/(v+1)}$. Integrando per parti ed imponendo che $\tau_0^{v+1} \geq 1/q$ si ha che

$$\sum_{m \geq 0} \frac{1}{\tau_m} \leq \frac{1}{\log(1/q)} (v+1) \int_{\tau_0}^\infty \frac{\log(t)}{t^2} dt.$$

Da ciò segue che

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= 8(v+1) \int_\tau^\infty \frac{\log(t)}{t^2} dt \\ &= \sum_{m \geq 0} \sigma_m = \log(1/(1-a)) \sum_{m \geq 0} \frac{1}{\tau_m} \\ &\leq \frac{\log(1-a)}{\log(q)} (v+1) \int_{\tau_0}^\infty \frac{\log(t)}{t^2} dt \\ &= \frac{\log(1-a)}{\log(q)} (v+1) \frac{1 + \log(\tau_0)}{\log(\tau_0)}. \end{aligned}$$

Dunque per τ_0 abbastanza grande (teoricamente τ_0 si può esprimere in funzione di $\mathcal{R}, a, q$ applicando il Teorema della Funzione Implicita) si ottiene che $\mathcal{R} < \mathcal{S}/2$ e dunque che $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \mathcal{S} - 2\mathcal{R} > 0$.

In seguito bisogna scegliere $a \in]0, 1[$ e $b < 1$ per determinare il valore del parametro ausiliario q e applicare così la Proposizione 5.2. Ad esempio, scegliendo $a = 1/2$ e $b = 1/16$, si ha

$$q \approx \frac{9}{10}, \quad \frac{\log(1-a)}{\log(q)} \leq 7.$$

Poi, fissato $\omega \in \Omega$, si consideri la successione di trasformazioni prodotta dalla Proposizione 5.2. Su $D_{\mathcal{S}-2\mathcal{R}}$ la famiglia $(\Phi_m(\omega))_{m \in \mathbb{N}}$ è uniformemente limitata, così come è uniformemente limitata la successione di vettori $(\varphi_m(\omega))_{m \in \mathbb{N}}$. Dunque, applicando i teoremi 6.1 e 6.2 (riportati in appendice), si prova l'esistenza di sottosuccessioni convergenti $(\Phi_{m_\alpha}(\omega))_\alpha$ e $(\varphi_{m_\beta}(\omega))_\beta$. Ma dato che lungo tali sottosuccessioni

$$|P_m|_{s_m, h_m} \leq \epsilon_m \rightarrow 0,$$

queste sottosuccessioni coniugano il campo vettoriale $X = F + G$ al campo vettoriale F .

□

Osservazione 5.12. Anche in [9] viene affrontata la questione della convergenza, precisando dapprima che la trasformazione ottenuta come limite di trasformazioni canoniche non può essere una trasformazione canonica, essendo definita su un solo punto dello spazio delle azioni. Tuttavia la trasformazione limite sarà un embedding del toro $\mathbb{T}^n$ nello spazio delle fasi $B \times \mathbb{T}^n$.

Per provare la seguente

Proposizione 5.3. Sia $H = N + P$, e si supponga che P sia reale analitica su $D_{r,s} \times O_h$ e valga

$$|P|_{r,s,h} \leq \epsilon := c_{n,v} \gamma r s^{v+1},$$

dove $c_{n,v}$ è una piccola costante dipendente solo da n e da v . Si supponga inoltre che $r, s, h \leq 1$.

Allora esiste una funzione lipschitziana $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ prossima all'identità e una famiglia di embedding reali analitici del toro n -dimensionale $\Phi : \mathbb{T}^n \times \Omega \rightarrow B \times \mathbb{T}^n$ tali che per ogni $\omega \in \Omega$ si abbia che

$$X_H|_{\varphi(\omega)} \circ \Phi = D\Phi \cdot X_N.$$

Pöschel nota che valgono le ipotesi del Lemma Iterativo 5.7 applicato ad $H = N + P$, e scegliendo $P_0 = P$, $r_0 = r$, $s_0 = s$. Scegliendo una costante $c_{n,v}$

sufficientemente piccola si ottiene che

$$|P|_{r,s,h} \leq \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Dalle stime del Lemma Iterativo si può dedurre inoltre che le trasformazioni $\mathcal{F}^{(j)}$ convergono uniformemente su

$$\bigcap_{j \geq 0} D_j \times O_j = \{0\} \times \{\vartheta : |\operatorname{Im}(\vartheta)| < s/2\} \times \Omega$$

ad una mappa $\mathcal{F}$, che consiste in una famiglia di embedding $\Phi : \mathbb{T}^n \times \Omega \rightarrow D \times \mathbb{T}^n$ e in una trasformazione dei parametri $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ reali analitiche su $\mathbb{T}^n$.

Dopo qualche passaggio si perviene anche alla stima

$$|X_H \circ \mathcal{F}^{(j)} - D\Phi^{(j)} \cdot X_N| < \frac{\epsilon_j}{r_j \sigma_j}$$

che porge, passando al limite, $X_H \circ \mathcal{F} = D\Phi \cdot X_N$.

Pertanto Φ è un embedding dei tori di Kronecker $(\mathbb{T}^n, \omega)$ come toro invariante per il campo vettoriale X_H associato alla frequenza $\varphi(\omega)$.

6 Appendice

Di seguito sono riportati alcuni risultati utilizzati nelle dimostrazioni precedenti.

Lemma 6.1. Per ogni $r > 0$ si ponga $D_r = \{\vartheta \in \mathbb{T}^n : \|Im(\vartheta)\|_\infty < r\}$. Per ogni campo vettoriale definito su D_r

$$X = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} X_k e^{i\langle k, \vartheta \rangle}$$

si ponga

$$|X|_r := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |X_k| e^{|k|r}.$$

Fissati $u > 0$ e $v > 0$, si ha che per $0 < r < \min\{u, v\}$ vale

$$\|[U, V]\|_r \leq e^{-1} \left(\frac{1}{u-r} + \frac{1}{v-r} \right) |U|_u |V|_v$$

Dimostrazione. Dato che

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cdot V = \sum_k i u_k \langle k, V \rangle e_k = \sum_{k,l} i u_k \langle k, v_l \rangle e_{k+l} = \sum_{k,l} i u_k \langle k, v_{l-k} \rangle e_l$$

da cui

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cdot V \right|_r &\leq \sum_{k,l} |k| |u_k| |v_{l-k}| e^{|l|r} \\ &\leq \sum_{k,l} |k| |u_k| e^{|k|r} |v_{l-k}| e^{|l-k|r} \\ &\leq \sup_{t \geq 0} t e^{(u-r)t} \left(\sum_k |u_k| e^{|k|u} \right) \left(\sum_l |v_l| e^{|l|v} \right) \\ &\leq \frac{1}{e(u-r)} |U|_u |V|_v. \end{aligned}$$

Scambiando i ruoli di U e di V si ottiene una stima analoga per $\left| \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \cdot U \right|_r$, da cui la conclusione. $\square$

Adottando le stesse notazioni del Lemma 6.1 si enuncia il seguente

Lemma 6.2. Se $b := \sigma^{-1}|F|_{r+\lambda\sigma} \leq 1/2$ con $0 < \sigma < r$ e $\lambda > -1$, allora vale

$$|F_t^* V|_{r-\sigma} \leq (1+tb)e^{\frac{1}{\lambda+1}}|V|_r, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Dimostrazione. Infatti dalla serie di Lie

$$F_t^* V = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} V_n t^n$$

dove $V_0 = V$, $V_n = [V_{n-1}, F] \forall n \geq 1$. Se si pone $|\cdot|_i = |\cdot|_{r-i\sigma/n}$ per ogni $0 \leq i \leq n$.

Allora per il lemma 6.1

$$\begin{aligned} |V_n|_{r-\sigma} &= |V_n|_n = |[V_{n-1}, F]|_n \\ &\leq \left(\frac{n}{e\sigma} + \frac{1}{e(\lambda+1)\sigma} \right) |V_{n-1}|_{n-1} |F|_{r+\lambda\sigma} \\ &\leq \frac{n}{e\sigma} \left(1 + \frac{1}{(\lambda+1)n} \right) |V_{n-1}|_{n-1} |F|_{r+\lambda\sigma}. \end{aligned}$$

Iterando la precedente catena di disuguaglianze per n volte si trova che

$$|V_n|_{r-\sigma} \leq \left(\frac{n}{e\sigma} \right)^n e^{\frac{1}{\lambda+1}} |V|_r |F|_{r+\lambda\sigma}^n.$$

Inserendo queste disuguaglianze con $b := \sigma^{-1}|F|_{r+\lambda\sigma}$ si ha che

$$|F_t^* V|_{r-\sigma} \leq |V|_r e^{\frac{1}{\lambda+1}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \left(\frac{nb t}{e} \right)^n.$$

Dato che $n! \geq n^n / e^{n-1}$ per $n \geq 1$ e dato che $0 \leq bt \leq 1/2$, l'ultima somma è maggiorata da

$$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(bt)^n}{e} \leq 1 + bt.$$

□

Segue una versione del teorema di inversione locale.

Lemma 6.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fissato e si definisca, per ogni $h > 0$, l'insieme

$$\Omega_h := \{\omega \in \mathbb{C}^n : \|\omega - \Omega\|_\infty < h\}.$$

Si supponga che $f : \Omega_h \rightarrow \mathbb{C}^n$ sia analitica e che

$$\|f - id\|_h \leq \epsilon < h/2.$$

Allora f ammette un'inversa analitica $\varphi : \Omega_{h-2\epsilon} \rightarrow \Omega_h$ tale che $\|\varphi - id\|_{h-2\epsilon} \leq \epsilon$.

Dimostrazione. Infatti per ogni $0 < k < h - 2\epsilon$ si ha che per la stima di Cauchy

$$\|Df - I\|_{k+\epsilon} \leq \frac{\epsilon}{h - (k + \epsilon)} < 1.$$

Pertanto l'operatore

$$T : \varphi \mapsto id - (f - id) \circ \varphi$$

definisce una contrazione sullo spazio delle funzioni analitiche $\phi : \Omega_k \rightarrow \Omega_h$ con $\|\phi - id\|_k \leq \epsilon$.

Il suo unico punto fisso φ , la cui esistenza e unicità sono garantite per il Lemma delle Contrazioni di Caccioppoli-Banach ([4], cap.2), è l'inversa di f su Ω_k . Passando al limite per $k \rightarrow h - 2\epsilon$ si conclude.

□

Si conclude con due noti teoremi di analisi complessa.

Teorema 6.1. (di Weierstrass-Vitali) Sia D un aperto connesso di $\mathbb{C}$, e sia $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione limitata di funzioni olomorfe su D . Si supponga che $\exists C \subseteq D$ con un punto di accumulazione in D tale che $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(z)$ esista in $\mathbb{C} \forall z \in C$. Allora esiste una funzione f olomorfa su D tale che la successione $f_m \rightarrow f$ su ogni compatto contenuto in D .

Teorema 6.2. (di Montel) Sia D un aperto connesso di $\mathbb{C}$, e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe uniformemente limitata su D .

Allora $\mathcal{F}$ è normale, cioè tale che ogni successione di funzioni di $\mathcal{F}$ ammetta una sottosuccessione convergente su ogni compatto contenuto in D .

References

- [1] V. I. Arnol'd, *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Russ. Math. Surv., 1963
- [2] V. I. Arnol'd, *Mathematical method of classical mechanics*, 2. ed, Springer-Verlag, 1978
- [3] G. Benettin, *The elements of Hamiltonian perturbation theory*, lectures at the Porquerolles school 2001 Hamiltonian systems and Fourier analysis, Taylor and Francis
- [4] G. De Marco, *Analisi Due*, ed. Decibel-Zanichelli, 1999
- [5] R. De la Llave, *A tutorial on KAM theory. Smooth Ergodic Theory and its applications*, Proceedings Symposia in Pure Mathematics, 2001
- [6] L. H. Eliasson, *Absolutely convergent series expansion for quasi periodic motions*, Mathematical Physics Electronic Journal, 1996
- [7] A. Giorgilli e U. Locatelli, *Kolmogorov theorem and classical perturbation theory*, Z.A.M.P., 1997
- [8] J. Moser, *On the theory of quasiperiodic motions*, SIAM Review vol.8, 1966
- [9] J. Pöschel, *A lecture on the classical KAM theorem*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 2001
- [10] J. Pöschel, *KAM á la R*, Regular and Chaotic Dynamics, 2011
- [11] H. Rüssmann, *KAM iteration with nearly infinitely small steps in dynamical systems of polynomial character*, Discrete and continuous dynamical systems, 2010