

Università degli Studi di Padova
Corso di Laurea in Fisica

Meccanica dei Sistemi Anolonomi

Tesi di Laurea triennale

Laureando: Luca Tubiana

Relatore: Prof. Francesco Fassò

Anno Accademico 2004-2005

Introduzione La comprensione dei sistemi anolonomi è oggi ancora ad uno stadio molto preliminare. Non esiste una teoria generale, paragonabile alla formulazione lagrangiana o hamiltoniana della meccanica dei sistemi olonomi, né una comprensione soddisfacente di questioni fondamentali quali il legame tra simmetrie e leggi di conservazione.

Nei libri di testo la trattazione della meccanica dei sistemi anolonomi spesso si riduce allo studio di sistemi particolari, sviluppato con tecniche ad hoc. In questa situazione lo studio dei sistemi meccanici anolonomi è inevitabilmente assente dai corsi istituzionali.

Lo scopo di questa tesi è quello di esporre le basi della trattazione dei sistemi anolonomi, a partire dalle nozioni geometriche necessarie a dare una definizione matematica della nozione di vincolo anolonomo, distribuzioni e teorema di Frobenius, e proseguendo poi con la derivazione delle equazioni del moto per un sistema meccanico anolonomo. Infine viene dato un primo sguardo al problema delle relazioni tra simmetrie e leggi di conservazione in meccanica anolonomica e viene presentata una semplice estensione anolonomica del teorema di Nöther. Alla fine di ogni sezione sono riportati degli esempi esplicativi. Una dimostrazione del basilare teorema di Frobenius viene fornita nell'appendice.

Nota: La trattazione presuppone i fondamenti della meccanica lagrangiana e della geometria differenziale, in particolare delle derivate di Lie di campi vettoriali e delle varietà fibrato tangente. Per la parte meccanica si possono consultare per esempio i testi [1],[2]. Per la parte geometrica fare riferimento a: [4],[5].

Indice

1	Basi geometriche e definizione	5
1.1	Distribuzioni e teorema di Frobenius	5
1.2	Vincoli Anolonomi	6
1.3	Esempi	7
2	Equazioni del moto con i moltiplicatori di Lagrange	13
2.1	Equazioni del moto in coordinate globali	14
2.2	Equazioni del moto in coordinate locali	17
2.3	Esempio: moto di puro rotolamento	19
3	Coordinate ignorabili e teorema di Nöther	22
3.1	Simmetrie nei sistemi Lagrangiani anolonomi	22
3.2	Esempio: simmetrie per una sfera nel caso olonomo e nel moto di puro rotolamento	24
A	Teorema di Frobenius.	25

1 Basi geometriche e definizione

Introduciamo in questa sezione le definizioni ed i teoremi di geometria essenziali per dare la definizione di vincolo anolonomo e per poter poi trattare i sistemi meccanici anolonomi.

1.1 Distribuzioni e teorema di Frobenius

Distribuzioni Iniziamo subito con il definire l'ente geometrico su cui si baserà la nostra descrizione dei vincoli anolonomi:

definizione: Una distribuzione regolare E su una varietà differenziale Q è un sottofibrato E di TQ , cioè una sottovarietà differenziale E di TQ tale che per ogni punto $x \in Q$ l'insieme $E_x := E \cap T_x Q$ è un sottospazio vettoriale dello spazio tangente $T_x Q$.

osservazione In base a questa definizione la dimensione k dei sottospazi vettoriali E_x è indipendente dal punto x , in quanto E è una sottovarietà di TQ ed ha quindi dimensione definita e costante. I sottospazi E_x si chiamano *fibre della distribuzione* e la loro dimensione si chiama *rango della distribuzione*. Una distribuzione di rango k può essere assegnata, almeno localmente, nei seguenti modi:

- tramite k campi vettoriali $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k$ definiti su un aperto U di Q e linearmente indipendenti in ogni punto $x \in U$. Allora $E(x) = \text{Span}\{\mathbf{X}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{X}_k(\mathbf{x})\} \forall x \in U$ e $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k$ si chiamano *generatori di E* .
- tramite $m - k$ 1-forme differenziali definite su un aperto $U \subset Q$ e linearmente indipendenti in ogni punto, dove m è la dimensione della varietà Q . Allora, in ogni punto, E è l'intersezione dei nuclei di queste 1-forme. Questo equivale, in un sistema di coordinate locali (q, \dot{q}) sul fibrato tangente TQ , alla condizione

$$S(q)\dot{q} = 0$$

dove

$$S \in M_{(m-k) \times m} \quad \text{Rank} S = m - k \quad \forall q$$

le fibre di E corrispondono al kernel della matrice S .

Integrabilità e involutività Data una distribuzione è legittimo chiedersi se essa sia, almeno localmente, il fibrato tangente di una sottovarietà N di M . Diamo quindi la seguente definizione:

definizione Sia E distribuzione sulla varietà differenziale Q . Diciamo che E è integrabile se per ogni punto $x_0 \in Q$ esiste una sottovarietà (locale) $N \subset Q$ contenente x_0 , detta varietà integrale di E in x_0 , i cui spazi tangenti coincidono con le fibre di E . Vale cioè:

$$i_* T_{x_0} N = E_{x_0} \quad \forall x_0 \in N \quad \text{con } i \text{ mappa di inclusione di } N \text{ in } Q$$

Ci servono ora delle condizioni che permettano di stabilire l'integrabilità o meno di una k -distribuzione; tali condizioni sono fornite dal teorema di Frobenius, per enunciare il quale serve un' altra definizione:

definizione Diciamo che una k -distribuzione E è involutiva se data un coppia qualsiasi di campi vettoriali X, Y a valori in E anche il loro commutatore $[X, Y]$ ha valori in E . Cioè se, detto D_E l'insieme dei campi vettoriali a valori in E , si ha:

$$X, Y \in D_E \Rightarrow [X, Y] \in D_E.$$

Detto questo possiamo enunciare il seguente, fondamentale:

Teorema di Frobenius Una distribuzione è integrabile se e solo se è involutiva.

dimostrazione il lettore interessato può consultare l'appendice.

Abbiamo dunque un sistema per provare l'integrabilità di una distribuzione E . Si noti infatti che dal teorema di Frobenius discende subito che per provare l'involutività di una distribuzione basta verificare che questa valga per un insieme di generatori di E .

Osservazione una distribuzione di rango 1 è sempre integrabile.

In questo caso infatti la distribuzione può essere assegnata tramite un unico campo vettoriale \mathbf{X} ; il teorema di esistenza ed unicità assicura allora che per ogni x_0 esiste una curva integrale di \mathbf{X} . E tale curva integrale è la varietà integrale di E in x_0 .

1.2 Vincoli Anolonomi

Prima di affrontare la descrizione geometrica di un vincolo anolonomo diamo alcune definizioni essenziali per i nostri scopi, che dovrebbero comunque essere già note a chiunque abbia seguito un corso di meccanica Lagrangiana. Consideriamo un sistema meccanico composto da N punti materiali P_1, \dots, P_N . Siano $x_i \in \mathbb{R}^3$, $\dot{x}_i \in \mathbb{R}^3$ la posizione e la velocità del punto P_i nel sistema di riferimento in cui descriviamo il sistema. Ricordiamo che si chiama:

configurazione del sistema meccanico il vettore

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

e velocità del sistema il vettore

$$\dot{\mathbf{X}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}.$$

L'atto di moto del sistema è il vettore

$$(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \in \mathbb{R}^{6N}.$$

SI chiama spazio delle configurazioni lo spazio \mathbb{R}^{3N} in cui vivono le configurazioni del sistema e spazio degli atti di moto lo spazio \mathbb{R}^{6N} in cui vivono gli atti di moto.

Un vincolo olonomo è una restrizione delle possibili configurazioni del sistema ad una sottovarietà Q dello spazio delle configurazioni \mathbb{R}^{3N} . Q è chiamata *varietà delle configurazioni*. Questa restrizione si traduce nell'appartenenza degli atti di moto del sistema ad una sottovarietà dello spazio degli atti di moto, fibrato tangente TQ della varietà delle configurazioni.

Un vincolo anolonomo invece è una restrizione sugli atti di moto che si traduce nell'appartenenza ad una sottovarietà dello spazio degli atti di moto la quale non è un fibrato tangente, bensì una distribuzione (non integrabile, si veda sotto) E . Possiamo quindi dare la seguente definizione precisa di vincolo anolonomo; consideriamo, per maggior generalità il caso di un sistema soggetto anche a vincoli olonomi¹ :

definizione *Consideriamo un sistema olonomo con varietà delle configurazioni Q . Un vincolo anolonomo è una restrizione sugli atti di moto ad appartenere ad una distribuzione E su Q non integrabile*

1.3 Esempi

Facciamo ora alcuni esempi che risulteranno utili a chiarire la natura dei vincoli anolonomi e come questi vadano descritti nel formalismo da noi adottato.

A. Disco su Rotaia Il primo dei nostri esempi, un disco che ruota senza strisciare su una rotaia posta su un piano, mantendendosi perpendicolare a questo, è in realtà un controesempio: gli atti di moto sono infatti ristretti ad appartenere ad una distribuzione integrabile e quindi, come spieghiamo, il sistema si può ancora descrivere come vincolato ad una sottovarietà dello spazio degli atti di moto che è il fibrato tangente di una sottovarietà dello spazio delle configurazioni, e dunque è olonomo². Consideriamo innanzitutto il sistema olonomo costituito dal disco vincolato ad avere un punto di contatto con l'asse \hat{e}_x di un sistema di riferimento ortogonale $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ e ad appartenere al piano $\hat{e}_x\hat{e}_z$. Le configurazioni di questo sistema sono determinate dalla coordinata x del centro di massa del disco e da un angolo ϑ che determina l'orientazione del disco rispetto ad un asse di riferimento, per esempio l'angolo tra l'asse \hat{e}_x ed un determinato diametro del disco, preso in senso antiorario (fig. 1). La varietà delle configurazioni Q è quindi localmente diffeomorfa al cilindro: $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \ni (x, \vartheta)$. Introduciamo ora il vincolo di "puro rotolamento": il punto di contatto P del disco con la rotaia ha velocità nulla. Se \mathbf{v}_O è la velocità del centro di massa O del disco e $\boldsymbol{\Omega}$ è il vettore velocità angolare del disco, in base alla formula fondamentale dei moti rigidi la condizione di puro rotolamento è:

$$\mathbf{v}_O = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{O} - \mathbf{P})$$

in coordinate locali $(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta})$ su TQ questa condizione si scrive:

$$\dot{x} = +R\dot{\vartheta} \tag{1}$$

ove R è il raggio del disco. Si vede subito che questa equazione assegna una varietà di rango 1 su $Q = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, quindi questa distribuzione è integrabile in base all'osservazione riportata in (1. 2).

¹nel caso il sistema non sia soggetto ad alcun vincolo olonomo basta considerare $Q = \mathbb{R}^{3N}$

²in letteratura a volte tali vincoli sono detti *vincoli anolonomi integrabili*

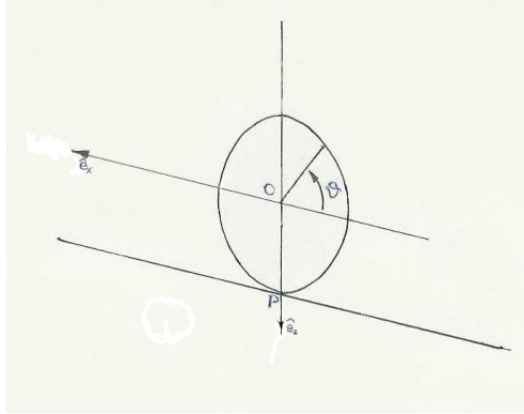


Figura 1: disco su rotaia

Per chiarire questa situazione scriviamo le curve integrali dell'equazione (1), che sono:

$$x = R\vartheta + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante}$$

Questa è l'equazione di una famiglia di rette N_c che si avvolgono attorno al cilindro Q^3 . Dunque, le fibre della distribuzione vincolare E sono gli spazi tangenti alle sottovarietà N_c di Q . Di queste sottovarietà ne passa una per ogni punto di Q ed il moto del sistema avviene su una sola di esse $N_{\bar{c}}$ (con \bar{c} individuata da una qualunque configurazione, per esempio quella iniziale). Il sistema è dunque un sistema olonomo con varietà delle configurazioni $N_{\bar{c}}$ (fig. 2).

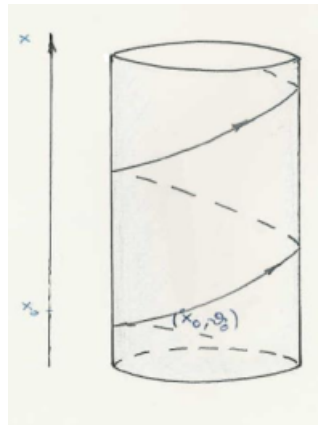


Figura 2: varietà delle configurazioni

³Questo è impreciso: l'angolo ϑ nella nostra parametrizzazione può avere solo valori in $[0, 2\pi[$ e quindi l'equazione trovata parametrizza solo un segmento di retta. Per parametrizzarla tutta dovremmo introdurre una variabile $s \in \mathbb{R}$ e scrivere:

$$\vartheta = \frac{s}{R} + cost \pmod{2\pi}.$$

B. Pattino di Chaplygin Il pattino di Chaplygin, o pattino che non derapa, è un modello di pattino da ghiaccio. Matematicamente descriviamo il pattino come una sbarretta rigida PQ libera di muoversi su un piano, sia $z = 0$. Per prima cosa descriviamo la varietà delle configurazioni imposta dal vincolo olonomo di appartenenza al piano $z = 0$. In base a questo vincolo il nostro sistema è descrivibile tramite le due coordinate x, y del centro di massa della sbarretta ed un'angolo φ che esprime la rotazione della sbarretta rispetto ad un'asse di riferimento, che scegliamo essere $x = 0$ (fig. 3). La varietà delle configurazioni Q è dunque $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \ni (x, y, \varphi)$.

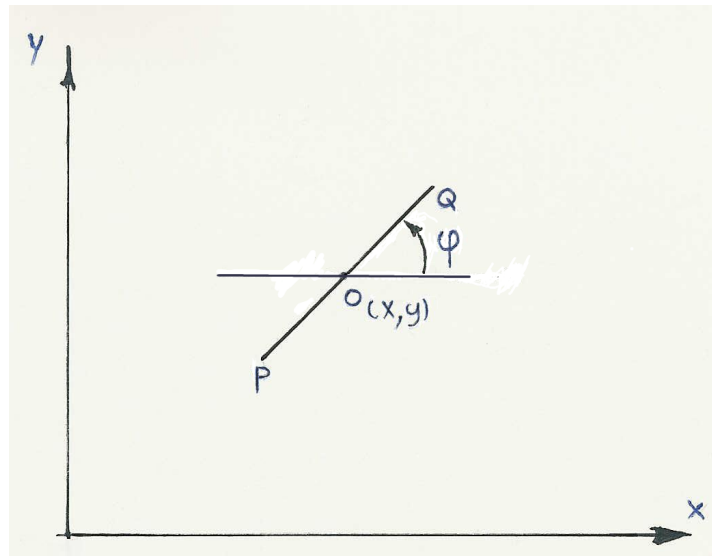


Figura 3: Pattino di Chaplygin

Aggiungiamo ora il vincolo anolonomo di non derapamento a questo sistema: esso si esprime chiedendo che la velocità del centro di massa O della sbarretta sia parallela alla sbarretta stessa

$$\mathbf{v}_O \times \mathbf{PQ} = 0$$

cioè in coordinate su TQ :

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

Questa equazione assegna una distribuzione E di rango 2 sulla varietà $Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Verifichiamo ora se questa distribuzione è integrabile o meno. In base all'equazione precedente le fibre di E si possono scrivere:

$$E_{(x,y,\varphi)} = \left\{ \begin{pmatrix} k \cos \varphi \\ k \sin \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} : k \in \mathbb{R}, \dot{\varphi} \in \mathbb{R} \right\}$$

due generatori di E sono i campi vettoriali \mathbf{X}, \mathbf{Y} dati da:

$$\mathbf{X}(x, y, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}(x, y, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per verificare l'integrabilità di E applichiamo il teorema di Frobenius, verificando l'involuntività di \mathbf{X} e \mathbf{Y} .

Dopo alcuni semplici calcoli si trova:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](x, y, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

e si vede subito che $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](x, y, \varphi) \notin E_{(x,y,\varphi)}$. Dunque la distribuzione E non è involutiva e di conseguenza neppure integrabile. E quindi il vincolo di non derapamento è anolonomo.

C. Sfera che rotola senza strisciare Consideriamo ora un altro caso di vincolo di puro rotolamento, quello di una sfera su un piano, che a prima vista potrebbe sembrare riducibile ad un vincolo olonomo come nel caso del disco su rotaia. Analizzandolo si nota invece che l'introduzione di nuovi gradi di libertà, dati dalla possibilità di movimento su tutto il piano e non più su una retta soltanto, rendono questo sistema anolonomo. Per trattare questo caso introduciamo prima gli *angoli di Eulero* che ci serviranno a trattare questo sistema.

Angoli di Eulero Come noto per descrivere la configurazione di un corpo rigido non vincolato si possono utilizzare le tre coordinate del suo centro di massa e tre angoli che rappresentino l'orientazione degli assi $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ di un sistema di riferimento solidale con il corpo rispetto ad un sistema di riferimento fisso $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$. Scegliamo come origine di entrambi i sistemi uno stesso punto O . Allora il piano mobile $\hat{e}_1\hat{e}_2$ taglia il piano fisso $\hat{e}_x\hat{e}_y$ lungo la retta parallela al vettore $n = \hat{e}_3 \times \hat{e}_z$ detta *linea dei nodi*, perpendicolare sia all'asse \hat{e}_3 sia all'asse \hat{e}_z . Per definire l'orientazione di $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ rispetto al sistema $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ si considerano allora i seguenti angoli:

- $\vartheta \in [0, \pi[$ tra \hat{e}_z e \hat{e}_3
- $\varphi \in [0, 2\pi[$ tra \hat{e}_x e n
- $\psi \in [0, 2\pi[$ tra n e \hat{e}_1 .

Gli angoli sono contati positivamente secondo il verso dato dalla regola della mano destra rispettivamente attorno agli assi n, \hat{e}_z, \hat{e}_3 . Le proiezioni dei versori $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ sulla base fissa si ottengono componendo tre matrici di rotazione: si parte con i due riferimenti perfettamente sovrapposti e si effettua una prima rotazione del riferimento mobile attorno all'asse \hat{e}_z , poi lo si ruota di un angolo ϑ attorno al nuovo asse \hat{e}_1 ottenuto dalla precedente rotazione ed infine di un angolo φ attorno all'asse \hat{e}_3 ottenuto con le due precedenti rotazioni. (fig.4)

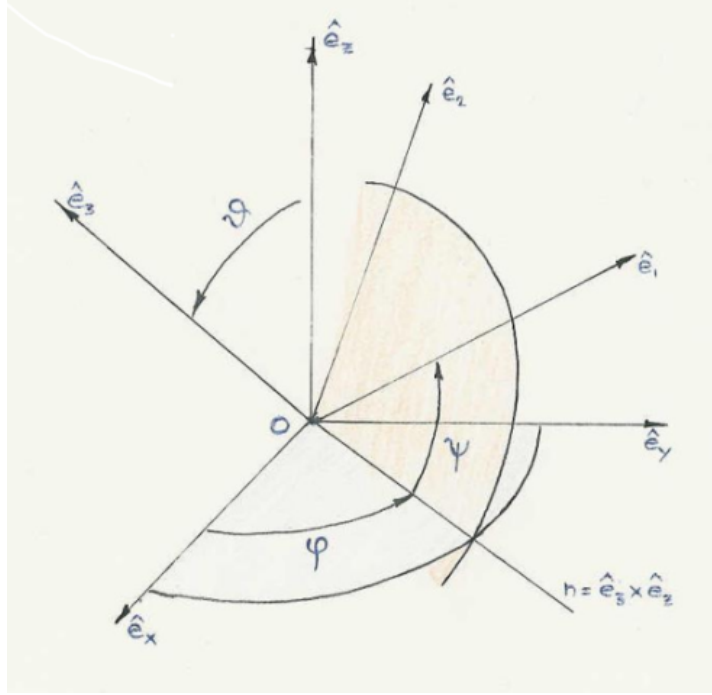


Figura 4: Angoli di Eulero

Otteniamo in questo modo le ben note espressioni [3]:

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_x &= (\cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi) \hat{e}_1 - (\cos \vartheta \cos \psi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \psi) \hat{e}_2 + \sin \vartheta \sin \varphi \hat{e}_3 \\
 \hat{e}_y &= (\cos \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi) \hat{e}_1 + (\cos \vartheta \cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \psi) \hat{e}_2 - \sin \vartheta \cos \varphi \hat{e}_3 \\
 \hat{e}_z &= \sin \vartheta \sin \psi \hat{e}_1 + \cos \psi \sin \vartheta \hat{e}_2 + \cos \vartheta \hat{e}_3
 \end{aligned} \tag{4}$$

Consideriamo ora il sistema olonomo costituito da una sfera di raggio R in contatto con un piano. Scegliamo il riferimento fisso in modo che il baricentro della sfera appartenga al piano $z = 0$ ed il punto di contatto P al piano $z = R$. Introduciamo prima il vincolo olonomo: la sfera si muove sul piano $z = R$, quindi abbiamo $O \in z = 0$ (fig. 5).

La varietà delle configurazioni Q è diffeomorfa a $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{SO}(3)$. Introduciamo su questa le coordinate locali $(x, y, \vartheta, \varphi, \psi)$ dove le prime due sono le coordinate di O e $(\vartheta, \varphi, \psi)$ sono gli angoli di Eulero. Introduciamo ora il vincolo di puro rotolamento: esso è costituito dal fatto che il punto P della sfera in contatto con il piano ha velocità $\mathbf{v}_p = 0$. Utilizzando la formula fondamentale dei moti rigidi:

$$\mathbf{v}_O = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{O} - \mathbf{P}) \tag{5}$$

Riscriviamo questa equazione nel riferimento solidale alla sfera. In esso i vettori \mathbf{v}_O ed $(\mathbf{O} - \mathbf{P})$ si scrivono:

$$\mathbf{v}_O = \begin{pmatrix} \dot{x}(\cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi) + \dot{y}(\cos \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi) \\ -\dot{x}(\cos \vartheta \cos \psi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \psi) + \dot{y}(\cos \vartheta \cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \psi) \\ \dot{x} \sin \vartheta \sin \varphi - \dot{y} \sin \vartheta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

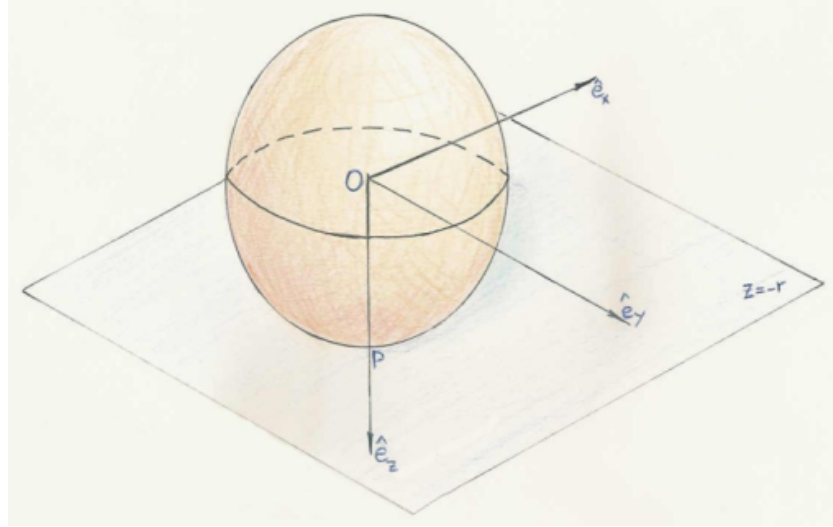


Figura 5:

$$(\mathbf{O} - \mathbf{P}) = -R \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

e la velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ della sfera ha la nota espressione [1],[2]:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta \\ -\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

La condizione (5) è quindi equivalente al sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} \cos \psi (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi - R \dot{\psi} \sin \vartheta) + \cos \vartheta \sin \psi (\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi - R \dot{\vartheta}) = 0 \\ -\sin \psi (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi - R \dot{\psi} \sin \vartheta) + \cos \vartheta \cos \psi (\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi - R \dot{\vartheta}) = 0 \\ \dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi = R \dot{\vartheta} \end{cases} \quad (6)$$

delle quali, con evidenza, solo due sono indipendenti. Utilizzando la seconda e la terza equazione del sistema (6) si vede subito che esso equivale a :

$$\begin{cases} \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi - R \dot{\psi} \sin \vartheta = 0 \\ -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi - R \dot{\vartheta} = 0 \end{cases}$$

cioè in termini matriciali:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} & \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Tenendo conto del fatto che la varietà delle configurazioni ha dimensione $m = 5$ questo sistema associa una distribuzione di rango 3 su Q^4 .

⁴Questa matrice esprime il fatto che per un moto di puro rotolamento sul piano deve valere $du = R d\vartheta$

Le fibre della distribuzione E sono i sottospazi vettoriali di $T_{(x,y,\vartheta,\psi,\varphi)}Q$ i cui vettori

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

soddisfano la condizione (7). Essi sono dunque dati da:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -\dot{x}\frac{\sin\varphi}{R} + \dot{y}\frac{\cos\varphi}{R} \\ \dot{x}\frac{\cos\varphi}{R\sin\vartheta} + \dot{y}\frac{\sin\varphi}{R\sin\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{con } \dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi} \in \mathbb{R}$$

Anche in questo caso per verificare l'integrabilità di E applichiamo il teorema di Frobenius. Verifichiamo l'involuitività dei due campi vettoriali

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ -\sin\varphi \\ \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ \cos\varphi \\ \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dopo alcuni calcoli, resi ancor più semplici dal fatto che questi vettori dipendono solo dagli angoli ϑ, φ , si trova:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ed è chiaro che $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ non verifica la condizione di appartenenza alla distribuzione; in base al teorema di Frobenius la distribuzione E non è quindi integrabile e perciò il vincolo di puro rotolamento di una sfera su un piano è un vincolo anolonomo.

2 Equazioni del moto con i moltiplicatori di Lagrange

Deduciamo in questa sezione le equazioni del moto per un sistema meccanico anolonomo. Consideriamo un sistema costituito da N punti materiali di masse m_i con

dove du è lo spostamento infinitesimo lungo la direzione di \vec{v}_O e ρ è la proiezione di $\mathbf{\Omega}$ sul piano $z = 0$. Infatti la matrice ci dice che, ruotando il riferimento $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ di un angolo φ in modo che la linea dei nodi coincida con l'asse x dobbiamo avere $\dot{x} = R\dot{\vartheta}$ e $\dot{y} = R\frac{\dot{\psi}}{\sin\vartheta}$ (si ricordi che $\dot{\vartheta}$ è parallela all'asse n e $\dot{\psi}$ è parallela a \hat{e}_3). Nella matrice inoltre non compare la velocità angolare ψ in quanto ogni rotazione attorno all'asse \hat{e}_z ortogonale al piano di rotolamento non causa nessuna traslazione del baricentro della sfera

$i = 1, \dots, N$ ciascuno soggetto ad una “forza attiva” $\mathbf{f}_i(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ funzione nota delle posizioni e delle velocità di tutti i punti. In assenza di vincoli le equazioni del moto sono le equazioni di Newton, che in forma compatta possono essere scritte:

$$M\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}((\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}))$$

dove $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ è la risultante delle forze agenti sul sistema e M è la matrice diagonale delle masse: $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N)$ (con ogni massa ripetuta tre volte).

Supponiamo ora che il sistema sia soggetto ad un vincolo olonomo con varietà delle configurazioni $Q \subset \mathbb{R}^{3N}$ e ad un vincolo anolonomo con distribuzione vincolare E su Q . Consideriamo un moto $t \mapsto \mathbf{X}^t$ sia ϕ_i^t la reazione vincolare esercitata sul punto i -esimo all'istante t dai vincoli (tutti, sia quelli olonomi che quelli anolonomi). Allora il moto $t \mapsto \mathbf{X}^t$ e la reazione vincolare $t \mapsto \Phi^t = (\phi_1^t, \dots, \phi_N^t)$ devono soddisfare le equazioni:

$$M\ddot{\mathbf{X}}^t = \mathbf{F}(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t) + \Phi^t \quad (8)$$

$$\mathbf{X}^t \in Q, \quad \dot{\mathbf{X}}^t \in E_{X^t}.$$

Il problema consiste nel dimostrare che questo sistema di equazioni ha una ed una sola soluzione $t \mapsto (\mathbf{X}^t, \Phi^t)$ per ogni dato iniziale $(\mathbf{X}^0, \dot{\mathbf{X}}^0)$ compatibile con i vincoli, soddisfacente cioè $\mathbf{X}^0 \in Q$, $\dot{\mathbf{X}}^0 \in E_{X^0}$. Perchè questo avvenga è necessario fare delle opportune ipotesi sulle reazioni vincolari che i vincoli possono espletare. Precisamente assumiamo che essi siano “ideali”, siano cioè tali che le reazioni vincolari Φ^t che essi possono espletare quando il sistema si trova nell'atto di moto $(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t)$ siano tutti e soli i vettori $\Phi \in \mathbb{R}^{3N}$ soddisfacenti

$$\Phi \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in E_{\mathbf{X}}$$

ovvero ortogonali (rispetto al prodotto scalare dello spazio delle configurazioni) ad $E_{\mathbf{X}}$. Questa condizione viene a volte chiamata *Principio di d'Alembert*. Il procedimento è una diretta generalizzazione della usuale deduzione delle equazioni del moto di un sistema olonomo. In quel caso, come è ben noto, si può procedere in due modi. Il primo è quello di scrivere le equazioni del moto risultanti in coordinate cartesiane X dello spazio delle configurazioni: si ottengono allora equazioni contenenti moltiplicatori di Lagrange. Il secondo è quello di usare coordinate locali sulla varietà delle configurazioni, e conduce alle ben note equazioni di Lagrange. Percorreremo qui entrambe le vie. In presenza di vincoli anolonomi però anche la seconda via produce, ovviamente, equazioni contenenti dei moltiplicatori di Lagrange.

2.1 Equazioni del moto in coordinate globali

Per ottenere il risultato desiderato estendiamo il metodo dei moltiplicatori usato in meccanica Lagrangiana per descrivere il moto di un sistema meccanico in coordinate globali. Esso consiste nel descrivere la varietà delle configurazioni Q del sistema tramite una sommersione e nello scrivere le reazioni vincolari come combinazioni lineari dei gradienti delle funzioni componenti la sommersione. I coefficienti utilizzati in queste combinazioni lineari sono appunto i *moltiplicatori di Lagrange*.

Nel nostro caso le reazioni vincolari sono ortogonali ad una distribuzione su Q e non agli spazi tangenti a Q . Il procedimento è il seguente:

Descriviamo⁵ la varietà m -dimensionale Q come luogo degli zeri di una funzione sommersiva $g = (g_1, g_2, \dots, g_r) : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^r$, con $r = 3N - m$:

$$Q = \{X \in \mathbb{R}^{3N} : g(X) = 0\}.$$

In ogni punto \mathbf{X} di Q i gradienti delle r funzioni g_1, g_2, \dots, g_r formano una base per il complemento ortogonale $N_X Q$ di $T_X Q$. Essi sono infatti tutti ortogonali a $\ker(g'(\mathbf{X})) = T_X Q$ e sono linearmente indipendenti perchè la matrice Jacobiana $\frac{\partial g}{\partial X}(\mathbf{X})$ ha ovunque rango r . Sia inoltre E la distribuzione corrispondente al vincolo anolonomo. Come sappiamo possiamo descrivere E come nucleo di $m - k$ 1-forme differenziali definite su Q ; poichè Q è immersa in \mathbb{R}^{3N} esiste una funzione matriciale differenziabile

$$\mathbf{S} : Q \rightarrow M_{(m-k) \times 3N}$$

tale che, $\forall \mathbf{X} \in Q$ si abbia:

$$\text{Ker}(\mathbf{S}(\mathbf{X})) \subset T_X Q$$

$$\text{Rank} \mathbf{S}(\mathbf{X}) = m - k$$

La prima condizione significa che, se $\mathbf{V} \in T_X Q$ allora $\mathbf{V} \in E_X$ se e solo se $\mathbf{S}(\mathbf{V}) = 0$. Dunque una base il complemento ortogonale a E_X in \mathbb{R}^{3N} è:

$$(\nabla g_1(\mathbf{X}), \dots, \nabla g_r(\mathbf{X}), S_1(\mathbf{X}), \dots, S_{m-k}(\mathbf{X}))$$

dove $S_1(\mathbf{X}), \dots, S_{m-k}(\mathbf{X})$ sono i vettori di \mathbb{R}^{3N} formati dalle righe della matrice \mathbf{S} , i quali formano una base per lo spazio ortogonale a E_X in $T_X Q$. Quindi in \mathbb{R}^{3N} possiamo descrivere i vincoli anolonomi come combinazioni lineari dei vettori di questa base. Otteniamo:

$$\Phi = \sum_{i=1}^r \frac{\partial g_i}{\partial X}(\mathbf{X}) \mu_i + \sum_{j=1}^{m-k} S_j(\mathbf{X}) \lambda_j$$

cioè in termini matriciali:

$$\phi = \mathbf{C}^T \Lambda \quad \text{con} \quad \mathbf{C}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(\mathbf{X}) \\ \nabla g_2(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \nabla g_r(\mathbf{X}) \\ \hline S_1(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ S_{m-k}(\mathbf{X}) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{m-k} \end{pmatrix}$$

Il problema consiste ora nel trovare le soluzioni $t \mapsto (\mathbf{X}^t, \Lambda^t)$ del sistema:

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{X}}^t & = F(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t) + \mathbf{C}^T(\mathbf{X}^t) \Lambda^t \\ g(\mathbf{X}^t) & = 0 \\ \mathbf{C}(\mathbf{X}^t) \dot{\mathbf{X}}^t & = 0 \end{cases}$$

⁵almeno localmente, ma per semplicità non approfondiamo questo aspetto

(9)

che, a causa della presenza dei moltiplicatori Λ^t non è un vero e proprio sistema di equazioni differenziali, bensì un sistema di equazioni *algebrico-differenziali*.

Proposizione Nelle ipotesi fatte, si ha che :

1. Per ogni dato iniziale $\mathbf{X}^0 \in Q$, $\dot{\mathbf{X}}^0 \in E_{X^0}$ le equazioni (9) hanno un' unica soluzione $t \mapsto (\mathbf{X}^t, \Lambda^t)$ differenziabile, definita in qualche intervallo temporale.
2. Le reazioni vincolari sono funzioni solo dell'atto di moto. Esiste cioè una mappa $\tilde{\Lambda} : E \rightarrow \mathbb{R}^{r+k}$, $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \mapsto \tilde{\Lambda}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ t.c. per qualunque soluzione $t \mapsto (\mathbf{X}^t, \Lambda^t)$ si ha $\Lambda^t = \tilde{\Lambda}(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t) \quad \forall t$.

dim Supponiamo dapprima che esista una soluzione $t \rightarrow (\mathbf{X}^t, \Lambda^t)$ di (9) e proviamo che Λ^t è funzione solo di $(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t)$:

se $t \rightarrow \mathbf{X}^t$ è soluzione essa soddisfa le tre equazioni (9) ed in particolare vale:

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}^t)\dot{\mathbf{X}}^t = 0 \quad (10)$$

derivando ancora rispetto al tempo si ottiene

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}^t)\ddot{\mathbf{X}}^t + K(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t) = 0 \quad (11)$$

con una certa funzione K di $(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$. Se introduciamo in (11) l'espressione di $\ddot{\mathbf{X}}^t$ che si ottiene dalla prima delle (9) troviamo

$$\mathbf{C}(X^t) M^{-1} \mathbf{C}^T(X^t) \Lambda^t = -\mathbf{C}(X^t) M^{-1} \mathbf{F}(X^t, \dot{X}^t) - K(X^t, \dot{X}^t) \quad (12)$$

La matrice $\mathbf{C}M^{-1}\mathbf{C}^T$ è invertibile perchè \mathbf{C} ha rango massimo e M è simmetrica e definita positiva. Quindi introdotta la funzione:

$$\tilde{\Lambda} = -[\mathbf{C}M^{-1}\mathbf{C}^T]^{-1}[\mathbf{C}M^{-1}\mathbf{F} + K] \quad (13)$$

abbiamo provato che $\Lambda^t = \tilde{\Lambda}(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t) \quad \forall t$. L'equazione (9) si riduce di conseguenza ad un'equazione differenziale ordinaria per il moto $t \mapsto \mathbf{X}^t$:

$$M\ddot{\mathbf{X}}^t = F(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t) + \mathbf{C}^T(\mathbf{X}^t)\tilde{\Lambda}(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t) \quad (14)$$

Questo prova anche che, se $t \rightarrow (\mathbf{X}^t, \Lambda^t)$ è una soluzione con un certo dato iniziale, essa è unica. Resta da provare l'esistenza di una tale soluzione una volta assegnati i dati iniziali $\mathbf{X}^0 \in Q$, $\dot{\mathbf{X}}^0 \in E_{X^0}$.

Sia \mathbf{X}^t una soluzione di (14) con dati iniziali $(\mathbf{X}^0, \dot{\mathbf{X}}^0)$ e prendiamo $\Lambda^t = \tilde{\Lambda}(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t)$.

Allora la coppia $(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t)$ soddisfa per costruzione le equazioni (14) e (12) e quindi la (11), cioè $\frac{d}{dt}[\mathbf{C}(\mathbf{X}^t)\dot{\mathbf{X}}^t] = 0$ Ne segue che $\mathbf{C}(\mathbf{X}^t)\dot{\mathbf{X}}^t = \mathbf{C}(\mathbf{X}^0)\dot{\mathbf{X}}^0 = 0$. Dunque $\frac{d}{dt}g(X^t) = 0$ e quindi $g(X^t) = g(X^0) = 0$.

■

2.2 Equazioni del moto in coordinate locali

Così come nel caso olonomo è possibile scrivere le equazioni del moto del sistema in coordinate locali sulla varietà delle configurazioni Q . Come già accennato però le equazioni risultanti contengono ancora dei moltiplicatori di Lagrange che tengono conto del fatto che la velocità del sistema appartiene alla distribuzione E . Sia

$$\begin{aligned}\tilde{X} : U \subset \mathbb{R}^m &\rightarrow Q \subset \mathbb{R}^{3N} \\ q &\mapsto \tilde{x}(q) = (x_1(q), \dots, x_m(q))\end{aligned}$$

una parametrizzazione locale (immersione) di Q . Come noto essa induce una parametrizzazione locale di TQ , data da:

$$\begin{aligned}U \times \mathbb{R}^m &\rightarrow TQ \\ (q, \dot{q}) &\mapsto \left(\tilde{X}(q), \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q) \dot{q} \right).\end{aligned}$$

L'energia cinetica del sistema in queste coordinate si scrive:

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot \left[\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q) \right]^T M \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q) \dot{q}$$

Le proiezioni delle forze sui vettori $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_1}(q), \dots, \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_m}(q)$ che formano una base per lo spazio tangente $T_{\tilde{X}(q)}Q$ si chiamano *componenti lagrangiane delle forze* e si scrivono:

$$Q_i(q, \dot{q}) = F \left(\tilde{X}(q), \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q, \dot{q}) \right) \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q) \quad i = 1, \dots, m.$$

Si noti infine che nelle coordinate (q, \dot{q}) su TQ il sottospazio $E_{\tilde{X}(q)}$ di $T_{\tilde{X}(q)}Q$ è dato dal nucleo della matrice:

$$\tilde{s}(q) = \mathbf{S}(\tilde{X}(q)) \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q). \quad (15)$$

Infatti, se $\dot{\mathbf{X}} \in E_{\tilde{X}(q)}$ allora $\dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q) \dot{q}$ e $0 = \mathbf{S}(\tilde{X}(q)) \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{S}(\tilde{X}(q)) \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q) \dot{q} = \tilde{s}(q) \dot{q}$. Si noti anche che $\tilde{s}(q)$ è una matrice $M_{(m-k) \times m}$ di rango $m - k$.

Detto questo possiamo sfruttare i risultati ottenuti con la scrittura in coordinate globali per riscrivere le equazioni del moto in queste coordinate.

Proposizione Un moto $t \mapsto (\mathbf{X}^t, \Lambda^t)$ è soluzione del sistema (9) se e solo se $t \mapsto (q^t, \lambda^t)$ definito da $\mathbf{X}^t = \tilde{X}(q^t), \Lambda^t = (\mu^t, \lambda^t)$ con $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-k})$ è soluzione di:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(q^t, \dot{q}^t) \right] - \frac{\partial T}{\partial q}(q^t, \dot{q}^t) - Q(q^t, \dot{q}^t) = \tilde{s}(q^t)^T \tilde{\lambda}(q^t, \dot{q}^t) \\ \tilde{s}(q^t) \dot{q}^t = 0 \end{cases} \quad (16)$$

dove $\tilde{\lambda}(q^t, \dot{q}^t)$ è il vettore formato dalle ultime s componenti della funzione $\tilde{\Lambda}$ definita in (13) e valutata nell'atto di moto di coordinate (q^t, \dot{q}^t) , cioè in $\left(\tilde{X}(q), \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q) \dot{q} \right)$.

dimostrazione Consideriamo un moto $t \mapsto (\mathbf{X}^t, \Lambda^t)$ soluzione di (9). Proiettando la prima equazione di (9) sugli spazi tangenti a Q si ottiene:

$$M\ddot{\mathbf{X}}^t \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}(q^t) - Q_i(q^t, \dot{q}^t) = \varphi_i^t \quad i = 1, \dots, m \quad (17)$$

con

$$\varphi_i^t = \Phi \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i} = \mathbf{C}^T \tilde{\Lambda} \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i} = \tilde{\Lambda} \cdot \mathbf{C} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_i}.$$

In coordinate locali su Q la matrice \mathbf{C} si riscrive:

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ S(\tilde{X}(q)) \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q} \end{array} \right)$$

in quanto le prime r righe della matrice C sono i gradienti delle funzioni g_1, \dots, g_r e sono ortogonali a TQ . Otteniamo dunque:

$$\varphi_i^t = \tilde{\lambda} \cdot \mathbf{S}(\tilde{X}(q)) \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q} = [\tilde{s}^T(q) \tilde{\lambda}]_i.$$

Dalla deduzione delle equazioni di Lagrange per i sistemi olonomi sappiamo che il primo membro dell'equazione (17) si può scrivere:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(q^t, \dot{q}^t) \right] - \frac{\partial T}{\partial q}(q^t, \dot{q}^t) - Q(q^t, \dot{q}^t) \quad (18)$$

Dunque $t \mapsto q^t$ soddisfa:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(q^t, \dot{q}^t) \right] - \frac{\partial T}{\partial q}(q^t, \dot{q}^t) - Q(q^t, \dot{q}^t) = \tilde{s}(q^t)^T \tilde{\lambda}(q^t, \dot{q}^t). \quad (19)$$

La seconda equazione del sistema (16) si ottiene subito riscrivendo la condizione $C(\mathbf{X})\dot{\mathbf{X}} = 0$ in coordinate lagrangiane: poichè $\dot{\mathbf{X}}^t = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q^t) \dot{q}^t \in T_{\tilde{X}(q)}Q$ questa condizione si riduce a

$$\mathbf{S}(\tilde{X}(q^t)) \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q}(q^t) \dot{q}^t = 0$$

Rifacendo i passaggi precedenti al contrario si prova infine che se $t \mapsto q^t$ è soluzione di (16) allora $\mathbf{X}^t = \tilde{X}(q^t)$ è soluzione di (9) insieme a $\Lambda^t = (\mu^t, \tilde{\lambda}^t(q^t, \dot{q}^t))$, con μ^t che si determina come nel caso olonomo. La terza equazione del sistema (9) è automaticamente verificata in quanto stiamo descrivendo la varietà Q tramite una funzione immersiva. ■

Concludiamo con un osservazione. Al secondo membro delle equazioni di Lagrange (16) compare il termine $\tilde{s}(q^t)^T \tilde{\lambda}(q^t, \dot{q}^t)$ che è ortogonale (in $\mathbb{R}^m \approx T_{\tilde{X}(q)}Q$) alla fibra $E_{\tilde{X}} = \ker(\tilde{s}(q^t))$. Se si suppone che il vincolo olonomo agente sul sistema sia ideale, e dunque produca una reazione vincolare (in \mathbb{R}^{3N}) ortogonale a $T_{\tilde{X}(q)}Q$, si vede che il termine $\tilde{s}(q^t)^T \tilde{\lambda}(q^t, \dot{q}^t)$ può essere interpretato come la componente in $T_{\tilde{X}(q)}Q$ della reazione vincolare esercitata dal vincolo anolonomo.

2.3 Esempio: moto di puro rotolamento

Le equazioni del moto di sistemi anolonomi nella forma (16) di equazioni di Lagrange con i moltiplicatori sono utili soprattutto nell'analisi teorica (si veda per esempio lo studio delle simmetrie nella sezione 3). Nello studio dei moti di un dato sistema invece, si ricorre spesso a scritture delle equazioni del moto in sistemi di coordinate non lagrangiani (cioè sovrabbondanti: per esempio si immerge la varietà Q in uno spazio euclideo di dimensione maggiore e si lavora con le coordinate cartesiane di quello spazio). Questo è particolarmente utile nel caso si abbia a che fare con corpi rigidi in quanto l'introduzione di coordinate su $\mathbf{SO}(3)$, per esempio gli angoli di Eulero, conduce ad equazioni complicate; è spesso preferibile lavorare con altri metodi come le matrici di rotazione (cioè, in definitiva, con punti di uno spazio di dimensione 9). Tuttavia il risultato della sezione precedente continua a valere: basta scrivere le equazioni del moto del sistema olonomo, ed aggiungere poi la reazione esercitata dal vincolo anolonomo per mezzo dei moltiplicatori da Lagrange.

Equazioni del moto Consideriamo ancora il moto di puro rotolamento di una sfera su un piano, già considerato nell'esempio C della sezione 1.3. Si sa, dalla meccanica, che le equazioni di Lagrange per un corpo rigido sono equivalenti alle cosiddette equazioni cardinali, , cioè le equazioni di bilancio di quantità di moto e momento angolare [1], [2]. Per ottenere le equazioni del moto del sistema vincolato è allora sufficiente aggiungere le reazioni vincolari in tali equazioni.

Supponiamo che la sfera, di raggio r , rotoli sul piano $z = -r$ sotto l'influenza di forze attive di risultante \mathbf{R} e momento \mathbf{N} rispetto al centro di massa O della sfera. Indichiamo con $\boldsymbol{\Omega}$ la velocità angolare della sfera rispetto ad un sistema di riferimento solidale al piano e con I il suo momento di inerzia. Se la sfera ha massa m allora $I = \frac{2}{5}mr^2$. Siccome il piano esercita una reazione vincolare solo sul punto P della sfera in contatto con esso, chiamiamola $\boldsymbol{\Phi}$, le equazioni del moto (in un riferimento solidale al piano) sono:

$$m \frac{d\mathbf{v}_O}{dt} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\Phi}, \quad I \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \mathbf{N} + (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times \boldsymbol{\Phi}. \quad (20)$$

A queste vanno aggiunti i vincoli: il centro della sfera ha coordinata $z = 0$ costante ed è soddisfatta la condizione di puro rotolamento:

$$\mathbf{v}_O = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{O} - \mathbf{P})$$

S osservi che, come è del resto ben noto, siccome il punto di contatto ha velocità nulla, il vincolo di puro rotolamento è ideale: siccome $\mathbf{v}_P = 0$, $\boldsymbol{\Phi} \cdot \dot{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{v}_P = 0$.

Illustriamo su questo esempio il risultato ottenuto nella sezione precedente: le equazioni cardinali (20) determinano sia il moto che la reazione vincolare, che anzi è funzione nota dell'atto di moto.

Cominciamo con il determinare proprio l'espressione di $\boldsymbol{\Phi}$ in funzione dell'atto di moto. Se scegliamo come sistema di riferimento solidale al piano un riferimento ortonormale $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, con l'asse z ortogonale al piano e diretto dal centro della sfera verso questo in modo che i punti O e P abbiano rispettivamente coordinate $(x, y, 0)$ e $(x, y, -r)$ (vedi fig.5), allora la condizione di puro rotolamento si scrive:

$$\mathbf{v}_O = -R\boldsymbol{\Omega} \times \hat{e}_z \quad (21)$$

sostituendola nella prima equazione cardinale, troviamo:

$$\Phi = -mR \frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{n} - \mathbf{R} \quad (22)$$

Inserendo in questa equazione l'espressione di $\frac{d\Omega}{dt}$ che si ricava dalla seconda equazione cardinale otteniamo la seguente equazione per Φ :

$$\Phi = -\frac{mR}{I} \left(\mathbf{N} + (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times \Phi \right) \times \hat{e}_z - \mathbf{R} = -\frac{mR}{I} \left(\mathbf{N} \times \hat{e}_z - R\hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \Phi) \right) - \mathbf{R}.$$

Tenendo conto di $I = \frac{2}{5}mR^2$ e $\hat{e}_z \times (\hat{e}_z \times \Phi) = \hat{e}_z(\hat{e}_z \cdot \Phi) - \Phi(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z)$ l'equazione precedente si riscrive:

$$\Phi = -\frac{5}{2R} \left(\mathbf{N} \times \hat{e}_z - R\Phi_z + R\Phi \right) - \mathbf{R}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \Phi_x &= -\frac{5}{7R}N_y - \frac{2}{7}R_x \\ \Phi_y &= +\frac{5}{7R}N_x - \frac{2}{7}R_y \\ \Phi_z &= -R_z. \end{aligned}$$

Siccome \mathbf{R} e \mathbf{N} sono funzioni note dell'atto di moto, questa è l'espressione cercata di Φ . Sostituendo questa espressione nelle equazioni cardinali si ricavano infine le equazioni del moto del sistema:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_O &= -\frac{5}{7R}N_y + \frac{5}{7}R_x \\ m\ddot{y}_O &= \frac{5}{7R}N_x + \frac{5}{7}R_y \\ mR\dot{\Omega}_x &= \frac{5}{7R}N_x + \frac{5}{7}R_y \\ mR\dot{\Omega}_y &= \frac{5}{7R}N_y - \frac{5}{7}R_x \\ mR\dot{\Omega}_z &= \frac{5}{2R}N_z. \end{aligned}$$

Osservazione Per avere una descrizione completa del moto del sistema manca ancora un'equazione che permetta di determinare l'orientazione della sfera in funzione del tempo. Questa equazione è fornita dalla ben nota relazione tra la derivata temporale della matrice di rotazione e la velocità angolare Ω :

$$\dot{R} = R\hat{\Omega}$$

dove $\hat{\Omega}$ è la matrice antisimmetrica definita da:

$$\hat{\Omega}\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Sfera che rotola su un piano inclinato Come esempio pratico consideriamo una sfera che rotola su un piano inclinato sotto l'azione della forza di gravità. Consideriamo un sistema di riferimento come quello usato in precedenza, cioè con l'asse \hat{e}_z ortogonale al piano di rotolamento e rivolto verso questo, e l'asse \hat{e}_y parallelo alla direzione del moto. In questo caso la risultante delle forze esterne è:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \sin \vartheta \\ mg \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

dove l'angolo ϑ è la pendenza del piano inclinato (fig 6). Il suo momento \mathbf{N} è nullo in

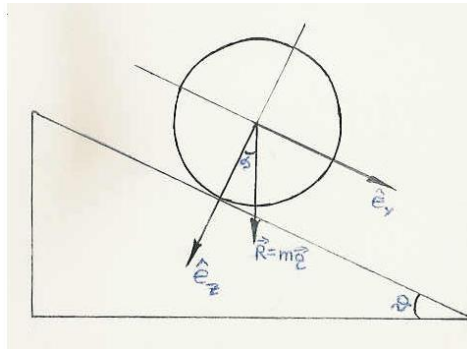


Figura 6: Angoli di Eulero

quanto \mathbf{R} è applicata nel centro di massa. Dalle equazioni del moto scritte prima si ricavano immediatamente le seguenti:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= 0 \\ \Phi_y &= -\frac{2}{7}mg \sin \vartheta \\ \Phi_z &= -mg \cos \vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_O &= 0 \\ m\ddot{y}_O &= \frac{5}{7}mg \sin \vartheta \\ mR\dot{\Omega}_x &= \frac{5}{7}mg \sin \vartheta \\ mR\dot{\Omega}_y &= 0 \\ mR\dot{\Omega}_z &= 0. \end{aligned}$$

3 Coordinate ignorabili e teorema di Nöther

Ci occupiamo in questa sezione delle simmetrie dei sistemi Lagrangiani anolonomi, riformulando in particolare il teorema di Nöther per i gruppi di simmetria unidimensionali nel caso anolonomo.

Azioni di gruppi Per prima cosa introduciamo la nozione di azione di un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi, che generalizzano le rotazioni e traslazioni in \mathbb{R}^3

Definizione: Si dice che una mappa differenziabile

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n, \quad (q, \alpha) \mapsto \varphi(q, \alpha) \equiv \varphi_\alpha(q)$$

è un'azione di \mathbb{R} su \mathbb{R}^n se

1. $\varphi_0 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ è l'identità.
2. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo.
3. Per tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha: $\varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$.

In modo del tutto analogo si definisce un'azione di \mathbb{S}^1 su \mathbb{R}^n .

Ogni azione di \mathbb{R} o di \mathbb{S}^1 su \mathbb{R}^n è il flusso di un campo vettoriale su \mathbb{R}^n . Questo campo vettoriale si chiama *generatore infinitesimo* dell'azione ed è definito nel seguente modo:

$$\xi(q) := \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(q, 0).$$

Il sollevamento alle velocità di un'azione φ è la mappa

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\ (q, \dot{q}, \alpha) &\mapsto \left(\varphi_\alpha(q_t), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q_t) \dot{q}_t \right). \end{aligned}$$

Diciamo che la lagrangiana $L(q, \dot{q})$ è “*invariante sotto φ* ” se

$$L\left(\varphi_\alpha(q_t), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q_t) \dot{q}_t\right) = L(q, \dot{q}) \quad \forall \quad \alpha, q, \dot{q}$$

3.1 Simmetrie nei sistemi Lagrangiani anolonomi

In meccanica Lagrangiana, come noto, ad ogni azione che lasci invariante la lagrangiana è associato un integrale primo, come stabilito dal classico teorema di Nöther. Inoltre è possibile, sotto le stesse ipotesi, riscrivere le equazioni in un sistema di coordinate in cui una di queste sia ignorabile e quindi, utilizzando il metodo della riduzione alla Routh, ridurre il problema allo studio di un sistema lagrangiano con un grado di libertà in meno. Nei sistemi meccanici anolonomi questi risultati non sono più validi in quanto

nelle equazioni del moto compaiono dei termini che tengono conto delle reazioni vincolari anolonomiche come visto nella sezione (2.2):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q^t, \dot{q}^t) \right] - \frac{\partial L}{\partial q}(q^t, \dot{q}^t) = \tilde{s}^T(q^t) \tilde{\lambda}(q^t, \dot{q}^t) \\ \tilde{s}(q^t) \dot{q} = 0 \end{cases}$$

Per fare un esempio, se in meccanica Lagrangiana l'invarianza della lagrangiana rispetto alla traslazione di una coordinata q_j garantita da sola la conservazione del momento ad essa coniugato $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, nei sistemi anolonomici questo non è più vero: abbiamo infatti

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}(q^t, \dot{q}^t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q^t, \dot{q}^t) \right] = \left[\tilde{s}^T(q^t) \tilde{\lambda}(q^t, \dot{q}^t) \right]_j.$$

In alcuni casi però è ancora possibile che l'esistenza di un gruppo di simmetria la cui azione lascia invariata la Lagrangiana garantisca l'esistenza di un'integrale primo, che è anzi lo stesso del caso oloonomo, cioè il momento dell'azione $\xi \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Questo avviene nel caso più semplice se il generatore infinitesimo dell'azione appartiene all'insieme Δ_E dei campi vettoriali a valori nella distribuzione vincolare E :

Teorema di Nöther anolonomo *Consideriamo un sistema meccanico anolonomo. Se la Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ è invariante sotto l'azione φ e il generatore infinitesimo ξ dell'azione φ è un campo vettoriale a valori nella distribuzione vincolare E , allora le equazioni di Lagrange anolonomiche per L hanno l'integrale primo:*

$$I(q, \dot{q}) = \xi(q) \cdot p(q, \dot{q}) \quad (23)$$

dove $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$.

dimostrazione Consideriamo un moto $t \mapsto q_t$ del sistema. L'invarianza di L significa che per ogni t, α si ha:

$$\frac{d}{d\alpha} L\left(\varphi_\alpha(q_t), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q_t) \dot{q}_t\right) = 0$$

ossia, siccome $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q_t) \dot{q}_t = \frac{d}{dt} \varphi_\alpha(q_t)$,

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial \alpha}(q_t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} [\varphi^j(q_t)] \right] = 0$$

dove le derivate di L sono calcolate in $\left(\varphi_\alpha(q_t), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q_t) \dot{q}_t\right)$. Scambiando l'ordine delle derivate di φ_α rispetto a t e α , calcolando tutto per $\alpha = 0$ e ricordando la definizione del generatore infinitesimo ξ si ottiene (essendo $\varphi_0(q) = q$ e $\frac{\partial \varphi_0}{\partial q}(q) \dot{q} = \dot{q}$)

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}(q_t, \dot{q}_t) \xi^j(q_t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_t, \dot{q}_t) \frac{d}{dt} \xi^j(q_t) \right] = 0 \quad (24)$$

che si riscrive in termini vettoriali:

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q_t, \dot{q}_t) \cdot \xi(q_t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q_t, \dot{q}_t) \frac{d}{dt} \cdot \xi(q_t) = 0$$

siccome il moto $t \mapsto q_t$ soddisfa le equazioni di Lagrange anolonyme abbiamo $\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \tilde{s}^T \tilde{\lambda}$ e quindi:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q_t, \dot{q}_t) \right) \right] \cdot \xi(q_t) + \tilde{s}^T(q_t) \tilde{\lambda}(q_t, \dot{q}_t) \cdot \xi(q_t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q_t, \dot{q}_t) \cdot \frac{d}{dt} \xi(q_t) = 0$$

Il fatto che il generatore infinitesimo ξ abbia valori in E significa che $\tilde{s}\xi = 0$ e dunque $\tilde{s}^T \tilde{\lambda} \cdot \xi = \tilde{\lambda} \cdot \tilde{s}\xi = 0$. La formula precedente dà allora:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q_t, \dot{q}_t) \cdot \xi(q_t) \right] = 0$$

che prova l'asserto. ■

Rispetto al caso olonomo in presenza di simmetria il numero di integrali primi del sistema può ora diminuire anche drasticamente, come dimostra chiaramente il seguente esempio. Tuttavia il vincolo anolonomo riduce anche la dimensione dello spazio delle fasi e quindi è più probabile che anche un ridotto numero di integrali primi siano sufficienti a dare, per esempio, l'integrabilità. Siccome la reazione vincolare è ortogonale alla distribuzione vincolare E , la condizione che ξ abbia valori in E si può interpretare dicendo che, affinché un'azione produca un momento conservato, la reazione vincolare deve compiere lavoro nullo sulle orbite dell'azione.

3.2 Esempio: simmetrie per una sfera nel caso olonomo e nel moto di puro rotolamento

Consideriamo come esempio un sistema costituito da una sfera che si muova prima su un piano perfettamente liscio (vincolo olonomo) e poi su un piano perfettamente ruvido nel qual caso bisogna aggiungere al sistema olonomo il vincolo di puro rotolamento. Nel primo caso si vede immediatamente che le rotazioni attorno a qualsiasi asse passante per il centro della sfera lasciano invariante la lagrangiana e dunque producono un integrale primo. Aggiungendo il vincolo anolonomo invece la situazione cambia radicalmente: una rotazione attorno ad un asse qualsiasi passante per il centro della sfera provoca in generale un movimento del punto di contatto con il piano con un conseguente lavoro non nullo della reazione vincolare (L'argomento si formalizza subito calcolando il generatore infinitesimo che è la componente lungo l'asse di rotazione del momento angolare della sfera). Ci si accorge che in questo caso resta un solo gruppo di trasformazioni che soddisfi il teorema di n other, cio  il gruppo delle rotazioni attorno all'asse passante per il punto di contatto e per il centro della sfera. Dunque la componente del momento angolare della sfera ortogonale al piano   un integrale primo.

A Teorema di Frobenius.

Dimostriamo in questa appendice il teorema di Frobenius. Seguendo, tra le tante dimostrazioni esistenti in letteratura quella di [4]. Nel seguito assumeremo tacitamente che tutte le funzioni, campi vettoriali, etc. siano \mathcal{C}^∞ .

Cominciamo con il richiamare alcuni fatti:

teorema 1 Se $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k$ sono campi vettoriali su \mathbb{R}^k linearmente indipendenti in un intorno di un punto p e se $[\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta] = 0$ per $1 \leq \alpha, \beta \leq k$ allora esiste un sistema di coordinate (x, U) attorno a p tale che:

$$\mathbf{X}_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad \text{su } U, \quad \alpha = 1, \dots, k$$

Dimostrazione Vedere, per esempio, [4].

Definizione Siano M e N due varietà differenziali ed $f : M \rightarrow N$ una funzione. Due campi vettoriali \mathbf{X} su M e \mathbf{Y} su N sono detti f -correlati se

$$Tf_p \mathbf{X}_p = \mathbf{Y}_{f(p)} \quad \forall p \in M$$

dove Tf_p è la mappa tangente di f valutata in p .

Si osservi che, se \mathbf{X} e \mathbf{Y} sono f -correlati, allora, $\forall g : N \rightarrow \mathbb{R}$ si ha la seguente relazione tra derivate di Lie:

$$(\mathbf{Y}g) \circ f = \mathbf{X}(g \circ f). \quad (25)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}g)(f(p)) &= \langle dg_{f(p)}, \mathbf{Y}_{f(p)} \rangle \\ &= \langle dg_{f(p)}, Tf_p \mathbf{X}_p \rangle \\ &= \langle (Tf_p)^T dg_p, \mathbf{X}_p \rangle \\ &= \langle d(g \circ f)_p, \mathbf{X}_p \rangle \\ &= [\mathbf{X}(g \circ f)](p). \end{aligned}$$

In virtù della corrispondenza tra campi vettoriali ed operatori differenziali, abbiamo dunque il seguente criterio: \mathbf{X} e \mathbf{Y} sono f -correlati se e solo se la (25) vale per ogni funzione $g : N \rightarrow \mathbb{R}$.

proposizione 2 Sia $i : N \rightarrow M$ un' immersione. Se \mathbf{Y} è un campo vettoriale su M tale che

$$\mathbf{Y}_{i(p)} \in Ti_p(T_p N),$$

allora c'è un unico campo vettoriale \mathbf{X} su N i -correlato con \mathbf{Y}

dimostrazione Vedere [4]

Per i nostri scopi la proprietà più importante dei campi vettoriali f -correlati è la seguente:

Proposizione 3 Se due coppie di campi vettoriali \mathbf{X}_i e \mathbf{Y}_i , $i = 1, 2$, sono f -correlati, allora i commutatori $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$ e $[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]$ sono f -correlati.

dimostrazione È un semplice calcolo. Se $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, allora :

$$(\mathbf{Y}_i g) \circ f = \mathbf{X}_i(g \circ f) \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

Quindi

$$\begin{aligned} ([\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]g) \circ f &= (\mathbf{Y}_1(\mathbf{Y}_2 g) \circ f) - (\mathbf{Y}_2(\mathbf{Y}_1 g) \circ f) \\ &= \mathbf{X}_1((\mathbf{Y}_2 g) \circ f) - \mathbf{X}_2((\mathbf{Y}_1 g) \circ f) \end{aligned}$$

in base a (26), con g sostituita da $\mathbf{Y}_2 g$ e $\mathbf{Y}_1 g$ rispettivamente, troviamo dunque:

$$\begin{aligned} ([\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]g) \circ f &= \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_2(g \circ f)) - \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_1(g \circ f)) \\ &= [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2](g \circ f). \end{aligned}$$

■

Siamo ora in grado di affrontare la dimostrazione del teorema di Frobenius, ove usiamo liberamente la terminologia introdotta nella sezione 1.

teorema di Frobenius Una distribuzione è integrabile se e solo se è involutiva.

dimostrazione Dimostriamo innanzitutto che una distribuzione integrabile è involutiva. Sia E una distribuzione integrabile su una varietà M e sia N una sua varietà integrale, con $i : N \rightarrow M$ mappa di inclusione. Se \mathbf{X} e \mathbf{Y} sono due campi vettoriali su M a valori in E allora in base alla proposizione 2 $\forall p \in N$ esistono e sono unici due campi vettoriali $\bar{\mathbf{X}}$ e $\bar{\mathbf{Y}}$ su N i -correlati a \mathbf{X} e \mathbf{Y} . Sfruttando la proposizione 3 abbiamo che $[\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}}]$ e $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ sono i -correlati. Quindi, se $p = i(\bar{p})$ con $\bar{p} \in N$,

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{i(p)} = T i_{\bar{p}}[\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}}]_{\bar{p}} \in T i_{\bar{p}}(T_{\bar{p}}N) = E_p.$$

Dunque $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ ha valori in E .

Consideriamo ora una distribuzione involutiva E su una varietà differenziale M . Sia $p \in M$ e U intorno di p . Usando coordinate locali il problema si trasporta in \mathbb{R}^m , dunque, per semplificare i calcoli, possiamo assumere di essere in \mathbb{R}^m , con $p = 0$. Scegliamo un sistema di coordinate (t_1, \dots, t_m) in \mathbb{R}^m in modo che

$$\frac{\partial}{\partial t^1} \Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial t^k} \Big|_0$$

sia una base di E_0 . Sia $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ la proiezione sulle prime k coordinate. Allora $T\pi_0 : \mathbb{R}^m = T_0\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k = T_0\mathbb{R}^k$ è suriettiva e la sua restrizione ad E_0 , $T\pi_0|_{E_0} : E_0 \rightarrow$

\mathbb{R}^k , è un isomorfismo. Per continuità $T\pi_q$ è iniettivo su E_q per q vicini a 0. Quindi, in prossimità di 0 possiamo scegliere in modo univoco

$$\mathbf{X}_1(q), \dots, \mathbf{X}_k(q) \in E_q$$

tali che

$$T\pi_q \mathbf{X}_i(q) = \frac{\partial}{\partial t^i} \Big|_{\pi(q)} \quad 1 = 1, \dots, k.$$

Quindi i campi vettoriali \mathbf{X}_i (in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^m$) e $\frac{\partial}{\partial t^i}$ (su \mathbb{R}^k) sono π -correlati. Dalla proposizione 3 segue quindi che:

$$T\pi_q [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]_q = \left[\frac{\partial}{\partial t^i}, \frac{\partial}{\partial t^j} \right]_{\pi(q)} = 0.$$

Essendo poi $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] \in E_q$ per assunzione e $T\pi_q$ iniettiva su E_q otteniamo che $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = 0$. Dunque in base al teorema 1 esiste un sistema di coordinate (x, U) con U intorno di 0 in \mathbb{R}^m tale che

$$\mathbf{X}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad i = 1, \dots, k.$$

con

$$\begin{aligned} x(p) &= 0 \\ x(U) &=] - \epsilon, \epsilon[\times \dots \times] - \epsilon, \epsilon[\end{aligned}$$

Consideriamo ora gli insiemi:

$$\{q \in U : x^{k+1}(q) = a^{k+1}, \dots, x^m(q) = a^m\}$$

con $a^{k+1}, \dots, a^m \in \mathbb{R}$, $|a^{k+1}|, \dots, |a^m| < \epsilon$.

Essi sono chiaramente delle varietà integrali di E in quanto i loro spazi tangenti sono generati dai vettori $\frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{X}_i$ per $i = 1, \dots, k$. Quindi E è una distribuzione integrabile. ■

Riferimenti bibliografici

- [1] V.I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, GTM 60, Springer-Verlag, New York 1978 (trad. it. *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, Roma 1979).

- [2] F. Fasso' *Note per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica*. Universita' di Padova, a.a. 2004-2005

- [3] H. Goldstein, *Meccanica classica* (Zanichelli, Bologna, 1971)

- [4] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry* (primo volume) Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.

- [5] R. Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Seconda edizione. (Springer, New York, 1993)