



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

Tesi di laurea triennale in Matematica

*(Pre)Quantizzazione
Geometrica*

Laureando:

Alessandro Tessari

Matricola 579454

Relatori:

Prof. Francesco Fassó

Prof. Nicola Sansonetto

Anno Accademico 2010/2011

Indice

1	Il problema della Quantizzazione	3
1.1	Un pò di geometria simplettica	4
1.2	Punto di vista classico e quantistico di un Sistema Dinamico . .	6
1.2.1	Le regole di quantizzazione di Dirac e Quantizzazione Canonica	8
1.2.2	Quantizzazione Geometrica e i suoi obbiettivi	9
2	Prequantizzazione	11
2.1	Fibrato lineare hermitiano	11
2.2	Condizione di integrabilità e teorema di Weil	13
2.3	Prequantizzazione di un sistema fisico	17

Capitolo 1

Il problema della Quantizzazione

Verso la fine del XIX secolo la fisica sembrava poter fornire una chiave di interpretazione per gran parte dei fenomeni naturali, dal moto dei pianeti al comportamento delle cariche elettriche. Tuttavia vi erano alcuni fenomeni, come l'effetto fotoelettrico o la radiazione del corpo nero, che non rientravano nel quadro interpretativo della fisica classica, ma convincimento di quasi tutti gli scienziati dell'epoca era che, prima o poi, anche questi avrebbero trovato il loro posto all'interno della teoria. La situazione invece si sviluppò in modo profondamente diverso e la possibilità di una descrizione oggettiva dei fenomeni naturali attraverso il meccanismo deterministico di causa ed effetto, proprio della fisica classica, sembrava svanire quando si consideravano fenomeni microscopici, come la dinamica delle particelle. In sostanza infatti la fisica classica è nata e si è sviluppata osservando fenomeni che riguardano corpi lenti e grandi e, in quest'ambito, risulta funzionare perfettamente. La fenomenologia che si andava però scoprendo nell'emergente fisica atomica metteva in luce l'inadeguatezza delle teorie classiche per spiegare gli strani comportamenti dello strano mondo delle particelle.

Già nel 1900, gli studi sull'emissione della luce da parte di un corpo incandescente (corpo nero), avevano portato *Max Planck* a ipotizzare che gli atomi eccitati emettessero o assorbissero energia solo in quantità discrete, multipli di una certa quantità fissa di energia. Si stavano così gettando le basi che portarono, da lì a breve, alla nascita della *meccanica quantistica*. Cercando di interpretare gli aspetti della dinamica degli atomi, la *meccanica matriciale* di *Heisenberg* e la *meccanica ondulatoria* di *Schrödinger* aprirono la strada verso la struttura matematica di questa nuova teoria fisica. *Dirac* e, successivamente, *von Neumann* completarono l'opera giungendo alla prima formulazione completa della meccanica quantistica. L'aspetto profondamente innovativo di questa nuova teoria fisica è che essa non si prefigge più di prevedere con esattezza l'esito di una misurazione di una data grandezza ma si limita ad esprimere la probabilità di ottenere un dato risultato, rinunciando così al determinismo proprio della fisica classica. Si osservi che questa condizione

di incertezza o indeterminazione non è da interpretarsi come dovuta a una conoscenza incompleta, da parte dello sperimentatore, dello stato in cui si trova il sistema fisico osservato, ma è una caratteristica intrinseca, ineliminabile, del sistema e del mondo in generale.

In questo scritto ci soffermeremo sul problema della *quantizzazione* e, in particolare, tratteremo la procedura della *prequantizzazione geometrica*, primo passo verso la descrizione quantistica di un sistema classico.

Cominceremo, nella prossima sezione, con le nozioni di geometria симпlettica utili per il formalismo hamiltoniano della meccanica classica per poi dare attenzione alle analogie e differenze presenti tra le descrizioni classica e quantistica di un sistema dinamico. Concluderemo il primo capitolo introducendo il problema della quantizzazione e la cosiddetta *quantizzazione geometrica*, procedura matematica che di fatto completa la costruzione del sistema quantistico cominciata dalla prequantizzazione.

Nel secondo capitolo studieremo appunto la prequantizzazione. Per prima cosa rivedremo i *fibrati lineari hermitiani*, indispensabili per i nostri fini, e, subito dopo, la condizione di integrabilità. Infine vedremo come si prequantizza un sistema, costruendo lo spazio di Hilbert e gli operatori su di esso che lo descrivono, concludendo poi con due semplici esempi.

1.1 Un pò di geometria симпlettica

La geometria симпlettica è lo strumento naturale per descrivere un sistema in meccanica classica. Di conseguenza, essa gioca un ruolo importante anche nella quantizzazione del sistema stesso.

Ricordiamo i tre operatori lineari che caratterizzano il *calcolo differenziale di Cartan* su una varietà liscia M :

$$\begin{aligned}
 * \text{ derivata esterna} \quad & d: \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M) \\
 & \omega = \sum_I a_I dx^I \longmapsto d\omega = \sum_I \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^I; \\
 * \text{ prodotto interno} \quad & \iota: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \\
 & (\xi, \omega) \longmapsto \iota_\xi \omega = \omega(\xi, \cdot); \\
 * \text{ derivata di Lie} \quad & \mathfrak{L}: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M) \\
 & (\xi, \omega) \longmapsto \mathfrak{L}_\xi \omega = \iota_\xi d\omega + d\iota_\xi \omega.
 \end{aligned}$$

Tali operatori sono strettamente correlati tra loro come mostrano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 d^2 &= d \circ d = 0, & \mathfrak{L}_\xi \iota_\zeta - \iota_\zeta \mathfrak{L}_\xi &= \iota_{[\xi, \zeta]}, \\
 d\mathfrak{L}_\xi - \mathfrak{L}_\xi d &= 0, & \mathfrak{L}_\xi \mathfrak{L}_\zeta - \mathfrak{L}_\zeta \mathfrak{L}_\xi &= \mathfrak{L}_{[\xi, \zeta]}, \\
 \iota_\xi \iota_\zeta + \iota_\zeta \iota_\xi &= 0, & d\iota_\xi + \iota_\xi d &= \mathfrak{L}_\xi.
 \end{aligned}$$

L'ultima di queste equazioni è nota come *formula magica di Cartan*.

Definizione. Una *forma simplettica* su una varietà M è una 2-forma ω chiusa e nondegenere. Una *varietà simplettica* è una coppia (M, ω) dove M è una varietà liscia e ω una forma simplettica su M .

Il *teorema di Darboux* assicura che, localmente, qualsiasi varietà simplettica (della stessa dimensione) è indistinguibile. Su ogni varietà simplettica (M^{2n}, ω) si può infatti costruire un atlante le cui carte locali $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, dette *carte simplettiche*, sono tali che, se $\varphi_\alpha(u) = (x^1(u), \dots, x^n(u), p_1(u), \dots, p_n(u))$, allora la rappresentazione locale di ω ha la forma $\omega|_{U_\alpha} = dp_i \wedge dx^i$. Le componenti x^i, p_i sono dette *coordinate canoniche* della varietà.

Uno degli esempi più importanti di varietà simplettica è il *fibrato cotangente* di una varietà M . Difatti su T^*M è definita una forma simplettica ω come il differenziale della *1-forma di Liouville* θ , naturalmente definita su T^*M . Qualsiasi sistema di coordinate locali $\{x^i\}$ sulla base M si può estendere ad una carta simplettica sul fibrato $\{x^i, p_i\}$ e, in questo modo, si ottiene:

$$\theta = p_i dx^i; \quad \omega = d\theta = dp_i \wedge dx^i.$$

La non degenerazione della struttura simplettica porta alcune importanti conseguenze. Innanzitutto la dimensione di una varietà simplettica è necessariamente pari. Poi se ω è una forma simplettica su una varietà $2n$ -dimensionale, essa induce una forma volume che in coordinate canoniche si esprime mediante:

$$v_\omega = \frac{1}{n!} \omega^n = dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Inoltre, ad ogni punto $x \in M$, ω_x induce un isomorfismo tra $T_x M$ e $T_x^* M$, dato localmente da $\xi^i \mapsto \xi^i \omega_{ij}$. Si può quindi facilmente costruire, estendendo quello indotto da ω_x , un isomorfismo $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare tra l'insieme dei campi vettoriali (lisci) $\mathfrak{X}(M)$ e il suo duale $\mathfrak{X}^*(M) = \Omega^1(M)$:

$$\begin{array}{ccc} \omega^\flat: \mathfrak{X}(M) & \xrightarrow{\cong} & \mathfrak{X}^*(M) & \omega^\sharp: \mathfrak{X}^*(M) & \xrightarrow{\cong} & \mathfrak{X}(M) \\ \xi \longmapsto & & \xi^\flat = \iota_\xi \omega & \alpha \longmapsto & & \alpha^\sharp = \xi \lrcorner \iota_\xi \omega \equiv \alpha. \end{array}$$

Gli elementi di $\mathfrak{X}(M)$ corrispondenti a 1-forme esatte formano l'insieme $\mathfrak{X}_{\text{th}}(M)$ dei *campi vettoriali hamiltoniani*, mentre quelli corrispondenti a 1-forme chiuse, l'insieme $\mathfrak{X}_{\text{th}}(M)$ *campi vettoriali localmente hamiltoniani*. In questo modo, ad ogni funzione in $\mathcal{C}^\infty(M)$ rimane associato un campo vettoriale in $\mathfrak{X}_{\text{th}}(M)$, precisamente:

Definizione. Sia (M^{2n}, ω) una varietà simplettica e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione in $\mathcal{C}^\infty(M)$. Il campo vettoriale ξ_f determinato da:

$$\iota_{\xi_f} \omega = -df, \quad \text{cioè, equivalentemente,} \quad \xi_f = (-df)^\sharp$$

è detto *campo vettoriale hamiltoniano di f* .

In coordinate canoniche il campo vettoriale hamiltoniano di una funzione f assume la forma:

$$\xi_f = \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}, -\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{O}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \mathbb{E} \cdot \mathbf{d}f.$$

Introduciamo ora un'operazione binaria, antisimmetrica, su $\mathcal{C}^\infty(M)$, che dà a quest'ultimo la struttura di *algebra di Lie*.

Definizione. Data una varietà simplettica (M^{2n}, ω) , diremo *parentesi di Poisson* di due funzioni $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la funzione:

$$\{f, g\} = \omega(\xi_f, \xi_g) = \mathcal{L}_{\xi_f} g = \xi_f(g) = \iota_{\xi_f} \mathbf{d}g.$$

Quindi, ad ogni coppia di funzioni $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, si può associarne una terza $\{f, g\}$. Di nuovo, in coordinate canoniche, questa ha una forma relativamente semplice:

$$\{f, g\} = \mathcal{L}_{\xi_f} g = \left(\frac{\partial g}{\partial x^i}, \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}, -\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Le parentesi di Poisson fanno di $\mathcal{C}^\infty(M)$ un'algebra di Lie in quanto, per ogni terna di funzioni $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, viene soddisfatta l'*identità di Jacobi*: $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ (ciò discende immediatamente dalla chiusura di ω). È importante osservare che $\{f, g\}$ contiene informazioni dinamiche sul sistema, precisamente descrive la variazione di g lungo il flusso di ξ_f (e viceversa).

Prima di andare oltre, un'altra importante identità che, inoltre, mostra che $f \mapsto \xi_f$ è un omomorfismo di algebre di Lie è:

$$[\xi_f, \xi_g] = \xi_{\{f, g\}}.$$

Questa ha infatti un ruolo centrale poichè, come dopo vedremo, su di essa si fonda il cosiddetto paradigma della quantizzazione canonica secondo le regole di *Dirac*.

1.2 Punto di vista classico e quantistico di un Sistema Dinamico

Facciamo ora un parallelo tra le descrizioni classica e quantistica di un sistema fisico, dando attenzione a come la meccanica classica sia permeata dalla geometria simplettica mentre quella quantistica tratti spazi proiettivi e operatori lineari su di essi.

Spazio degli stati

Nel formalismo hamiltoniano della meccanica classica, lo spazio degli stati è il ben noto *spazio delle fasi*, rappresentato da una varietà simplettica (M, ω) , in cui ogni punto rappresenta uno *stato fisico*.

In meccanica quantistica, invece, gli stati sono descritti dai cosiddetti *vettori di stato*. Il primo postulato della meccanica quantistica afferma che lo spazio

degli stati è rappresentato da uno spazio di Hilbert \mathcal{H} separabile i cui raggi sono gli stati fisici (le equazioni che governano l'evoluzione del sistema sono lineari), quindi il sistema è descritto dal suo proiettivo $\mathbb{P}\mathcal{H}$, i cui elementi sono:

$$|\psi\rangle = \{\lambda\psi : \lambda \in \mathbb{C}^\times, \psi \in \mathcal{H}\}.$$

È da notare che, a differenza dal caso classico, pur rimanendo una varietà differenziabile, lo spazio degli stati è generalmente infinito dimensionale.

Osservabili e dinamica del sistema

Nella visione classica, un'osservabile, ossia una quantità misurabile, è rappresentata da una funzione liscia sullo spazio delle fasi. Il risultato di una misura di un'osservabile, quando il sistema si trova in un particolare stato, è dato dal valore della funzione corrispondente valutata nel punto che rappresenta lo stato in questione.

In meccanica quantistica invece gli osservabili sono rappresentati da operatori lineari autoaggiunti sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} . Denoteremo con $A(\mathcal{H})$ l'insieme degli operatori lineari autoaggiunti su \mathcal{H} . Si postula che il risultato di una misura appartiene allo spettro degli autovalori del operatore in questione (operatore autoaggiunto \Rightarrow autovalori reali).

Sia in meccanica classica che in meccanica quantistica la dinamica di un sistema è collegata alla conservazione dell'osservabile H dell'energia del sistema: l'*hamiltoniana*. In meccanica classica l'evoluzione di un osservabile indipendente dal tempo è dato dalle *equazioni di Hamilton*:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \phi_t^{\xi_H}) = \xi_H(f \circ \phi_t^{\xi_H}) = \{H, f \circ \phi_t^{\xi_H}\},$$

La dinamica del sistema è quindi determinata dal campo vettoriale hamiltoniano della funzione hamiltoniana.

In meccanica quantistica l'evoluzione dei vettori di stato è governata dall'*equazione di Schrödinger*:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle,$$

in cui \hat{H} è l'operatore hamiltoniano corrispondente all'energia del sistema.

Questioni di irriducibilità e Simmetrie del sistema

In meccanica classica si definisce un *insieme completo di osservabili* un insieme di funzioni i cui campi hamiltoniani formano una base per gli spazi tangenti. [Questa definizione è dovuta a Mark J. Gotay e differisce da quella data da A.A. Kirillov per cui un tale insieme è quello per cui ogni funzione commutante con tutti gli elementi dell'insieme risulta necessariamente costante. La piccola ma cruciale differenza sta nel fatto che, con la definizione di Kirillov, si ha che i campi hamiltoniani generano lo spazio tangente "solo" quasi ovunque sulla varietà.] Localmente, un tale insieme di funzioni determina delle coordinate sulla varietà che modella il sistema. Un aspetto importante è che non esistono sottovarietà invarianti sotto l'azione dei flussi di questi campi hamiltoniani, cioè M è *irriducibile* sotto l'azione dei gruppi di diffeomorfismi locali corrispondenti.

Equivalentemente un insieme completo di operatori autoggiunti è caratterizzato dal fatto che qualsiasi altro operatore commutante con ognuno di

essi è un multiplo dell'identità e, anche in questo caso, lo spazio di Hilbert è irriducibile sotto l'azione di tali operatori.

Per ultimo trattiamo il concetto delle *simmetrie* di un sistema fisico. Classicamente queste formano un gruppo di Lie, la cui azione simplettica lascia invariate le proprietà del sistema. Quindi una simmetria è rappresentata da un sottogruppo di $Sym(M)$, insieme dei simplettomorfismi di M in sé.

L'equivalente quantistico di una simmetria è una mappa $g : \mathbb{P}\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{P}\mathcal{H}$ biettiva che preserva le probabilità:

$$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \longmapsto \frac{|\langle\psi|\phi\rangle|^2}{\|\psi\|^2\|\phi\|^2},$$

è cioè un'isometria di $\mathbb{P}\mathcal{H}$. Tali trasformazioni sono indotte da operatori unitari oppure antiunitari su \mathcal{H} , e se due operatori inducono la stessa simmetria, allora questi differiscono per un fattore di fase.

1.2.1 Le regole di quantizzazione di Dirac & Quantizzazione Canonica

Con lo sviluppo della nuova fisica, nasceva anche un nuovo problema, quello della quantizzazione appunto: trovare una procedura adeguata per costruire il modello quantistico di un sistema fisico a partire dalla sua descrizione classica. *Dirac* formulò delle condizioni per la quantizzazione, secondo le quali, il problema si riduce alla ricerca di una mappa $\widehat{\cdot} : f \mapsto \widehat{f}$ che manda osservabili classiche in quelli quantistici, tale che:

Q1: $\widehat{\alpha f + g} = \alpha \widehat{f} + \widehat{g}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$;

Q2: se f è costante e $f(x) = \alpha$ per tutti i punti $x \in M$, allora $\widehat{f} = \alpha \widehat{1}$;

Q3: qualunque sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, \widehat{f} è un operatore autoaggiunto, i.e. $\widehat{f}^\dagger = \widehat{f}$;

Q4: $[\widehat{f}, \widehat{g}] = -i\hbar \widehat{\{f, g\}}$ per ogni $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$;

Q5: se $\{f_1, \dots, f_k\}$ è un insieme completo di osservabili, allora $\{\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_k\}$ è un insieme completo di operatori.

In pratica le condizioni Q1 - Q4 sono equivalenti a richiedere che tale mappa sia un omomorfismo di algebre di Lie tra $(\mathcal{C}^\infty(M), -i\hbar\{\cdot, \cdot\})$ e $(A(\mathcal{H}), [\cdot, \cdot])$. Considerando infine anche Q5, il problema della quantizzazione si riduce alla costruzione di un appropriato spazio di Hilbert \mathcal{H} , in cui si dà una rappresentazione irriducibile dell'algebra delle osservabili tramite un omomorfismo (a meno di un fattore).

Le condizioni sono più che ragionevoli tuttavia, non appena si provi a quantizzare un sistema, insorgono dei problemi: in particolare emerge che Q4 e Q5 sono incompatibili. Ciò è assicurato dal *teorema di Groenwald-van Hove* che afferma l'impossibilità di rappresentare l'intera algebra delle osservabili classiche come operatori quantistici in modo che l'azione di questi sia irriducibile.

Inoltre, siccome non si può costruire una corrispondenza biunivoca tra simmetrie classiche e quantistiche, vi sono delle complicanze anche in questa

direzione. Dal momento che non approfondiremo l'argomento delle simmetrie in questa tesi, preferiamo non addentrarci in questa problematica.

Matematici e fisici hanno comunque sviluppato vari tipi di quantizzazione che ottengono ottimi risultati. In molti casi un metodo diretto e relativamente semplice è la cosiddetta *quantizzazione canonica*, fondata sulle regole di quantizzazione di *Dirac*. Tuttavia tale procedura non è pienamente soddisfacente poichè dipende dal sistema di coordinate adottato ed inoltre si applica a sistemi con spazio delle fasi classico piatto. In secondo luogo non dà una visione unificata delle varie rappresentazioni (*Schrödinger*, *Bargmann-Fock*) con cui si può descrivere un sistema quantistico.

1.2.2 *Quantizzazione Geometrica e i suoi obiettivi*

Più di recente, negli anni 70, prendendo come modello la quantizzazione canonica, si andava sviluppando una nuova teoria che mette in relazione la meccanica classica e quantistica da un punto di vista puramente geometrico: la *quantizzazione geometrica*. Essendo una teoria geometrica questa è indipendente dalla scelta delle coordinate, si applica a varietà simplettiche e produce una visione unificata delle varie rappresentazioni di un sistema quantistico.

La quantizzazione geometrica si basa sui lavori di *Souriau* e *Konstant*, rispettivamente sulla formulazione simplettica della meccanica classica e sulla teoria di rappresentazioni di gruppi. Ne segue che essa è di fatto strettamente connessa con le rappresentazioni irriducibili di gruppi di Lie. Uno degli obiettivi, infatti, consiste nel costruire un corrispondenza tra $(M, \mathcal{C}^\infty(M))$ e $(\mathcal{H}, A(\mathcal{H}))$ in modo tale che un gruppo di simmetrie classiche venga rappresentato da un gruppo di operatori unitari. Tuttavia la teoria quantistica ottenuta tramite la procedura geometrica di *Konstant-Souriau*, nota come *pre-quantizzazione*, non soddisfa il postulato di irriducibilità dello spazio delle fasi quantistico. Per ottenere una quantizzazione geometrica completa bisogna introdurre altre strutture matematiche che tuttavia non tratteremo in questo scritto.

In conclusione è da evidenziare che, una volta completata la procedura, la quantizzazione geometrica permette di ottenere ottimi risultati. Da notare però che, nonostante talvolta, come su \mathbb{T}^2 o $T^*\mathbb{R}_+$, si possa arrivare ad una quantizzazione completa dell'algebra delle osservabili, spesso ciò non è possibile. Bisognerà infatti in molti casi rilassare le condizioni di quantizzazione, accontentandosi che Q_4 valga solo per una subalgebra delle osservabili.

Capitolo 2

Prequantizzazione

2.1 Fibrato lineare hermitiano

Prima di affrontare la procedura vera e propria di prequantizzazione, è necessario introdurre il concetto geometrico di *fibrato lineare hermitiano* e le nozioni collegate che ci serviranno.

Definizione. Un *fibrato lineare complesso* sopra una varietà liscia M , è una collezione (E, π, M) , dove $E = \bigsqcup_{x \in M} E_x$ è unione disgiunta di spazi vettoriali complessi 1-dimensionali, anch'essa con struttura di varietà liscia, soddisfacente:

- (i) la proiezione $\pi : E \rightarrow M$, che mappa punti di E_x , chiamata *fibra* sopra x , a x , è differenziabile;
- (ii) esistono un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ su M e una famiglia di mappe differenziabili $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow E$ tali che, per ogni α , $\pi \circ s_\alpha = \text{id}_{U_\alpha}$ e le funzioni $\eta_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{C} \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ definite da $(x, z) \mapsto (x, z s_\alpha(x))$ sono diffeomorfismi.

Le coppie (U_α, s_α) sono dette *frame locali*, o anche *sistemi locali*, per E .

Una mappa differenziabile $s : M \rightarrow E$ tale che $\pi \circ s = \text{id}_M$ verrà detta *sezione* e, di conseguenza, un frame locale su un aperto U della varietà base è una qualunque sezione s tale che, se $s(x) = (x, z_x)$, si ha $z_x \neq 0$ per ogni $x \in U$. Denoteremo con $\Gamma(E)$ l'insieme delle sezioni di E , naturalmente dotato di struttura di $\mathcal{C}_\mathbb{C}^\infty(M)$ -modulo. Notiamo inoltre che ogni elemento s di $\Gamma(E)$ definisce una funzione $\lambda_s : E^\times \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\lambda_s(l) l = s(\pi(l))$, ove l è un punto arbitrario di E . Viceversa ogni funzione in $\mathcal{C}_\mathbb{C}^\infty(E^\times)$ tale che $\lambda(zl) = z^{-1} \lambda(l)$ [condizione di omogeneità] definisce, tramite la stessa relazione, una sezione s_λ . Quindi $\Gamma(E)$ può essere identificato con il sottospazio di $\mathcal{C}_\mathbb{C}^\infty(E^\times)$ delle funzioni che soddisfano la condizione di omogeneità.

I fibrati lineari che useremo hanno altre due strutture, una metrica e una connessione, compatibili tra loro, che dotano il fibrato della struttura di fibrato lineare hermitiano con connessione. Formalmente:

Definizione. Sia (E, π, M) un fibrato lineare complesso. Una *metrica hermitiana* h su E è definita da una *forma sesquilineare* h_x su ogni fibra E_x tale che, per ogni $s, t \in \Gamma(E)$, la funzione $h(s, t) : M \rightarrow \mathbb{C}$, che mappa x a $h_x(s(x), t(x))$ sia differenziabile.

Una *connessione* su E è una mappa ∇ che ad ogni campo vettoriale $\xi \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$ associa un endomorfismo $\nabla_{\xi} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, chiamata *derivata covariante lungo ξ* , tale che:

- (i) $\nabla_{\xi+\zeta} s = \nabla_{\xi} s + \nabla_{\zeta} s$,
- (ii) $\nabla_{f\xi} s = f \nabla_{\xi} s$,
- (iii) $\nabla_{\xi}(fs) = \xi(f)s + f \nabla_{\xi}(s)$.

per ogni $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$ e $\xi, \zeta \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}(M)$.

Inoltre se queste due strutture sono compatibili, cioè:

$$\xi(h(s, t)) = h(s, \nabla_{\xi} t) + h(\nabla_{\xi} s, t)$$

per ogni campo vettoriale reale ξ , diremo che il fibrato è un *fibrato lineare hermitiano con connessione* (abbr. FLHC).

L'esempio più semplice ma cruciale di questo tipo di fibrato è il fibrato lineare triviale $E = M \times \mathbb{C}$ ove π è la proiezione nel primo fattore. In questo caso si può costruire un sistema globale dato da (M, s_1) , dove la *sezione unitaria* s_1 è tale che $s_1(x) = (x, 1)$. Quindi $\Gamma(E)$ risulta isomorfo a $\mathcal{C}^{\infty}(M)$ visto che ogni sezione s può essere scritta univocamente nella forma fs_1 . Inoltre si definisce facilmente una metrica hermitiana tramite $h_x((x, z_1), (x, z_2)) = z_1 \bar{z}_2$; e, scelta una 1-forma $\sigma \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}^*(M)$, ponendo

$$\nabla_{\xi}(fs_1) = (\xi(f) + 2\pi i \iota_{\xi} \sigma f) s_1,$$

si ottiene una connessione, compatibile con la metrica definita se, e solo se, σ è reale.

Questa costruzione è basilare dal momento che, localmente, ogni FLHC si comporta in questa maniera. Sia infatti (U_{α}, s_{α}) un sistema locale sul fibrato. La mappa $\xi \mapsto (2\pi i)^{-1} s_{\alpha}^{-1} \nabla_{\xi} s_{\alpha}$ è $\mathcal{C}^{\infty}(M)$ -lineare e perciò definisce una 1-forma $\sigma_{\alpha} \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}^*(U_{\alpha})$. Allora, segue dalla *regola di Liebnitz* (iii) nella definizione di FLHC, che:

$$(\nabla_{\xi} s) |_{U_{\alpha}} = \nabla_{\xi}(f_{\alpha} s_{\alpha}) |_{U_{\alpha}} = (\xi(f_{\alpha}) + 2\pi i \iota_{\xi} \sigma_{\alpha} f_{\alpha}) s_{\alpha}.$$

Questa 1-forma σ_{α} viene detta *forma di connessione locale*. Scelto ogni altro frame locale (U_{β}, s_{β}) tale che $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ non sia vuoto, usando le *funzioni di transizione* si ha $s_{\alpha} = c_{\alpha\beta} s_{\beta}$ con $c_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^{\infty}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$. Quindi le forme di connessione locali sono legate da:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\beta} + \frac{1}{2\pi i} \frac{dc_{\alpha\beta}}{c_{\alpha\beta}} \quad \text{su } U_{\alpha} \cap U_{\beta}.$$

Chiaramente qualsiasi collezione di 1-forme che soddisfa quest'ultima relazione per un'intero ricoprimento della varietà, definisce una connessione nel fibrato e, per di più, induce una 1-forma globale su E^{\times} . Sia infatti $\{\sigma_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ una tale collezione. Allora ponendo

$$\zeta_{\alpha} = \text{pr}_1^* \sigma_{\alpha} + \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z} \in \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}^*(U_{\alpha} \times \mathbb{C}^{\times}),$$

ove pr_1 denota la proiezione nel primo fattore, e, usando i diffeomorfismi η_α indotti dalle s_α , otteniamo una 1-forma $(\eta_\alpha)_* \zeta_\alpha$ definita su $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap E^\times$. Dal fatto che, per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda$, le forme $(\eta_\alpha)_* \zeta_\alpha$ e $(\eta_\beta)_* \zeta_\beta$ coincidono su $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \cap E^\times$, esiste una ben definita **forma di connessione** σ su $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}^*(E^\times)$ tale che $\eta_\alpha^* \sigma = \zeta_\alpha$ che, di conseguenza, determina completamente la connessione. Infatti, per una sezione s (dove si annulla vale l'uguaglianza ai limiti), si ha, in termini di σ :

$$\nabla_\xi s = 2\pi i \iota_\xi (s^* \sigma) s \quad \text{dato che, se } s = fs_\alpha \text{ su } U_\alpha, \quad s^* \sigma = \sigma_\alpha + \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{f}.$$

Per costruzione σ risulta invariante sotto l'azione di \mathbb{C}^\times e, inoltre, il pullback di σ tramite qualsivoglia mappa lineare non singolare $\mathbb{C}^\times \rightarrow E_x^\times$ è $(2\pi i z)^{-1} dz$, per ogni $x \in M$. Non è difficile convincersi che ogni elemento di $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}^*(E^\times)$ con queste due proprietà definisce una connessione.

Da ultimo osserviamo che, in generale, su un FLHC (E, π, M, ∇) esistono campi vettoriali ξ, ζ per cui gli operatori ∇_ξ e ∇_ζ non commutano cioè, in altre parole, una connessione solitamente ha *curvatura*. Formalmente, dati ξ, ζ , si definisce un operatore che rappresenta la curvatura tramite:

$$\text{curv}(E, \nabla)(\xi, \zeta)(s) = \frac{1}{2\pi i} ([\nabla_\xi, \nabla_\zeta] - \nabla_{[\xi, \zeta]}) s.$$

Siccome tale espressione è antisimmetrica in ξ e ζ ed $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare in ξ, ζ e s , esiste una 2-forma Ω^∇ su M , tale che $\text{curv}(E, \nabla)(\xi, \zeta)(s) = \Omega^\nabla(\xi, \zeta)s$. Diremo allora Ω^∇ **forma di curvatura** della connessione che, direttamente dalla definizione di ζ_α , si deduce avere le proprietà $\pi^* \Omega^\nabla = d\sigma$, e quindi, in ogni U_α , $\Omega^\nabla|_{U_\alpha} = d\sigma_\alpha$.

2.2 Condizione di integrabilità e teorema di Weil

Studiamo ora la *condizione di integrabilità*, che deve essere soddisfatta dalla forma simplettica del sistema in esame perchè sia possibile costruire il fibrato utile alla prequantizzazione dello stesso. Tale condizione assicura che, data una qualsiasi connessione in un fibrato lineare, la rispettiva forma di curvatura è *integrale*, cioè se la integriamo sopra una qualunque superficie 2-dimensionale in M , il risultato è un intero. Si può intuirne il significato geometrico grazie al concetto di *trasporto parrallelo*.

Per prima cosa, grazie alla forma di connessione σ , si ha naturalmente una decomposizione del fibrato tangente TE^\times ad un FLHC, precisamente:

Definizione. Diremo **distribuzione orizzontale** su TE^\times la sua sottovarietà:

$$\text{hor } TE^\times = \{\chi \in TE^\times \mid \iota_\chi \sigma = 0\},$$

diremo invece **distribuzione verticale**, *ver* TE^\times , l'insieme dei vettori tangenti alle fibre di (E, π, M) . Vale: $TE^\times = \text{hor } TE^\times \oplus \text{ver } TE^\times$.

Di conseguenza, ogni campo vettoriale in $\mathfrak{X}(E^\times)$, si decompone a sua volta come somma di una componente orizzontale e di una verticale, e verrà detto orizzontale (risp. verticale) se la sua componente verticale (risp. orizzontale)

si annulla identicamente. In questo modo si può costruire una corrispondenza tra i campi vettoriali su M e quelli su E^\times , che associa ad ogni $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ il suo *rialzamento orizzontale* ξ^ℓ , definito come l'unico elemento di $\mathfrak{X}(E^\times)$ tale che $\iota_{\xi^\ell} \sigma \equiv 0$ e che si proietta su ξ , cioè $\pi_* \xi^\ell = \xi \circ \pi$ per ogni $l \in E^\times$.

Analogamente, diremo orizzontale una curva liscia $\Gamma: [a, b] \rightarrow E^\times$, se il vettore tangente, associato ad una sua qualsiasi parametrizzazione non singolare, è sempre un vettore orizzontale. Ora, similmente al rialzamento orizzontale per i campi vettoriali si definisce quello per curve. Se $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ è una curva liscia e $l_0 \in E_{\gamma(a)}^\times$, allora esiste un'unica curva orizzontale Γ passante per l_0 e tale che $\pi \circ \Gamma = \gamma$. Supponiamo infatti che γ sia contenuta nel dominio di un frame locale (U_α, s_α) e che $l_0 = \bar{z}_0 s_\alpha$. Denotando allora con ξ_t il vettore tangente alla curva nel punto γ_t , si ha che $\Gamma_t = (\gamma_t, z_t s_\alpha(\gamma_t))$ individua una sezione definita in $\gamma([a, b])$, quindi la condizione di orizzontalità diventa:

$$\nabla_{\xi_t} \Gamma_t = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi i \iota_{\xi_t} (\Gamma_t^* \sigma) = 2\pi i \iota_{\xi_t} \left(\sigma_\alpha + \frac{1}{2\pi i} \frac{dz_t}{z_t} \right) z_t s_\alpha(\gamma_t) = 0.$$

Quindi Γ_t è individuata dalla funzione z_t , unica soluzione dell'EDO:

$$\frac{\dot{z}_t}{z_t} + 2\pi i \iota_{\xi_t} \sigma_\alpha = 0 \quad \text{con dato iniziale} \quad z_0 = \bar{z}_0.$$

Dal fatto che possiamo sempre ricoprire $\gamma([a, b])$ con un numero finito di insiemi U_α , possiamo sempre raccordare le soluzioni locali, e quindi esiste un'unica curva Γ che γ , cioè $\pi \circ \Gamma = \gamma$. Diremo che il punto $\Gamma(b)$ è stato raggiunto da $\Gamma(a)$ per *trasporto parallelo* lungo γ . Se $\gamma(a) = \gamma(b)$, cioè se la curva γ è chiusa, allora il trasporto parallelo attorno a γ induce un endomorfismo lineare di $E_{\gamma(a)}^\times$ che manda un punto l nel punto $P(l)$. Data la linearità, esiste un numero complesso z_γ che soddisfa $P(l) = z_\gamma l$.

Ora possiamo esprimere il numero z_γ come integrale di superficie sopra una qualsiasi superficie Σ , diffeomorfa ad un aperto di \mathbb{R}^2 , che abbia γ come bordo. Essendo, per ipotesi, Σ contraibile ad un punto tramite un omeomorfismo, si può prendere un aperto $U \subset M$ contenente Σ , anch'esso contraibile, in cui, di conseguenza, esiste un sezione nonnulla s_U che funge da frame locale, sia poi σ_U la forma di connessione locale. Definendo Γ come l'unica curva orizzontale che copre γ passante per $s_U(\gamma_a)$, si ha, come prima, $\Gamma_t = f_t s_U(\gamma_t)$ per qualche $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\times$. In questo modo l'orizzontalità di Γ si traduce in:

$$\dot{f}_t = -2\pi i \iota_{\xi_t} \sigma_U f_t \quad \Rightarrow \quad f_t = \exp\left(-2\pi i \int_a^t \iota_{\xi_s} \sigma_U ds\right).$$

Allora si ha:

$$z_\gamma = f_b / f_a = \exp\left(-2\pi i \int_a^b \iota_{\xi_t} \sigma_U dt\right) = \exp\left(-2\pi i \oint_\gamma \sigma_U\right).$$

L'ultimo integrale di linea, per il *teorema di Stoke*, possiamo esprimerlo come integrale di superficie su Σ :

$$z_\gamma = \exp\left(-2\pi i \int_\Sigma d\sigma_U\right) = \exp\left(-2\pi i \int_\Sigma \Omega^\nabla\right).$$

in cui l'orientamento di Σ è scelto compatibile con quello di γ .

Si può quindi capire l'origine geometrica della condizione di integrabilità. Supponiamo che S sia una superficie chiusa, diffeomorfa ad una sfera, contenuta in M . Ogni curva differenziabile chiusa $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ senza autointersezioni divide S nell'unione di due superfici Σ, Σ' , entrambe contraibili. Abbiamo allora due espressioni diverse per z_γ :

$$z_\gamma = \exp\left(-2\pi i \int_\Sigma \Omega^\nabla\right),$$

$$z_\gamma = \exp\left(-2\pi i \int_{\Sigma'} \Omega^\nabla\right).$$

Di conseguenza

$$1 = \exp\left(-2\pi i \int_\Sigma \Omega^\nabla\right) / \exp\left(-2\pi i \int_{\Sigma'} \Omega^\nabla\right)$$

che, tenendo conto dei diversi orientamenti di Σ e Σ' , si riscrive:

$$\exp\left(-2\pi i \left(\int_\Sigma \Omega^\nabla - \int_{\Sigma'} \Omega^\nabla\right)\right) = \exp\left(-2\pi i \int_S \Omega^\nabla\right) = 1,$$

per cui l'integrale della forma di curvatura sopra S deve essere un intero.

La quantizzazione geometrica comincia perlappunto con il risultato opposto, contenuto del *teorema di Weil*. Questo afferma che la condizione di integrabilità è di fatto necessaria e sufficiente per cui, data una 2-forma su una varietà, questa possa rappresentare la forma di curvatura di un FLHC costruito sulla varietà. Noi dimostreremo solamente la sufficienza che infatti determina quali sistemi classici ammettano o meno il fibrato della prequantizzazione, e quindi siano quantizzabili.

Teorema.

Sia Ω una 2-forma (reale) chiusa su una varietà liscia M . Se Ω soddisfa la condizione di integralità allora esiste un FLHC (E, π, M, ∇) tale che Ω sia la sua forma di curvatura.

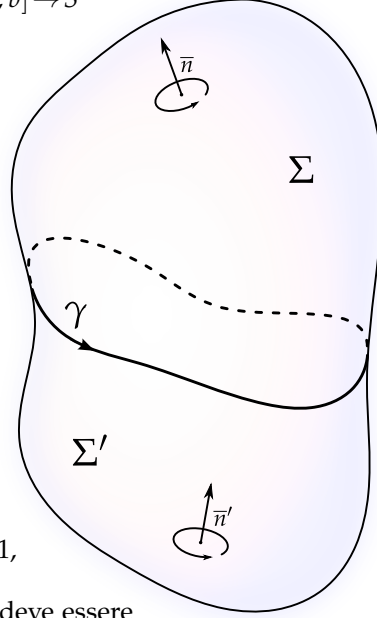
Dimostrazione. Data una tale Ω si ha, usando un pò di coomologia, che la condizione di integrabilità è equivalente all'esistenza di un ricoprimento contraibile $\{U_\alpha\}$ di M , una collezione di 1-forme reali $\{\sigma_\alpha\}$ e una di funzioni $\{f_{\alpha\beta}\}$ tali che:

$$\Omega|_{U_\alpha} = d\sigma_\alpha, \quad (\sigma_\beta - \sigma_\alpha)|_{U_{\alpha\beta}} = df_{\alpha\beta}, \quad (f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} - f_{\alpha\gamma})|_{U_{\alpha\beta\gamma}} \in \mathbb{Z}.$$

Quindi, se Ω soddisfa la condizione di integrabilità, possiamo costruire il nostro fibrato lineare complesso ponendo $c_{\alpha\beta} = \exp(2\pi i f_{\alpha\beta})$ e, dato che $c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} = c_{\alpha\gamma}$, usando queste ultime come funzioni di transizione. A questo scopo poniamo $E = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times \mathbb{C}$ e lo fattorizziamo tramite la relazione:

$$(x_1, z_1) \sim (x_2, z_2), \quad \text{ove } x_i \in U_{\alpha_i}, \text{ quando } x_1 = x_2 \text{ e } z_1 = c_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1) z_2.$$

Ora che abbiamo il fibrato, la connessione ∇ cercata è direttamente determinata usando le σ_α come forme di connessione locali e, ovviamente,



$\text{curv}(E, \nabla) = \Omega$. Inoltre, siccome le forme di connessione sono reali e le funzioni di transizione hanno modulo 1, esiste anche una metrica hermitiana su (E, π, M, ∇) . Basta infatti porre, per ogni $x \in M$, $h_x(l, l') = z \bar{z}'$ dove $l = (x, z)$ e $l' = (x, z')$ in un qualsiasi U_α contenente x . Mostriamo per ultimo che questa è compatibile con la connessione costruita. Si consideri allora un campo vettoriale reale ξ su M insieme a due sezioni del fibrato s e s' . Chiamando s_α le sezioni unitarie definite su U_α (i.e. se $x \in U_\alpha$ allora $s_\alpha(x) = (x, 1)$), si ha che $s|_{U_\alpha} = f_\alpha s_\alpha$ e $s'|_{U_\alpha} = f'_\alpha s_\alpha$. Allora, per $x \in U_\alpha$:

$$\begin{aligned} \xi(h(s, s'))(x) &= \xi(h(f_\alpha s_\alpha, f'_\alpha s_\alpha))|_{U_\alpha}(x) \\ &= \xi(f_\alpha \bar{f}'_\alpha)|_{U_\alpha}(x) = \xi(f_\alpha)(x) \bar{f}'_\alpha(x) + f_\alpha(x) \xi(\bar{f}'_\alpha)(x); \end{aligned}$$

e, d'altra parte:

$$\begin{aligned} h(\nabla_\xi s, s')|_{U_\alpha}(x) &= h((\xi(f_\alpha) + 2\pi i \iota_\xi \sigma_\alpha f_\alpha) s_\alpha, f'_\alpha s_\alpha)|_{U_\alpha}(x) \\ &= \xi(f_\alpha)(x) \bar{f}'_\alpha(x) + 2\pi i \iota_\xi \sigma_\alpha f_\alpha(x) \bar{f}'_\alpha(x), \\ h(s, \nabla_\xi s')|_{U_\alpha}(x) &= h(f_\alpha s_\alpha, (\xi(f'_\alpha) + 2\pi i \iota_\xi \sigma_\alpha f'_\alpha) s_\alpha)|_{U_\alpha}(x) \\ &= f_\alpha(x) \xi(\bar{f}'_\alpha)(x) - f_\alpha(x) 2\pi i \iota_\xi \sigma_\alpha \bar{f}'_\alpha(x). \end{aligned}$$

Questo dimostra la compatibilità tra metrica e connessione e completa la dimostrazione del teorema, dato che il fibrato costruito è di fatto un FLHC. \square

Nella costruzione del fibrato eseguita sopra, abbiamo visto come le funzioni di transizione determinino di fatto la struttura del fibrato. Andiamo allora ad esaminare quanti possibili fibrati "diversi" tra loro possono essere costruiti con una prefissata curvatura.

In primo luogo notiamo che sull'insieme dei fibrati lineari sopra una data varietà si possono definire delle operazioni che, dati uno o più fibrati, ne determinano altri. Allo scopo siano E, E' due fibrati lineari con funzioni di transizione $c_{\alpha\beta}$ e $c'_{\alpha\beta}$ (relativamente ad uno stesso ricoprimento della varietà base). Allora:

$$\begin{aligned} \bar{E} &\text{ è il fibrato con funzioni di transizione } \bar{c}_{\alpha\beta}; \\ E^{-1} &\text{ è il fibrato con funzioni di transizione } (c_{\alpha\beta})^{-1}; \\ E \otimes E' &\text{ è il fibrato con funzioni di transizione } c_{\alpha\beta} c'_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Considereremo equivalenti due fibrati per i quali esiste una collezione di funzioni $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$ tali che:

$$c'_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} c_{\alpha\beta} \quad \text{quando} \quad U_{\alpha\beta} \neq \emptyset.$$

In questo caso infatti esiste un isomorfismo di fibrati vettoriali $F: E \rightarrow E'$ dato, in ogni U_α , da $(x, z s_\alpha(x)) \rightarrow (x, z f_\alpha s'_\alpha(x))$.

Tornando alla costruzione del fibrato fatto nella dimostrazione, avevamo qualche libertà nella costruzione di E e ∇ a partire da Ω . Infatti se si somma qualche costante reale $y_{\alpha\beta}$ alle funzioni $f_{\alpha\beta}$, tali che:

$$y_{\alpha\beta} = -y_{\beta\alpha} \quad \text{e} \quad y_{\alpha\beta} + y_{\beta\gamma} + y_{\gamma\alpha} \in \mathbb{Z},$$

si ottiene un fibrato $E \otimes L$, ove L è il fibrato definito dalle $t_{\alpha\beta} = \exp(2\pi i y_{\alpha\beta}) \in \mathbb{S}^1$. Dato che tali funzioni hanno modulo costante, L ammette una connessione

piatta, cioè con curvatura nulla. Di conseguenza su $E \otimes L$ esiste una connessione con la stessa curvatura di ∇ . Viceversa se due FLHC (E, π, M, ∇) e (E', π, M, ∇') hanno entrambi curvatura Ω , allora $E^{-1} \otimes E'$ è un FLHC con curvatura nulla. Visto che $\check{H}^1(M, \mathbb{S}^1)$ parametrizza i FLHC di curvatura nulla, si può allora affermare che lo stesso parametrizza anche le varie scelte inequivalenti di E e ∇ .

Se si vuole andare ancora più affondo, fissando la classe di equivalenza del fibrato vediamo quali connessioni inequivalenti si possono costruire (consideriamo equivalenti due connessioni che sono una il pullback dell'altra tramite un isomorfismo del fibrato). Perchè il fibrato individuato dalle costanti $y_{\alpha\beta}$ sia equivalente a quello di partenza è necessario che $y_{\alpha\beta} + y_{\beta\gamma} - y_{\alpha\gamma} = 0$. Questo, pur non cambiando il fibrato, ha comunque effetto sulla connessione e, di fatto, è come se si sommassero alle forme di connessione locali i corrispondenti rappresentanti locali di una forma chiusa definita sulla varietà base del fibrato. La connessione ottenuta rimane comunque compatibile con la struttura hermitiana del fibrato in quanto, se σ e α sono le rappresentanti locali della connessione e della forma chiusa rispettivamente in un aperto contraibile U , si ha, in U :

$$\begin{aligned} h((\xi(f_1) - i_{\xi}(\sigma + \alpha)f_1)s, f_2s) + h(f_1s, (\xi(f_2) - i_{\xi}(\sigma + \alpha)f_2)s) = \\ = \bar{f}_2(\xi(f_1) - i(\sigma + \alpha)(\xi)f_1) h(s, s) + f_1(\xi(\bar{f}_2) + i(\bar{\sigma} + \bar{\alpha})(\xi)\bar{f}_2) h(s, s) \\ = \bar{f}_2(\xi(f_1) - i\sigma(\xi)f_1) h(s, s) + f_1(\xi(\bar{f}_2) + i\bar{\sigma}(\xi)\bar{f}_2) h(s, s) + \\ + i f_1 \bar{f}_2 \alpha(\xi) h(s, s) - i f_1 \bar{f}_2 \alpha(\xi) h(s, s) \\ = h((\xi(f_1) - i_{\xi}\sigma f_1)s, f_2s) + h(f_1s, (\xi(f_2) - i_{\xi}\sigma f_2)s). \end{aligned}$$

Quindi, dato un FLHC, se sommiamo una 1-forma α chiusa alle forme di connessione locali, otteniamo un diverso FLHC inequivalente al primo, a meno che la classe di coomologia di α stia in $\check{H}^1(M, \mathbb{Z})$. Abbiamo allora mostrato che, fissato il fibrato, le connessioni con data curvatura inequivalenti tra loro sono parametrizzate da $\check{H}^1(M, \mathbb{R}) / \check{H}^1(M, \mathbb{Z})$.

È da notare che le considerazioni appena fatte, ci dicono che, nel caso in cui la varietà base sia semplicemente connessa (ciò implica che il gruppo di coomologia $\check{H}^1(M, \mathbb{S}^1)$ si riduce ad un punto), esiste un unico, a meno di isomorfismi, FLHC con una prefissata curvatura.

2.3 Prequantizzazione di un sistema fisico

Nella sezione precedente abbiamo visto che, data una varietà simplettica (M, ω) , questa ammette un FLHC con curvatura $-h^{-1}\omega$, se e solo se quest'ultima soddisfa la condizione di integrabilità (h è la costante di Plank). In questo caso diremo che (M, ω) è *prequantizzabile*. Mostreremo allora che, su una varietà simplettica M che soddisfa la condizione di Weil, possiamo costruire in modo naturale uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathcal{C}^\infty(M)$ come operatori autoaggiunti su \mathcal{H} .

Cominciamo con la costruzione dello spazio di Hilbert. Sia (M, ω) una varietà prequantizzabile e (E, π, M, ∇) un FLHC con curvatura $-h^{-1}\omega$. L'insieme $\Gamma(E)$ delle sezioni del fibrato è naturalmente dotato della struttura di \mathbb{C} -spazio vettoriale. Inoltre su M la forma simplettica induce una forma volume $(h^n n!)^{-1}\omega^n$. Ciò ci permette di definire un prodotto scalare su $\Gamma(E)$, precisamente se $s, t \in \Gamma(E)$, allora:

$$\langle s, t \rangle = \int_M h(s, t) \frac{\omega^n}{h^n n!} \in \mathbb{C}.$$

Il sottospazio di $\Gamma(E)$ per cui $\langle s, s \rangle$ è finito forma uno spazio prehilbertiano da cui, prendendo il suo completamento, otteniamo lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}(\Gamma(E))$ oggetto della prequantizzazione (denoteremo con $|\cdot\rangle$ i suoi elementi e con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ il prodotto scalare su di esso).

Passiamo ora alla costruzione degli operatori quantistici su $\mathcal{H}(\Gamma(E))$. Il primo passo è quello di sostituire l'algebra delle osservabili classiche $\mathcal{C}^\infty(M)$ con l'insieme isomorfo $\mathfrak{X}(E, \nabla)$ dei campi vettoriali reali χ su E^\times con le seguenti proprietà: sono invarianti sotto l'azione di \mathbb{C}^\times , quindi preservano il fibrato; $\mathfrak{L}_\chi \sigma = 0$, cioè preservano la forma di connessione σ ; $\chi(h_{\pi^{-1}(l)}(l, l)) = 0$, preservano allora anche la struttura hermitiana del fibrato. Non è difficile provare che $(\mathfrak{X}(E, \nabla), [\cdot, \cdot])$ è anch'essa un'algebra di Lie. L'isomorfismo tra $\mathcal{C}^\infty(M)$ e $\mathfrak{X}(E, \nabla)$ è costruito mappando ogni osservabile classica f sull'unico campo vettoriale reale χ_f su E^\times tale che:

$$\pi_*(\chi_f) = \xi_f \quad \iota_{\chi_f} \sigma = -h^{-1} f \circ \pi.$$

Infatti χ_f è in $\mathfrak{X}(E, \nabla)$ per costruzione: per prima cosa è \mathbb{C}^\times -invariante poichè σ stessa è \mathbb{C}^\times -invariante. Inoltre conserva σ e la struttura metrica:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\chi_f} \sigma &= d\iota_{\chi_f} \sigma + \iota_{\chi_f} d\sigma = d(-h^{-1} f \circ \pi) + \iota_{\chi_f} (-h^{-1} \pi^* \omega) = -h^{-1} \pi^* (df + \iota_{\xi_f} \omega) = 0, \\ \chi_f(h_{\pi^{-1}(l)}(l, l)) &= 2\pi i h_{\pi^{-1}(l)}(l, l) \iota_{\chi_f} (\sigma - \bar{\sigma}) = 0. \end{aligned}$$

Mostriamo ora che la mappa $f \mapsto \chi_f$ è un isomorfismo di algebre di Lie. Verifichiamo che preserva le parentesi cioè che $\{f, g\}$ viene mandato in $[\chi_f, \chi_g]$. Infatti:

$$\begin{aligned} \pi_*([\chi_f, \chi_g]) &= [\xi_f, \xi_g] = \xi_{\{f, g\}}, \\ \iota_{[\chi_f, \chi_g]} \sigma &= \chi_f(\iota_{\chi_g} \sigma) - \chi_g(\iota_{\chi_f} \sigma) = \chi_f(-h^{-1} g \circ \pi) - \chi_g(-h^{-1} f \circ \pi) = -h^{-1} \{f, g\} \circ \pi. \end{aligned}$$

Per ultimo rimane da provare l'iniettività e la suriettività. Il fatto che sia iniettiva è automatico: se $f(x) \neq g(x)$ allora $\iota_{\chi_f} \sigma = -h^{-1} f \circ \pi \neq -h^{-1} g \circ \pi = \iota_{\chi_g} \sigma$ sulla fibra E_x e, di conseguenza, $\chi_f \neq \chi_g$. Passiamo ora alla suriettività. Sia allora χ un elemento di $\mathfrak{X}(E, \nabla)$, dal fatto che sia σ che χ sono \mathbb{C}^\times -invarianti e che $\chi(h_{\pi^{-1}(l)}(l, l)) = 0 = \iota_\chi(\sigma - \bar{\sigma})$ si può affermare che $\iota_\chi \sigma = -h^{-1} f \circ \pi$ per qualche funzione reale $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Invece da $\mathfrak{L}_\chi \sigma = 0$ si ottiene $df + \iota_{\pi_* \chi} \omega = 0$ e, di conseguenza, si ha $\pi_* \chi = \xi_f$ e quindi $\chi = \chi_f$. Abbiamo allora provato che la mappa costruita sopra $f \mapsto \chi_f$ è un isomorfismo di algebre di Lie. Possiamo riassumere la situazione mediante il diagramma commutativo di algebre di Lie a lato.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathfrak{X}(E, \nabla) & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{X}_\mathfrak{h}(M) \longrightarrow 0 \\ & \searrow & \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \\ & & & & \end{array}$$

Completiamo ora la costruzione degli operatori quantistici sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}(\Gamma(E))$. Scelta quindi un'osservabile $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, siccome χ_f è \mathbb{C}^\times -invariante, presa qualsiasi sezione s , si ha che $\chi_f \lambda_s \in \mathcal{C}^\infty(E^\times)$ soddisfa la condizione di omogeneità, e quindi definisce un'altra sezione. Ponendo allora $\widehat{f}s := -i\hbar \chi_f \lambda_s$, dove $\hbar = h/2\pi$ è la *costante di Plank ridotta*, abbiamo definito l'operatore quantistico $\widehat{f}: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ corrispondente ad f .

Dal fatto che la mappa $f \mapsto \chi_f$ è un isomorfismo di algebre di Lie, si ottiene immediatamente che la corrispondenza $f \mapsto \widehat{f}$ soddisfa le condizioni di quantizzazione $\mathcal{Q}1$ e $\mathcal{Q}4$. Tuttavia nella forma in cui è definito non è molto utile nei calcoli espliciti. È più conveniente osservare come χ_f opera su una data sezione s del fibrato. La condizione $\iota_{\chi_f} \sigma = -h^{-1} f \circ \pi$, determina la componente verticale di χ_f :

$$\text{ver } \chi_f = -v_{h^{-1}f} \quad \text{dove } v_c(l) \text{ è il vettore tangente in } l \text{ a } t \mapsto e^{2\pi i c t} l.$$

Per la sua parte orizzontale invece:

$$\mathfrak{L}_{\chi_f} \sigma = \mathfrak{L}_{\text{hor } \chi_f} \sigma + \mathfrak{L}_{\text{ver } \chi_f} \sigma = 0 \Rightarrow \iota_{\text{hor } \chi_f} \pi^* \omega = -d(f \circ \pi) \Rightarrow \iota_{\pi_* \text{hor } \chi_f} \omega = -df;$$

da cui si deduce che $\text{hor } \chi_f = \xi_f^\ell$, ed è quindi il rialzamento orizzontale del campo hamiltoniano ξ_f . Considerando che:

$$v_{h^{-1}f} \lambda_s = -2\pi i (h^{-1} f \circ \pi) \lambda_s = -i\hbar^{-1} (f \circ \pi) \lambda_s, \quad (\xi_f^\ell \lambda_s)(l) = \nabla_{\xi_f} s(\pi(l));$$

otteniamo che $v_{h^{-1}f} \lambda_s$ individua la sezione $-i\hbar^{-1} f s$, mentre $\xi_f^\ell \lambda_s$ semplicemente $\nabla_{\xi_f} s$. Si ha quindi:

$$\widehat{f}s = -i\hbar \chi_f \lambda_s = -i\hbar (\xi_f^\ell \lambda_s - v_{h^{-1}f} \lambda_s) = -i\hbar \nabla_{\xi_f} s + f s.$$

Siamo ora in grado di vedere che la rappresentazione di $\mathcal{C}^\infty(M)$ che abbiamo costruito soddisfa anche le condizioni $\mathcal{Q}2$ e $\mathcal{Q}3$. Se f è una funzione costante con valore α , essendo $\xi_f \equiv 0$, si ha $\widehat{f}s = 0 + f s = \alpha \widehat{1} s$, cioè $\mathcal{Q}2$ è soddisfatta. Per quanto riguarda $\mathcal{Q}3$ invece:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}s | t \rangle &= \int_M h(\widehat{f}s, t) \frac{\omega^n}{h^n n!} = \int_M h((-i\hbar \nabla_{\xi_f} + f)s, t) \frac{\omega^n}{h^n n!} \\ &= \int_M -i\hbar (\xi_f(h(s, t)) - h(s, \nabla_{\xi_f} t)) + h(f s, t) \frac{\omega^n}{h^n n!} \\ &= \int_M -i\hbar \xi_f(h(s, t)) + h(s, -i\hbar \nabla_{\xi_f} t) + h(f s, t) \frac{\omega^n}{h^n n!} \\ &= \int_M -i\hbar \xi_f(h(s, t)) + h(s, (-i\hbar \nabla_{\xi_f} + f)t) \frac{\omega^n}{h^n n!} = \langle s | \widehat{f}t \rangle + \int_M -i\hbar \xi_f(h(s, t)) \frac{\omega^n}{h^n n!} \end{aligned}$$

Siccome la funzione $h(s, t)$ ha supporto compatto possiamo affermare che l'ultimo integrale vale 0 e, di conseguenza, vale $\mathcal{Q}3$.

Quindi, partendo dalla descrizione classica del sistema, abbiamo definito lo spazio di Hilbert \mathcal{H} i cui raggi sono gli stati quantistici e, inoltre, abbiamo costruito una mappa $\widehat{\cdot}: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow A(\mathcal{H})$ soddisfacente le condizioni di quantizzazione $\mathcal{Q}1$ - $\mathcal{Q}4$. Tuttavia la procedura, così com'è a questo punto, risulta incompleta, in quanto presenta problemi sull'irriducibilità di \mathcal{H} .

Vediamo allora, come primo esempio, quali operatori corrispondono a posizione x^i e momento p_i nel caso in cui lo spazio delle fasi è un fibrato cotangente $M = T^*X$, con forma simplettica $\omega = dp_i \wedge dx^i$. In questo caso si ha che il fibrato della prequantizzazione è il fibrato triviale $M \times \mathbb{C}$ e di conseguenza ad un osservabile $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ è associato l'operatore:

$$\hat{f} = -i\hbar \nabla_{\xi_f} s + fs = -i\hbar \xi_f - \iota_{\xi_f}(p_i dx^i) + f.$$

Allora, considerando che $\xi_{x^i} = -\frac{\partial}{\partial p_i}$ e $\xi_{p_i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$, abbiamo i corrispondenti operatori quantistici di posizione e momento dati da:

$$\hat{x}^i = x^i + i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \quad \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Non è difficile convincersi però che tale rappresentazione non è irriducibile su $M \times \mathbb{C}$. Infatti il sottospazio chiuso $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(X)$ di $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(M)$ (in questo caso $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(M)$ è equivalente all'insieme delle sezioni del fibrato triviale) fatto delle funzioni costanti nelle fibre di M , cioè funzioni delle sole x^i , si ha ($f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(X)$):

$$\hat{x}^i f = x^i f + i\hbar \frac{\partial f}{\partial p_i} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(X), \quad \hat{p}_i f = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x^i} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(X).$$

Di conseguenza anche lo spazio di Hilbert associato $\mathcal{H}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(M))$ avrà un sottospazio chiuso proprio invariante rispetto all'azione di x^i e p_i . (In realtà $\mathcal{H}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(X))$ è di fatto lo spazio di Hilbert giusto, ottenuto "polarizzando" $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(M)$ tramite la *polarizzazione verticale*.)

Un qualsiasi cambio di coordinate su M , come dal punto di vista hamiltoniano porta a una nuova espressione per la forma simplettica, i campi vettoriali hamiltoniani, ecc., induce anche un cambio nella rappresentazione degli operatori. Tale procedimento può risultare conveniente, come nel caso della rappresentazione alla *Bargman-Fock*. Consideriamo a tale scopo su M le coordinate $\{z_i, \bar{z}_i\}$ definite dalla trasformazione $z_i = p_i + ix^i$. Otteniamo allora:

$$\omega = \frac{1}{2i} dz_i \wedge d\bar{z}_i \quad \xi_f = -2i \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right),$$

e, per quanto riguarda la prequantizzazione, l'operatore diventa questa volta:

$$\hat{f} = -i\hbar \xi_f + 2i \iota_{\xi_f}(z_i d\bar{z}_i) + f.$$

Tale rappresentazione è utile nel caso dell'oscillatore armonico n -dimensionale. L'hamiltoniana che in coordinate canoniche è $H(p, q) = \sum_i \frac{1}{2} (p_i^2 + x_i^2)$, diventa nelle nuove coordinate $H(z, \bar{z}) = \sum_i \frac{1}{2} z_i \bar{z}_i$, a cui corrisponde l'operatore:

$$\hat{H} = -i \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - \bar{z}_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right).$$

Tuttavia \hat{H} ha, considerando la sua azione su $\mathcal{H}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\infty(\mathbb{C}^n))$, risulta avere, come nel caso classico, spettro continuo. Questo chiaramente è in contrasto con l'oscillatore armonico quantizzato della meccanica quantistica e ciò mostra

un'altra volta che, anche in questo caso la prequantizzazione non basta. Di nuovo serve una polarizzazione, questa volta la polarizzazione olomorfa (in pratica si considerano solamente le funzioni olomorfe di \mathbb{C}^n), e così si ha anche che gli operatori \widehat{z}_i e $\widehat{\bar{z}}_i$ rappresentano gli operatori di creazione e distruzione rispettivamente. Tuttavia per ottenere lo spettro esatto questo non è ancora sufficiente e bisogna effettuare la cosiddetta correzione metaplettica, che in questo caso porta all'utilizzo dell'operatore $\widehat{H} = \frac{1}{4}(\widehat{z}_i\widehat{\bar{z}}_i + \widehat{\bar{z}}_i\widehat{z}_i)$.

Bibliografia:

- Woodhouse N.M.J.; *Geometric Quantization*, Clarendon Press, Second Edition, 1991.
- Śniatycki J.; *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, 1980.
- Kirillov A.A.; *Geometric Quantization* in *Dynamical Systems IV: Symplectic Geometry and its Applications*, pp. 137-172, Springer-Verlag, 1990.
- Abraham R., Marsden J.E.; *Foundations of Mechanics*, The Addison-Wesley Publishing Company, Second Edition, 1978.
- Wells R.O. Jr; *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer, Third Edition, 2008.
- Echeverría A. et al; *Mathematical Foundations of Geometric Quantization*, arXiv:math-ph/9904008, 1999.