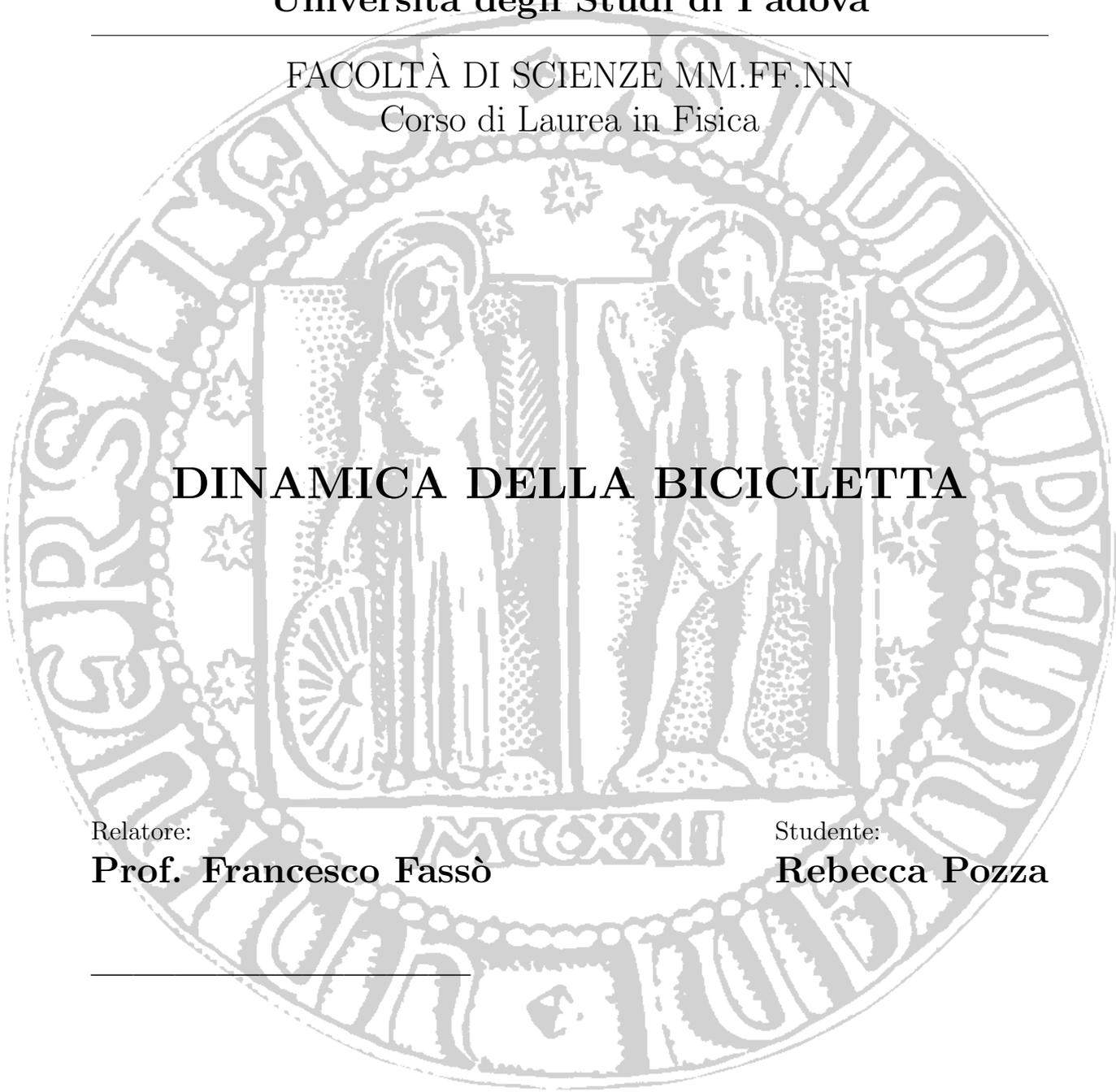




Università degli Studi di Padova

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN
Corso di Laurea in Fisica



DINAMICA DELLA BICICLETTA

Relatore:

Prof. Francesco Fassò

Studente:

Rebecca Pozza

Anno Accademico 2008-2009

Indice

Introduzione	1
1 Descrizione del Sistema	3
1.1 Il modello base di una bicicletta	3
1.2 Sistemi di riferimento	4
1.3 Vincoli e Coordinate	6
2 Equazioni del moto linearizzate	9
2.1 Riduzione	9
2.2 Linearizzazione del sistema ridotto	10
3 Analisi della Stabilità	13
3.1 Il criterio di Routh-Hurwitz e di Liénard-Chipart	16
3.1.1 Condizioni di Liénard-Chipart per la bicicletta	16
3.1.2 Dipendenza dalla velocità	17
3.2 Esempio: il modello primitivo di una bicicletta	19
Conclusioni	21
A Descrizione dei termini presenti nelle equazioni del moto linearizzate	23
B Coefficienti dell'equazione caratteristica	25
C Il modello primitivo di una bicicletta	27
Bibliografia	29

Introduzione

Lo studio della dinamica e della stabilità della bicicletta ha attirato l'attenzione di molti nel passato. Tuttavia la comprensione del funzionamento della bicicletta e la sua formulazione matematica risultano ancora difficili.

La dinamica dei veicoli a due ruote può essere studiata tenendo in considerazione l'azione del guidatore oppure no. Il guidatore può controllare il moto agendo sul manubrio e applicando quindi un momento, o cambiare la posizione del proprio corpo relativamente alla bicicletta.

Presentiamo dei risultati che riguardano lo studio dell'auto-stabilità e instabilità di una bicicletta e cerchiamo di comprenderne le caratteristiche fondamentali. In questa tesi si assume, quindi, che il guidatore sia passivo, cioè un corpo rigido e fisso che non ha controllo sul moto della bicicletta.

Seguendo la trattazione classica si considera il sistema linearizzato attorno al moto stazionario, con la bicicletta in posizione verticale. A partire dalle equazioni del moto linearizzate si applica il criterio di stabilità di Liénard-Chipart e si studia il modello primitivo di una bicicletta mettendo in evidenza i parametri a cui esso deve soddisfare affinché sia garantita la stabilità.

I testi e gli articoli di riferimento per la trattazione del problema sono: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Capitolo 1

Descrizione del Sistema

1.1 Il modello base di una bicicletta

Si considera un modello elementare di una bicicletta [3](fig.1.1). Esso è composto da quattro corpi rigidi interconnessi: il telaio con il ciclista ad esso fisso, il sistema manubrio-forcella, la ruota posteriore e la ruota anteriore. Si assume che, quando il sistema ciclista-bicicletta si trova nella posizione verticale e con angolo di sterzo nullo, esso sia simmetrico rispetto al piano verticale passante per il telaio della bicicletta in senso longitudinale.

Le ruote vengono considerate come dischi rigidi, di spessore trascurabile, che rotolano su un piano orizzontale rigido, che chiameremo *piano stradale*. Ciascuna ha un solo punto di contatto con il piano stradale (vincolo olonomo) e non può né scivolare né slittare (vincolo anolonomo). Non si considerano gli attriti interni tra le parti meccaniche della bicicletta e si trascurano elasticità e effetti aerodinamici. Le uniche forze esterne che agiscono sul sistema, in un riferimento solidale al piano stradale, sono dunque la forza di gravità e le reazioni vincolari esercitate dal piano stradale sulle ruote. Non ci sono forze dissipative e quindi l'energia si conserva.

Le equazioni del moto esplicite sono difficili da scrivere e da studiare. Sono state ricavate in [6]. Come ci si può aspettare, tali equazioni hanno una soluzione stazionaria nella quale la bicicletta si muove in linea retta, a velocità costante, restando verticale.

L'argomento di questa tesi è la stabilità di questo moto stazionario, che è stato studiato in [1], [3], [4], [6] per mezzo di tecniche di linearizzazione. La linearizzazione attorno a questo moto stazionario, che costituisce il cosiddetto modello di base [3] o modello di Whipple [4] della bicicletta, si può fare in due modi:

- derivando le equazioni complete non lineari e, successivamente, linearizzandole;
- derivando direttamente le equazioni linearizzate considerando il moto rettilineo uniforme della bicicletta ed assumendo che siano permesse solamente piccole deviazioni dalla posizione verticale di equilibrio, piccoli angoli di sterzo e piccole variazioni della velocità.

Il secondo metodo è stato usato da [1], [3], [4]. Per il primo approccio si veda per esempio [6].

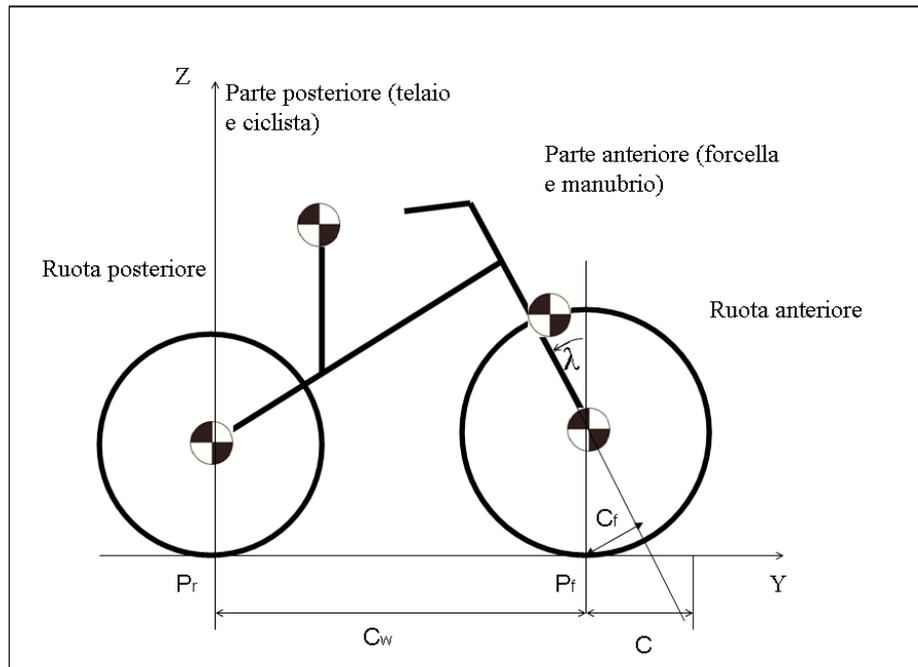


Fig. 1.1: Modello elementare di una bicicletta

1.2 Sistemi di riferimento

Per scrivere le equazioni del moto e la loro linearizzazione si usano cinque opportuni sistemi di riferimento :

- Sistema di riferimento XYZ fisso con il piano stradale con origine in un punto O e con l'asse Z rivolto verso l'alto.
- Sistemi di riferimento posteriore e anteriore mobili, $x_r y_r z_r$ e $x_f y_f z_f$, con origini rispettivamente nei punti di contatto P_r e P_f delle ruote posteriore e anteriore con il piano stradale. Il sistema posteriore comprende telaio, ciclista e ruota posteriore, il sistema anteriore manubrio, forcella e ruota anteriore. Quando la bicicletta si trova in posizione verticale e con angolo di sterzo nullo, gli assi y_r e y_f sono paralleli al piano stradale, x_r e x_f sono perpendicolari al sistema posteriore e z_r e z_f sono perpendicolari al piano stradale e rivolti verso l'alto (fig.1.2).
- Sistemi di riferimento mobili $\bar{x}_r \bar{y}_r \bar{z}_r$ e $\bar{x}_f \bar{y}_f \bar{z}_f$, con assi paralleli ai sistemi $x_r y_r z_r$ e $x_f y_f z_f$ e origini traslate, rispettivamente, nei centri di massa \bar{P}_r e \bar{P}_f dei sistemi posteriore (telaio-ciclista-ruota) e anteriore (forcella-manubrio-ruota) (fig.1.3).

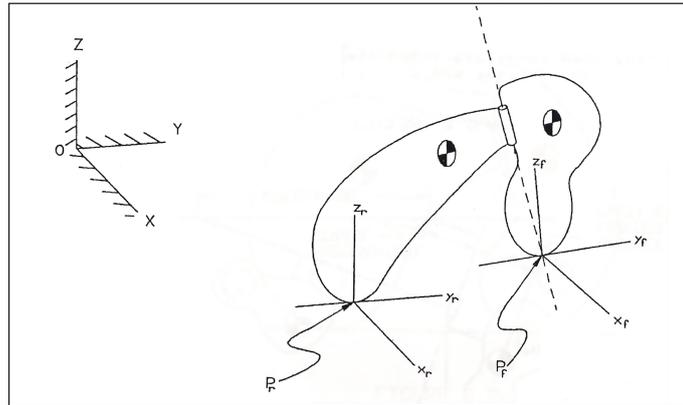


Fig. 1.2: Sistema di riferimento XYZ e sistemi di riferimento mobili $x_r y_r z_r$ e $x_f y_f z_f$

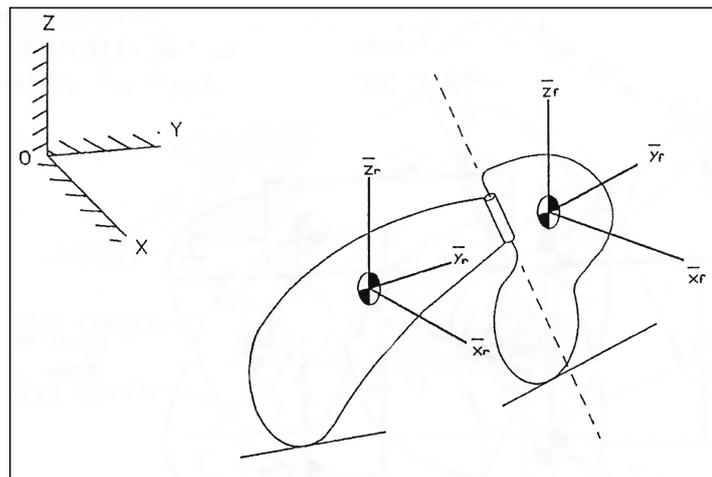


Fig. 1.3: Sistema di riferimento XYZ e sistemi di riferimento mobili $\bar{x}_r \bar{y}_r \bar{z}_r$ e $\bar{x}_f \bar{y}_f \bar{z}_f$

Nella descrizione del sistema entrano i seguenti parametri costitutivi (fig. 1.4):

- La massa del sistema $m_t = m_f + m_r$, con m_f massa del sistema anteriore e m_r massa del sistema posteriore.
- La distanza orizzontale \bar{l}_t tra il punto di contatto della ruota posteriore e il centro di massa del sistema quando esso si trova in posizione verticale e con angolo di sterzo nullo.
- L'altezza \bar{h}_t , sul piano stradale, del centro di massa del sistema quando esso si trova in posizione verticale e con angolo di sterzo nullo.
- Similmente si definiscono \bar{l}_f e \bar{h}_f , \bar{l}_r e \bar{h}_r con riferimento ai soli sistemi anteriore e posteriore.
- La distanza perpendicolare d del centro di massa del sistema anteriore dall'asse di sterzo.

- La distanza c , misurata con la bicicletta in posizione verticale, tra il punto di contatto della ruota anteriore con il piano stradale e l'intersezione dell'asse di sterzo con il piano stradale.
- La distanza c_w (passo della bicicletta) tra i punti di contatto delle due ruote con il piano stradale, con la bicicletta in posizione verticale.
- La distanza perpendicolare c_f tra l'asse di sterzo e il punto di contatto della ruota anteriore con il piano stradale (avancorsa).
- L'inclinazione λ dell'asse di sterzo rispetto all'asse OZ.

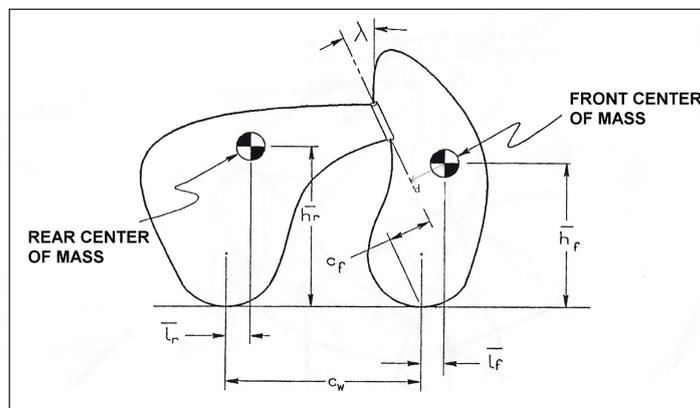


Fig. 1.4: Parametri del sistema

1.3 Vincoli e Coordinate

Il sistema che stiamo considerando è soggetto sia a vincoli olonomi (ognuna delle due ruote ha un punto di contatto con il piano stradale e i quattro corpi rigidi sono incernierati fra loro) che anolonomi (le ruote non possono né scivolare né slittare).

Ricordiamo le definizioni di vincolo olonomo e anolonomo. Per un sistema costituito da N punti materiali, un vincolo olonomo è una restrizione delle possibili configurazioni del sistema ad una sottovarietà \mathcal{Q} dello spazio delle configurazioni \mathbb{R}^{3N} . \mathcal{Q} è chiamata *varietà delle configurazioni*. Questa restrizione si traduce nell'appartenenza degli atti di moto del sistema ad una sottovarietà dello spazio degli atti di moto che è il fibrato tangente $T\mathcal{Q}$ di \mathcal{Q} e ha $\dim=2\dim\mathcal{Q}$.

Un vincolo anolonomo è, invece, una restrizione sugli atti di moto del sistema che vincola le velocità ad appartenere a sottospazi che non sono gli spazi tangenti a nessuna sottovarietà di \mathcal{Q} .

In assenza di vincoli consideriamo i quattro corpi rigidi che costituiscono la bicicletta. Un corpo rigido ha 6 gradi di libertà (tre gradi di libertà traslazionali e tre rotazionali), due corpi rigidi incernierati hanno $2 \times 6 - 5 = 7$ gradi di libertà,

quattro corpi rigidi incernierati a due a due con un totale di tre cerniere ne hanno $4 \times 6 - 3 \times 5 = 9$. Le ruote devono avere ognuna un punto di contatto con il piano stradale (vincolo olonomo) e si perdono così altri 2 gradi di libertà. Prima dell'introduzione dei vincoli anolonomi si ha quindi un sistema olonomo con varietà delle configurazioni \mathcal{Q} di dim. 7 e lo spazio delle fasi ha dim. 14. Considerando ora i 4 vincoli anolonomi, due per ognuno dei punti di contatto delle ruote, lo spazio delle fasi ha dim. $14 - 4 = 10$. I vincoli anolonomi non restringono ulteriormente le configurazioni accessibili in \mathcal{Q} , ma vi è restrizione sulle velocità: in ogni configurazione q in \mathcal{Q} le velocità possibili appartengono a un sottospazio di dim. 3 di $T_q\mathcal{Q}$.

Nello spazio delle fasi di dim. 10 si introducono 7 coordinate su \mathcal{Q} e 3 coordinate per gli spazi tangenti. Usiamo, su \mathcal{Q} :

- Le coordinate X_r e Y_r del punto di contatto P_r della ruota posteriore con il piano stradale nel riferimento XYZ.
- L'angolo θ_r tra l'intersezione del piano di simmetria del sistema posteriore con il piano stradale e l'asse OY.
- L'angolo χ_r di inclinazione del sistema posteriore rispetto alla posizione verticale.
- L'angolo ψ di sterzo, misurato rispetto al piano di simmetria del sistema posteriore.¹
- Gli angoli ϕ_r e ϕ_f che descrivono il grado di libertà di rotazione delle ruote posteriore e anteriore, ognuno misurato fra un raggio e la verticale, orientati in modo che $\dot{\phi}_r$ e $\dot{\phi}_f$ siano positivi quando la bicicletta avanza lungo l'asse OY.

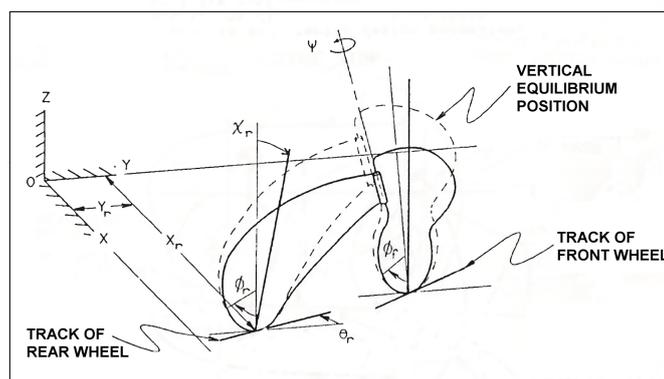


Fig. 1.5: Coordinate su \mathcal{Q}

Le condizioni affinché il moto delle ruote sia un un moto di puro rotolamento sono date dalle seguenti equazioni, che descrivono i quattro vincoli anolonomi:

¹Si sceglie per convenzione il verso positivo per gli angoli come mostrato in fig.1.5: χ_r verso destra, ψ e θ_r verso sinistra.

- per la ruota posteriore:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_r &= a_r \dot{\phi}_r \cos \theta_r \\ \dot{X}_r &= -a_r \dot{\phi}_r \sin \theta_r\end{aligned}$$

- per la ruota anteriore:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_f &= a_f \dot{\phi}_f \cos \theta_f \\ \dot{X}_f &= -a_f \dot{\phi}_f \sin \theta_f\end{aligned}$$

dove a_f e a_r sono rispettivamente i raggi delle ruote anteriore e posteriore. In queste espressioni compaiono le derivate temporali di Y_f e X_f , che sono funzioni delle coordinate scelte su \mathcal{Q} . Dunque \dot{Y}_r , \dot{X}_r e \dot{Y}_f , \dot{X}_f sono funzioni delle dieci coordinate nello spazio delle fasi. Esplicitandole si vede che queste quattro equazioni per i vincoli anolonomi permettono di esprimere $\dot{\chi}_r$, $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}_r$ in funzione di \dot{X}_r , \dot{Y}_r , $\dot{\theta}_r$ e $\dot{\phi}_f$. Come coordinate sugli spazi tangenti si usano quindi $\dot{\chi}_r$, $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}_r$.

Capitolo 2

Equazioni del moto linearizzate

2.1 Riduzione

Le equazioni del moto linearizzate che di seguito considereremo sono state ricavate, fra gli altri, da [4]. Si possono interpretare come descrittive approssimativamente la dinamica della bicicletta per piccole deviazioni dalla posizione di equilibrio verticale (angolo χ_r piccolo) e per piccole deviazioni dalla traiettoria rettilinea (angolo di sterzo ψ piccolo).

Denotiamo con $q = (X_r, Y_r, \theta_r, \phi_f, \phi_r, \chi_r, \psi)$ le coordinate su \mathcal{Q} e poniamo $y = (X_r, Y_r, \theta_r, \phi_f)$ ed $x = (\phi_r, \chi_r, \psi)$, cosicché $q = (x, y)$. Le coordinate sugli spazi tangenti sono allora $\dot{x} = (\dot{\chi}_r, \dot{\psi}, \dot{\phi}_r)$.

Scritte in queste coordinate le equazioni del moto del sistema sono del tipo:

$$\dot{y} = f(x, y, \dot{x})$$

$$\ddot{x} = g(x, y, \dot{x})$$

con certe funzioni f e g .

Tuttavia per la simmetria del sistema olonomo e dei vincoli avviene che le coordinate y sono coordinate ignorabili e quindi esse non compaiono in f e g ([3], [4]). Le equazioni del moto sono quindi della forma:

$$\dot{y} = f(x, \dot{x}) \tag{2.1}$$

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}) \tag{2.2}$$

con certe funzioni f e g . Il secondo gruppo di equazioni

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x})$$

si può interpretare come sistema ridotto. Avviene inoltre, che la funzione g non dipende da ϕ_r (è un'invarianza per traslazioni del sistema ridotto, non di quello completo). Posto allora $z = (\chi_r, \psi)$, il sistema ridotto ha la forma più particolare:

$$\ddot{\phi}_r = g_1(z, \dot{z}, \dot{\phi}_r) \tag{2.3}$$

$$\ddot{z} = g_2(z, \dot{z}, \dot{\phi}_r) \tag{2.4}$$

con certe funzioni g_1 e g_2 .

Una volta determinata una soluzione $t \rightarrow x(t)$ del sistema ridotto, la soluzione $t \rightarrow y(t)$ si ottiene integrando la (2.1) e dunque

$$y(t) = y(0) + \int_0^t f(x(s), \dot{x}(s)) ds.$$

Il sistema completo (2.1)-(2.2) ha, per ogni valore di $V := \dot{Y}_r \in \mathbb{R}_+$ e delle posizioni iniziali $\phi_f(0)$, $\phi_r(0)$, $X_r(0)$, $Y_r(0)$, la soluzione stazionaria:

$$\begin{aligned} \chi_r(t) &= 0 \\ \psi(t) &= 0 \\ \theta_r(t) &= 0 \\ \phi_f(t) &= \phi_f(0) + t \frac{V}{a_f} \\ \phi_r(t) &= \phi_r(0) + t \frac{V}{a_r} \\ X_r(t) &= X_r(0) \\ Y_r(t) &= Y_r(0) + Vt \end{aligned}$$

Nel sistema ridotto essa si proietta sul moto stazionario:

$$\begin{aligned} \chi_r(t) &= 0 \\ \psi(t) &= 0 \\ \phi_r(t) &= \phi_r(0) + t \frac{V}{a_r} \end{aligned}$$

Quello che si vuole fare è studiare la stabilità di questo moto e per questo useremo la linearizzazione.

2.2 Linearizzazione del sistema ridotto

Consideriamo il sistema ridotto (2.3)-(2.4) e linearizziamolo attorno al moto stazionario. Si ha che

$$g_1\left(0, 0, \frac{V}{a_r}\right) = g_1\left(0, 0, \frac{V}{a_r}\right) = 0$$

Le equazioni linearizzate sono:

$$\ddot{\phi}_r = \frac{\partial g_1}{\partial z}\left(0, 0, \frac{V}{a_r}\right) \cdot z + \frac{\partial g_1}{\partial \dot{z}}\left(0, 0, \frac{V}{a_r}\right) \cdot \dot{z} + \frac{\partial g_1}{\partial \dot{\phi}_r}\left(0, 0, \frac{V}{a_r}\right) \left(\dot{\phi}_r - \frac{V}{a_r}\right) \quad (2.5)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial g_2}{\partial z}\left(0, 0, \frac{V}{a_r}\right) z + \frac{\partial g_2}{\partial \dot{z}}\left(0, 0, \frac{V}{a_r}\right) \dot{z} + \frac{\partial g_1}{\partial \dot{\phi}_r}\left(0, 0, \frac{V}{a_r}\right) \left(\dot{\phi}_r - \frac{V}{a_r}\right) \quad (2.6)$$

Avviene che le derivate di g_1 si annullano [4] e dunque la linearizzazione (2.5) dell'equazione (2.3) è:

$$\ddot{\phi}_r = 0$$

Allora nell'approssimazione lineare la velocità $\dot{Y}_r = \dot{Y}_f = \dot{\phi}_r a_r = \dot{\phi}_f a_f$ è costante e uguale al parametro V . La linearizzazione dell'equazione (2.4) ha invece la forma:

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = 0 \quad (2.7)$$

con certe matrici

$$M = \begin{pmatrix} M_{\chi\chi} & M_{\chi\psi} \\ M_{\psi\chi} & M_{\psi\psi} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{\chi\chi} & C_{\chi\psi} \\ C_{\psi\chi} & C_{\psi\psi} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_{\chi\chi} & K_{\chi\psi} \\ K_{\psi\chi} & K_{\psi\psi} \end{pmatrix}.$$

La matrice M , che è chiamata matrice delle masse, è un blocco principale della matrice cinetica ed è quindi simmetrica e definita positiva; C e K sono chiamate matrice di smorzamento e matrice di rigidità. (per una descrizione più approfondita dei diversi termini consultare App.A).

Capitolo 3

Analisi della Stabilità

È possibile trasformare le soluzioni stazionarie del sistema ridotto (2.3)-(2.4) in soluzioni di equilibrio con un cambiamento di coordinate dipendente dal tempo $((z, \phi_r), t) \rightarrow (z, \xi(\phi_r, t))$ con

$$\xi(\phi_r, t) = \phi_r - \frac{V}{a_r}t$$

Allora $\dot{\xi} = \dot{\phi}_r - \frac{V}{a_r}$ e il sistema ridotto diventa:

$$\ddot{\xi} = g_1(z, \dot{z}, \dot{\xi} + \frac{V}{a_r}) \quad (3.1)$$

$$\ddot{z} = g_2(z, \dot{z}, \dot{\xi} + \frac{V}{a_r}) \quad (3.2)$$

Le soluzioni stazionarie di (2.3)-(2.4) diventano così le soluzioni di equilibrio

$$(z(t), \xi(t)) = (0, \xi(0)) \quad \forall \xi(0)$$

di (3.1)-(3.2).

Si vuole ora studiare la stabilità di questa famiglia di equilibri usando il primo metodo di Lyapunov. ($\xi(0)$ non conta nulla perchè c'è invarianza per traslazioni del sistema ridotto.)

Ricordiamo che il *Primo teorema di Lyapunov* assicura che: data l'equazione $\dot{w} = f(w)$, se $f(\bar{w}) = 0$, allora

1. Se tutti gli autovalori di $\frac{\partial f}{\partial w}(\bar{w})$ hanno parte reale < 0 , l'equilibrio \bar{w} è asintoticamente stabile.
2. Se almeno un autovalore di $\frac{\partial f}{\partial w}(\bar{w})$ ha parte reale > 0 , l'equilibrio \bar{w} è instabile.

Inoltre, in presenza di autovalori con parte reale nulla, l'equilibrio \bar{w} può essere instabile.

Consideriamo allora la linearizzazione del sistema ridotto (3.1)-(3.2):

$$\ddot{\xi} = 0$$

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = 0$$

Esplicitando \ddot{z} dalla seconda equazione si ha

$$\ddot{z} = -M^{-1}C\dot{z} - M^{-1}Kz$$

Come sistema del primo ordine in \mathbb{R}^4 quest'ultima equazione è

$$\begin{aligned}\dot{z} &= v \\ \dot{v} &= -M^{-1}Cz - M^{-1}Kz\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}$$

Per il citato teorema di Lyapunov, se un autovalore di A ha parte reale positiva allora l'equilibrio del sottosistema (3.3) è instabile. Nulla si può dire con questo metodo sulla stabilità dell'equilibrio del sistema ridotto (3.1)-(3.2) perchè c'è un autovalore nullo dovuto al fatto che $\ddot{\xi} = 0$. Però, se gli autovalori della matrice A hanno tutti parte reale negativa, c'è speranza di stabilità (asintotica).

Per questo motivo, da questo momento studiamo la stabilità del solo sottosistema (3.3).

Consideriamo gli autovalori λ della matrice A , ovvero le radici del polinomio caratteristico dell'equazione (3.3). È possibile stabilire se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa studiando i coefficienti del polinomio caratteristico. In [4] viene usato il criterio di Routh-Hurwitz, noi useremo il criterio di Liénard-Chipart, che illustriamo dopo.

Preliminarmente scriviamo il polinomio caratteristico dell'equazione (3.3) in una forma conveniente. Sappiamo che λ è autovalore di A se $\exists \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} \neq 0$ tale che

$$A \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}$$

Ponendo

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= -M^{-1}K \\ \tilde{C} &= -M^{-1}C\end{aligned}$$

si ha che l'equazione agli autovalori diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{K} & \tilde{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z \\ \lambda v \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} v \\ \tilde{K}z + \tilde{C}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z \\ \lambda v \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{aligned} v &= \lambda z \\ \tilde{K}z + \tilde{C}\lambda z &= \lambda^2 z. \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ha

$$(\tilde{K} + \tilde{C}\lambda - \lambda^2 \mathbf{1})z = 0 \quad \text{con } z \neq 0$$

e quindi λ deve soddisfare

$$\det(\lambda^2 \mathbf{1} - \lambda \tilde{C} - \tilde{K}) = 0.$$

Poichè $\det M \neq 0$ quest'ultima equivale a

$$\det(M\lambda^2 - \lambda M\tilde{C} - M\tilde{K}) = 0$$

Dunque λ è autovalore di $A \Leftrightarrow$ è soluzione di

$$\det(M\lambda^2 + C\lambda + K) = 0 \tag{3.4}$$

Indichiamo ora con $*$ l'operatore bilineare a valori in \mathbb{R} definito, sullo spazio delle matrici 2×2 , da

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}$$

Si noti che $\det a = \frac{1}{2}a * a$.

Allora:

$$\begin{aligned} \det(M\lambda^2 + C\lambda + K) &= \frac{1}{2}(M\lambda^2 + C\lambda + K) * (M\lambda^2 + C\lambda + K) \\ &= \frac{1}{2}M * M\lambda^4 + \frac{1}{2}M * C\lambda^3 + \frac{1}{2}M * K\lambda^2 + \frac{1}{2}C * M\lambda^3 \\ &\quad + \frac{1}{2}C * C\lambda^2 + \frac{1}{2}C * K\lambda + \frac{1}{2}K * M\lambda^2 + \frac{1}{2}K * C\lambda + \frac{1}{2}K * K \\ &= \det M\lambda^4 + (M * C)\lambda^3 + (M * K + \det C)\lambda^2 + (K * C)\lambda + \det K. \end{aligned}$$

Ponendo:

$$\begin{aligned} \alpha &= \det M \\ \beta &= M * C \\ \gamma &= M * K + \det C \\ \delta &= K * C \\ \epsilon &= \det K \end{aligned}$$

si ha che il polinomio caratteristico è:

$$\alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \epsilon = 0 \tag{3.5}$$

(Per le espressioni di $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ si veda l'App.B).

3.1 Il criterio di Routh-Hurwitz e di Liénard-Chipart

Consideriamo l'equazione algebrica con coefficienti reali:

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n, \quad a_0 > 0 \quad (3.6)$$

Nel 1875 lo studioso inglese Routh elaborò un algoritmo per mezzo del quale è possibile, usando i coefficienti del polinomio $f(\lambda)$, determinare se tutte le sue radici hanno parte reale negativa. Nel 1895 il matematico tedesco Hurwitz stabilì lo stesso criterio in una forma modificata con l'aiuto dei determinanti (i determinanti di Hurwitz):

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_p = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & a_{2p-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & a_{2p-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & a_{2p-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & \dots & a_{2p-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_p \end{vmatrix}$$

($a_j = 0$ per $j > n$).

Condizioni di Routh-Hurwitz. Le radici dell'equazione (3.6) hanno parte reale negativa, se e solo se $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

Per la dimostrazione vedere [2]. Notiamo che la positività di tutti i coefficienti dell'equazione (3.6) è una condizione necessaria ma non sufficiente per la stabilità.

Condizioni di Liénard-Chipart. Nel 1914 i matematici francesi Liénard e Chipart stabilirono che le radici dell'equazione (3.6) hanno parte reale negativa se e solo se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $a_n, a_{n-2}, \dots > 0$ e $\Delta_1, \Delta_3, \dots > 0$.
2. $a_n, a_{n-2}, \dots > 0$ e $\Delta_2, \Delta_4, \dots > 0$.
3. $a_n, a_{n-1}, a_{n-3}, \dots > 0$ e $\Delta_1, \Delta_3, \dots > 0$.
4. $a_n, a_{n-1}, a_{n-3}, \dots > 0$ e $\Delta_2, \Delta_4, \dots > 0$.

3.1.1 Condizioni di Liénard-Chipart per la bicicletta

Applichiamo la condizione 4 di Liénard-Chipart al polinomio caratteristico (3.5), che è un'equazione algebrica con coefficienti reali della forma (3.6) con $n = 4$ e

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta, \quad a_2 = \gamma, \quad a_3 = \delta, \quad a_4 = \epsilon.$$

Notiamo che

$$\alpha = \det M > 0 \quad (3.7)$$

perchè M è definita positiva. Allora gli autovalori della linearizzazione del sottosistema (3.3) hanno tutti parte reale negativa se e solo se:

$$\epsilon > 0 \quad (3.8)$$

$$\delta > 0 \quad (3.9)$$

$$\beta > 0 \quad (3.10)$$

$$\Delta_2 = \beta\gamma - \alpha\delta > 0 \quad (3.11)$$

$$\Delta_4 = \epsilon(\delta(\beta\gamma - \alpha\delta) - \beta^2\epsilon) > 0$$

Considerando la condizione (3.8), l'ultima può essere sostituita da:

$$\tilde{\Delta}_4 := \delta(\beta\gamma - \alpha\delta) - \beta^2\epsilon = \delta\Delta_2 - \beta^2\epsilon > 0 \quad (3.12)$$

Osserviamo che:

Fatto Le condizioni di stabilità sono equivalenti a:

$$\beta, \delta, \epsilon, \tilde{\Delta}_4 > 0$$

Dimostrazione. Se $\beta, \delta, \epsilon, \tilde{\Delta}_4 > 0$, allora

$$\Delta_2 = \frac{1}{\delta}(\delta\Delta_2) = \frac{1}{\delta}(\tilde{\Delta}_4 + \beta^2\epsilon) > 0. \quad \square$$

Poiché i coefficienti β, δ, ϵ dipendono dalla velocità V , si ha che la stabilità del moto stazionario della bicicletta dipende dalla velocità a cui essa si muove.

Osservazione. Se le condizioni di stabilità (3.8)-(3.12) sono soddisfatte, allora $\gamma > 0$, che è dunque una condizione necessaria per la stabilità.

3.1.2 Dipendenza dalla velocità

Vogliamo ora vedere la dipendenza delle condizioni di stabilità dalla velocità V . I limiti superiore e inferiore della velocità possono essere rispettivamente zero e infinito. Fisicamente sappiamo che una bicicletta è instabile a velocità nulla. Riscriviamo le condizioni (3.8)-(3.9)-(3.10)-(3.12) in termini dei parametri del sistema e in funzione solo della velocità V . Come verificato nell'App.B, si ha:

$$\epsilon = e_0 + e_2V^2$$

$$\delta = d_1V + d_3V^3$$

$$\beta = b_1V$$

$$\tilde{\Delta}_4 = V^2(r_4V^4 + r_2V^2 + r_0)$$

dove i termini $e_0, e_2, d_1, d_3, b_1, r_4, r_2$ e r_0 dipendono dai parametri del sistema, ma non dalla velocità V . (Per le espressioni esplicite si veda App.B).

Studiamo cosa accade alle condizioni di stabilità quando le radici dell'equazione caratteristica passano dal descrivere un sistema stabile (hanno tutte parte reale nulla o negativa) al descrivere un sistema instabile (esiste una radice con parte reale positiva). Un sistema stabile può diventare instabile in due modi (come mostrato in fig. 3.2):

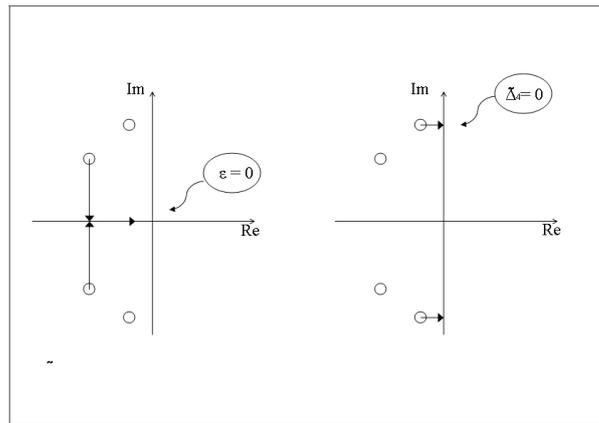


Fig. 3.1

1. Una radice reale negativa dell'equazione caratteristica diventa positiva. In questo caso essa dovrà passare per zero. Ciò accade quando $\epsilon = 0$.

Dimostrazione. Sostituiamo $\lambda = 0$ nell'equazione (3.5) e otteniamo $\epsilon = 0$.

2. La parte reale negativa di una coppia di radici complesse coniugate diventa positiva. In questo passaggio le radici dovranno diventare puramente immaginarie. Ciò accade quando $\tilde{\Delta}_4 = 0$.

Dimostrazione. Sostituiamo $\lambda = iw$, con $w \in R$, nell'equazione (3.5). Otteniamo $\alpha w^4 - i\beta w^3 - \gamma w^2 + i\delta w + \epsilon = 0$ e dunque $\alpha w^4 - \gamma w^2 + \epsilon = 0$, $\beta w^3 - \delta w = 0$ che risolte in w^2 danno $\gamma\delta\beta = \alpha\delta^2 + \epsilon\beta^2$, cioè $\tilde{\Delta}_4 = 0$.

Ciò significa che se per certi valori dei parametri l'equilibrio è stabile e ci muoviamo lungo una curva nello spazio dei parametri (per esempio variando V) usciremo dalla regione stabile in un punto dove

$$\tilde{\Delta}_4 = 0 \quad \text{e/o} \quad \epsilon = 0.$$

Invece se partiamo da una regione instabile e ci muoviamo lungo una curva, entreremo nella regione stabile in un punto dove una, fra $\tilde{\Delta}_4 = 0$ e ϵ , è nulla e l'altra è ≥ 0 .

Osserviamo allora le condizioni su ϵ e $\tilde{\Delta}_4$. Al crescere di V ϵ può cambiare segno una volta, $\tilde{\Delta}_4$ due volte e quindi, in funzione della velocità, si hanno al massimo quattro diverse regioni di stabilità/instabilità (fig.3.2) e quale situazione si verifica dipende dai parametri della bicicletta. Delle figure si possono trovare in [4].

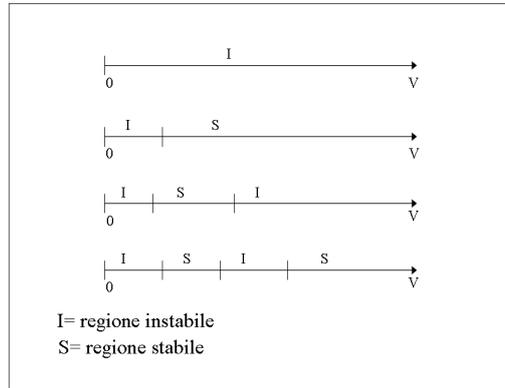


Fig. 3.2: Regioni di stabilità/instabilità

3.2 Esempio: il modello primitivo di una bicicletta

Seguendo [4], analizziamo il cosiddetto *modello primitivo* di una bicicletta e vediamo come la stabilità di questo sistema dipenda dalle quantità che lo descrivono. Esso differisce dal modello base in quanto:

- l'asse di sterzo ha inclinazione nulla: $\lambda = 0$;
- la distanza perpendicolare (avancorsa) tra l'asse di sterzo e il punto di contatto della ruota anteriore con il piano stradale è nulla: $c_f = 0$;
- $H_t = 0$, $H_f = 0$ (ciò può essere pensato come se la bicicletta fosse priva di ruote);
- il centro di massa del sistema anteriore si trova sull'asse di sterzo: $d = 0$.

La verifica numerica delle condizioni che seguono è stata fatta in [4]¹. Esse sono state verificate per velocità V opportune e per dei valori tipici delle masse. Poichè $\tilde{\Delta}_4$ è difficile da analizzare, si studiano le altre condizioni e, quando queste sono soddisfatte, si controlla anche la positività di $\tilde{\Delta}_4$.

Per il modello primitivo si ha:

$$\alpha, \beta > 0$$

$$\delta < 0$$

$$\epsilon = 0$$

per tutti i valori della velocità. (Per una descrizione piú approfondita dei diversi termini consultare App.C). Quindi questo modello non è mai stabile. È nostro interesse capire come esso possa essere reso stabile.

Si considerano innanzitutto H_t , H_f entrambi positivi (abbiamo così aggiunto le ruote al modello primitivo). In tal caso, come si può vedere in [4], si ha:

$$\alpha, \beta > 0$$

¹Nel programma utilizzato in [4] per la verifica delle condizioni di stabilità, al posto di V si usa Vp dove $p = 5280 * \frac{12}{3600}$

$$\epsilon = 0.$$

δ diventa positivo per velocità grandi, ma, poichè ϵ rimane ancora nullo, il modello non è stabile.

Bisogna allora esaminare la condizione per ϵ . In [4] si trova che ϵ diventa positivo, ad esempio, con inclinazione dell'asse di sterzo λ (positiva o negativa), con $c_f \neq 0$, o spostando il centro di massa del sistema anteriore dall'asse di sterzo, $d \neq 0$.

Conclusioni

Il lavoro di questa tesi è consistito, innanzitutto, nel selezionare un problema, riguardante la dinamica della bicicletta, da studiare e comprendere. Tra i molti problemi presenti nella letteratura, abbiamo scelto quello inerente la stabilità. In un primo momento, da [3] e [4], abbiamo cercato di capire qual è la forma delle equazioni del moto della bicicletta e come avviene la linearizzazione attorno al moto stazionario. Per lo studio della stabilità di questo moto stazionario abbiamo ripercorso l'analisi linearizzata di [4], interpretandola alla luce del criterio di Liénard-Chipart, invece che di quello di Routh-Hurwitz e abbiamo controllato le espressioni per le condizioni di stabilità presenti in [4] (si vedano App.B e App.C).

Dal punto di vista dinamico, questa analisi mostra che, nel garantire la stabilità della bicicletta, ricoprono un ruolo essenziale alcuni parametri: l'inclinazione dell'asse di sterzo, l'avancorsa e la distanza del centro di massa anteriore dall'asse di sterzo. Questo tipo di analisi, seppure elementare, può però costituire la base per uno studio più approfondito. Sarebbe interessante, ad esempio, capire come potrebbe influire il ciclista, che qui è assunto fisso con il telaio, sulla stabilità del moto della bicicletta.

Appendice A

Descrizione dei termini presenti nelle equazioni del moto linearizzate

Di seguito si esprimono i termini presenti nelle equazioni del moto linearizzate, in funzione dei parametri della bicicletta, calcolati in [4].

$$M = \begin{pmatrix} M_{\chi\chi} & M_{\chi\psi} \\ M_{\psi\chi} & M_{\psi\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{yy} & F'_{\lambda y} + \frac{c_f}{c_w} T_{yz} \\ F'_{\lambda y} + \frac{c_f}{c_w} T_{yz} & F'_{\lambda\lambda} + 2\frac{c_f}{c_w} F''_{\lambda z} + \frac{c_f^2}{c_w^2} T_{zz} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{\chi\chi} & C_{\chi\psi} \\ C_{\psi\chi} & C_{\psi\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(H_f \cos \lambda + \frac{c_f}{c_w} H_t) + V(T_{yz} \frac{\cos \lambda}{c_w} - \frac{c_f}{c_w} m_t \bar{h}_t) \\ (H_f \cos \lambda + \frac{c_f}{c_w} H_t) & V(\frac{\cos \lambda}{c_w} (F''_{\lambda z} + \frac{c_f}{c_w} T_{zz}) + \frac{c_f}{c_w} \nu) \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} K_{\chi\chi} & K_{\chi\psi} \\ K_{\psi\chi} & K_{\psi\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -gm_t \bar{h}_t & g\nu - H_t V \frac{\cos \lambda}{c_w} - V^2 \frac{\cos \lambda}{c_w} m_t \bar{h}_t \\ g\nu & -g\nu \sin \lambda + V H_f \sin \lambda \frac{\cos \lambda}{c_w} + V^2 \frac{\cos \lambda}{c_w} \nu \end{pmatrix}$$

- H_f è la componente del momento angolare della ruota anteriore rispetto al suo asse: $H_f = C_f \dot{\phi}_f$ con C_f l'appropriato momento d'inerzia della ruota anteriore. Similmente $H_r = C_r \dot{\phi}_r$ è la componente del momento angolare della ruota posteriore e $H_t = H_f + H_r$. Si noti che H_f e H_r sono funzioni della velocità V .
- T_{yy} , T_{yz} , T_{zz} (e T_{xx}) sono le componenti non nulle della matrice di inerzia in una configurazione del moto stazionario, relativa al punto di contatto della ruota posteriore nel sistema di coordinate $x_r y_r z_r$.
 $T_{yy} = m_r \bar{h}_r^2 + R_{\bar{y}\bar{y}} + m_f \bar{h}_f^2 + F_{\bar{y}\bar{y}}$
 $T_{yz} = -m_r \bar{h}_r \bar{l}_r + R_{\bar{y}\bar{z}} - m_f \bar{h}_f (c_w + \bar{l}_f) + F_{\bar{y}\bar{z}}$
 $T_{zz} = m_r \bar{l}_r^2 + R_{\bar{z}\bar{z}} + m_f (c_w + \bar{l}_f)^2 + F_{\bar{z}\bar{z}}$
dove $R_{\bar{y}\bar{y}}$, $R_{\bar{y}\bar{z}}$, $R_{\bar{z}\bar{z}}$ (e $R_{\bar{x}\bar{x}}$) sono le componenti della matrice di inerzia del sistema posteriore nel sistema $\bar{x}_r \bar{y}_r \bar{z}_r$.
- $F'_{\lambda\lambda}$ è il momento d'inerzia del sistema anteriore rispetto all'asse di sterzo.
 $F'_{\lambda\lambda} = m_f d^2 + F_{\bar{y}\bar{y}} \sin^2 \lambda - F_{\bar{y}\bar{z}} \sin 2\lambda + F_{\bar{z}\bar{z}} \cos^2 \lambda$
dove $F_{\bar{y}\bar{y}}$, $F_{\bar{y}\bar{z}}$, $F_{\bar{z}\bar{z}}$ (e $F_{\bar{x}\bar{x}}$) sono le componenti del tensore di inerzia del sistema anteriore calcolato nel sistema $\bar{x}_f \bar{y}_f \bar{z}_f$.

- $F'_{\lambda y}$ si può interpretare come la coppia di torsione rispetto all'asse di sterzo necessaria per inclinare la bicicletta, é definita dal tensore d'inerzia anteriore misurato rispetto al punto di intersezione tra l'asse di sterzo e il piano stradale.

$$F'_{\lambda y} = -m_f \bar{h}_f d - F_{\bar{y}y} \sin \lambda + F_{\bar{y}z} \cos \lambda.$$
- $F''_{\lambda z}$ si può interpretare come la coppia di torsione rispetto all'asse di sterzo dovuta all'accelerazione di imbardata della bicicletta, é definita dal tensore d'inerzia anteriore misurato rispetto al punto di intersezione tra l'asse di sterzo e la perpendicolare del punto di contatto della ruota posteriore.

$$F''_{\lambda z} = m_f (c_w + \bar{l}_f) d - F_{\bar{y}z} \sin \lambda + F_{\bar{z}z} \cos \lambda.$$
- ν é una grandezza definita come: $\nu = m_f d + \frac{c_f}{c_w} m_t \bar{l}_t.$

Appendice B

Coefficienti dell'equazione caratteristica

Si vogliono scrivere le condizioni (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.12) in termini dei parametri del sistema e in funzione della velocità V .¹

$$\alpha = \det M = a_0 = T_{yy}F'_{\lambda\lambda} - (F'_{\lambda y})^2 + 2\frac{c_f}{c_w}(T_{yy}F''_{\lambda z} - T_{yz}F'_{\lambda y}) + \left(\frac{c_f}{c_w}\right)^2(T_{yy}T_{zz} - T_{yz}^2)$$

$$\beta = M * C = b_1V = V\left[\frac{\cos \lambda}{c_w}(T_{yy}F''_{\lambda z} - T_{yz}F'_{\lambda y}) + \frac{\cos \lambda}{c_w} \frac{c_f}{c_w}(T_{yy}T_{zz} - T_{yz}^2) + \frac{c_f}{c_w}(T_{yy}m_f d + F'_{\lambda y}m_t \bar{h}_t) + \left(\frac{c_f}{c_w}\right)^2(T_{yy}m_t \bar{l}_t + T_{yz}m_t \bar{h}_t)\right]$$

$$\begin{aligned} \gamma = M * K + \det C = c_0 + c_2V^2 = & [-F'_{\lambda\lambda}gm_t \bar{h}_t - 2F'_{\lambda y}gm_f d - T_{yy}g \sin \lambda m_f d + \\ & + \frac{c_f}{c_w}(-2F'_{\lambda y}gm_t \bar{l}_t - 2T_{yz}gm_f d - 2F''_{\lambda z}gm_t \bar{h}_t - T_{yy}gm_t \bar{l}_t \sin \lambda) + \left(\frac{c_f}{c_w}\right)^2(-T_{zz}gm_t \bar{h}_t - \\ & - 2T_{yz}gm_t \bar{l}_t) + V^2\left[\frac{H_f^2}{V^2} \cos^2 \lambda + \frac{\cos \lambda}{c_w}(m_f d T_{yy} + \frac{H_t}{V}F'_{\lambda y} + F'_{\lambda y}m_t \bar{h}_t - \frac{H_f}{V}T_{yz} \cos \lambda + \right. \\ & + \frac{H_f}{V}T_{yy} \sin \lambda) + \frac{c_f}{c_w}\left(2\frac{H_f H_t}{V^2} \cos \lambda + \frac{H_f}{V}m_t \bar{h}_t \cos \lambda\right) + \frac{\cos \lambda}{c_w} \frac{c_f}{c_w}(T_{yy}m_t \bar{l}_t + m_t h_t \bar{T}_{yz}) + \\ & \left. + \left(\frac{c_f}{c_w}\right)^2\left(\frac{H_t}{V}m_t \bar{h}_t + \frac{H_f^2}{V^2}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\delta = C * K = d_1V + d_3V^3 = V\left[\frac{\cos \lambda}{c_w}(-F''_{\lambda z}gm_t \bar{h}_t - T_{yz}gm_f d) + \frac{\cos \lambda}{c_w} \frac{c_f}{c_w}(-T_{zz}gm_t \bar{h}_t - T_{yz}gm_t \bar{l}_t)\right] + V^3\left[\frac{H_f}{V} \frac{\cos \lambda}{c_w}m_t \bar{h}_t \cos \lambda + \frac{\cos \lambda}{c_w} \cos \lambda \frac{H_f H_t}{V^2} + \frac{\cos \lambda}{c_w} \frac{c_f}{c_w}\left(\frac{H_t^2}{V^2} + \frac{H_t}{V}m_t \bar{h}_t\right)\right]$$

$$\epsilon = K * K = e_0 + e_2V^2 = g^2[m_t \bar{h}_t \sin \lambda m_f d - m_f^2 d^2 + \frac{c_f}{c_w}(m_t^2 \bar{h}_t \bar{l}_t \sin \lambda - 2m_f d m_t \bar{l}_t) - \left(\frac{c_f}{c_w}\right)^2(m_t^2 \bar{l}_t^2)] + V^2 g\left[\frac{\cos \lambda}{c_w}(-m_t \bar{h}_t \frac{H_f}{V} \sin \lambda + \frac{H_t}{V}m_f d) + \frac{\cos \lambda}{c_w} \frac{c_f}{c_w}\left(\frac{H_t}{V}m_t \bar{l}_t\right)\right]$$

¹Si ricordi che H_f e H_r sono funzioni della velocità V .

$$\tilde{\Delta}_4 = \beta\gamma\delta - \alpha\delta^2 - \epsilon\beta^2 = V^2(r_4V^4 + r_2V^2 + r_0)$$

con

$$r_4 = b_1c_2d_3 - a_0d_3^2,$$

$$r_2 = b_1c_0d_3 + b_1c_2d_1 - 2a_0d_1d_3 - e_2b_1^2,$$

$$r_0 = b_1c_0d_1 - a_0d_1^2 - e_0b_1^2.$$

($a_0, b_1, c_0, c_2, d_1, d_3, e_0, e_2$ sono stati definiti sopra.)²

²L'espressione qui trovata per r_0 corregge la (4.10) presente in [4]

Appendice C

Il modello primitivo di una bicicletta

Le condizioni (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) la cui verifica numerica è stata fatta in [4], per il modello primitivo, in termini dei parametri del sistema, risultano ¹:

$$\alpha = T_{yy}F'_{\lambda\lambda} - (F'_{\lambda y})^2 = T_{yy}F_{\bar{z}z} - (F_{\bar{y}z})^2 = (m_r\bar{h}_r^2 + R_{\bar{y}y} + m_f\bar{h}_f^2)F_{\bar{z}z} + (F_{\bar{y}y}F_{\bar{z}z} - F_{\bar{y}z}^2) > 0$$

$$\beta = \frac{V}{c_w}(T_{yy}F''_{\lambda z} - T_{yz}F'_{\lambda y}) = \frac{V}{c_w}[(m_r\bar{h}_r^2 + R_{\bar{y}y} + m_f\bar{h}_f^2)F_{\bar{z}z}] + (-R_{\bar{y}z} + m_r\bar{h}_r\bar{l}_r + m_f\bar{h}_f(\bar{l}_f + c_w))F_{\bar{y}z}] + (F_{\bar{y}y}F_{\bar{z}z} - F_{\bar{y}z}^2) > 0$$

$$\delta = -\frac{V}{c_w}F_{\bar{z}z}gm_t\bar{h}_t < 0$$

$$\epsilon = 0$$

Per il modello primitivo con H_t , H_f entrambi positivi si ha che le condizioni α e β non vengono modificate, mentre:

$$\delta = V^3\left(\frac{1}{c_w}\frac{H_f}{V}m_t\bar{h}_t + \frac{1}{c_w}\frac{H_f H_t}{V^2}\right) - \frac{V}{c_w}F_{\bar{z}z}gm_t\bar{h}_t > 0$$

$$\epsilon = 0$$

¹L'espressione qui riportata per δ corregge quella presente in [4] a pag.106

Bibliografia

- [1] Ju. I. Neĭmark, N. A. Fufaev, *Dynamics of Nonholomic System.*
- [2] F. R. Gantmacher, *Lezioni di meccanica analitica.*
- [3] J. P. Meijard, Jim M. Papadopoulos, Andy Ruina, A. L. Schwab, *Linearized dynamics equation for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review.*
- [4] R. S. Hand *Comparison and stability analysis of linearized equation of motion for a basic bicycle model.*
- [5] F. Fassò *Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica.*
- [6] P. Basu-Mandal, Anindya Chatterjee, Jim M. Papadopoulos *Hands free circular motion of a benchmark bicycle.*
- [7] F. R. Gantmacher *The theory of matrices. Vol.2.*