

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

---

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.  
Corso di Laurea Triennale in Fisica



SOLUZIONI TRIANGOLARI NEL PROBLEMA  
RISTRETTO ELLITTICO DEI 3 CORPI

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof. Francesco Fassò

**Laureando:**  
Marco Zanlorenzi

Anno Accademico 2009-2010



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Equazioni del moto ed equilibri</b>	<b>3</b>
1.1 Moto dei due primari . . . . .	3
1.2 Lagrangiana del problema . . . . .	5
1.3 Equilibri . . . . .	7
1.4 Spazio delle fasi esteso . . . . .	9
<b>2 Stabilità delle orbite periodiche</b>	<b>11</b>
2.1 Mappa di Poincaré . . . . .	11
2.2 Stabilità delle orbite periodiche . . . . .	13
2.3 Teoria di Floquet . . . . .	16
<b>3 Stabilità di <math>\mathcal{L}_4</math></b>	<b>19</b>
3.1 Struttura della matrice di monodromia . . . . .	19
3.2 Calcolo della matrice di monodromia . . . . .	21
3.2.1 Ottimizzazione del calcolo . . . . .	23
3.3 Regioni di stabilità lineare . . . . .	24
<b>A Codice per il calcolo della stabilità</b>	<b>27</b>



# Introduzione

Il problema dei tre corpi ristretto può essere enunciato come segue:

*Due punti materiali, detti primari, si muovono nello spazio su un'orbita Kepleriana. Un terzo punto  $P$  di massa trascurabile rispetto agli altri due, detto planetario, si muove sotto l'azione della forza Newtoniana esercitata dai primari, senza influenzarne il movimento. Si chiede di studiare la dinamica del punto  $P$ .*

L'argomento di questa tesi è la stabilità lineare dei punti di equilibrio triangolari per il problema ristretto ellittico piano, nel quale i primari si muovono su un'orbita ellittica e il planetario si muove sul piano di tale orbita. Tale problema rappresenta la naturale generalizzazione del caso circolare e permette un'applicabilità più vasta nei casi reali. A differenza del caso circolare, nel caso ellittico la Lagrangiana dipende esplicitamente dal tempo; l'integrale di Jacobi viene quindi a mancare rendendone più difficile l'analisi. Il problema è stato affrontato da diversi autori negli anni 1960-1970 con tecniche analitico-numeriche: Danby [5] e Bennet [4], hanno studiato la stabilità lineare tramite la teoria di Floquet, Alfried [1], ha ottenuto regioni di stabilità compatibili con quelle dei lavori precedenti facendo uso di metodi perturbativi. Markeev [8] ne ha identificato le regioni di risonanza parametrica. In questa tesi si sono ricercate le zone di stabilità lineare per mezzo della mappa di Poincaré. Come si vedrà tale approccio porta agli stessi risultati dei lavori di Danby e Bennet, ma fornisce una giustificazione più chiara delle equazioni che saranno prese in esame per lo studio degli equilibri triangolari. Vale la pena ricordare infine che né il caso circolare, né quello ellittico sono integrabili.

La struttura della tesi è la seguente: nel primo capitolo si ricaverà la Lagrangiana del sistema, facendo vedere che in un sistema di riferimento roto-pulsante continuano ad esistere gli equilibri triangolari del caso circolare. Successivamente si ricaveranno le equazioni del moto, che dipenderanno esplicitamente dal tempo. Si studierà poi l'apparato teorico necessario allo studio della stabilità degli equilibri triangolari. Le equazioni del moto verranno riscritte nello spazio delle fasi esteso (dove all'equilibrio corrisponderà un'orbita periodica) e per verificarne la stabilità si sfrutterà la mappa

di Poincaré. Nell'ultimo capitolo infine si studierà la stabilità dei punti triangolari in funzione dei due parametri del moto: l'eccentricità dell'orbita e il rapporto tra le due masse dei primari. I risultati saranno essenzialmente di carattere numerico. In Appendice sono riportate le principali procedure del codice sviluppato.

# Capitolo 1

## Equazioni del moto ed equilibri

Come accennato nell'introduzione, ci si sposterà in un sistema di riferimento rotopulsante. La Lagrangiana dipenderà esplicitamente dal tempo, ma si farà vedere che le equazioni degli equilibri sono le stesse del caso circolare a meno di un ininfluyente fattore dipendente dal tempo.

### 1.1 Moto dei due primari

Nel problema ristretto dei tre corpi il planetoido si muove nel campo gravitazionale creato dai due primari, che si muovono su un'orbita Kepleriana circolare (“problema circolare”) o ellittica (“problema ellittico”). Ricordiamo innanzitutto alcuni risultati sul moto Kepleriano che ci saranno utili in seguito.

Indicate con  $q_A, q_B \in \mathbb{R}^3$  le posizioni dei due primari di masse rispettivamente  $m_A, m_B$ , le equazioni del moto per il problema dei due corpi in un riferimento inerziale sono

$$\begin{cases} m_A \ddot{q}_A = G \frac{m_A m_B}{\|q_B - q_A\|^3} (q_B - q_A) \\ m_B \ddot{q}_B = -G \frac{m_A m_B}{\|q_B - q_A\|^3} (q_B - q_A) \end{cases} \quad (1.1)$$

Introducendo le coordinate del centro di massa (vedi figura 1.1)

$$\begin{cases} R = \frac{m_A q_A + m_B q_B}{M} \\ q = q_B - q_A \end{cases} \quad \text{con inverse} \quad \begin{cases} q_A = R - \frac{m_B}{M} q \\ q_B = R + \frac{m_A}{M} q \end{cases}$$

il sistema (1.1) diventa

$$\begin{cases} \mu \ddot{q} = -G \frac{M \mu}{r^3} q \\ \ddot{R} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

dove  $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$  e  $M = m_A + m_B$ . Dalla prima equazione di (1.2) osserviamo allora che, in un sistema di riferimento inerziale nel quale il centro di massa è in quiete, il moto dei due primari è dato da

$$q_A(t) = \mu_B q(t), \quad q_B(t) = -\mu_A q(t)$$

(ove  $\mu_{A,B} = m_{A,B}/M$ ) e  $q(t)$  evolve come nel problema di Kepler per un corpo di massa  $\mu$  nel campo generato da un corpo di massa  $M$  posto nell'origine.

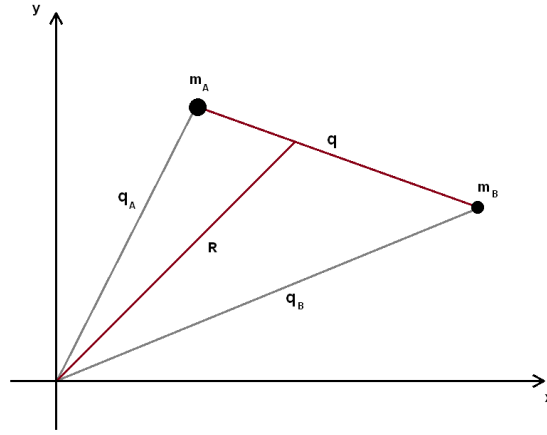


Figura 1.1: Rappresentazione grafica delle coordinate del centro di massa.

Quest'ultimo problema ha per soluzione le cosiddette “orbite Kepleriane” (vedi per esempio [7]): Il corpo si muove su una conica, in particolare su un'ellisse se l'energia è negativa. In coordinate polari  $(r, f) \in R_+ \times S^1$  nel piano della traiettoria, la funzione  $t \mapsto (r_t, f_t)$  soddisfa le seguenti relazioni:

$$r_t = \frac{c^2}{1 + e \cos f_t} \quad (1.3)$$

$$\frac{df_t}{dt} = \frac{k}{c^3} (1 + e \cos f_t)^2 = \frac{ck}{r_t^2} \quad (1.4)$$

$$\frac{d^2 r_t}{dt^2} = r_t \left( \frac{df_t}{dt} \right)^2 - \frac{r_t^2}{c^2} \left( \frac{df_t}{dt} \right)^2 = \frac{(ck)^2}{r_t^3} - \frac{k^2}{r_t^2} \quad (1.5)$$

dove abbiamo posto  $k = \sqrt{GM}$  e, nella prima, assunto  $f_0 = 0$ .  $c^2$  viene chiamato *parametro* dell'ellisse ed  $e$ ,  $0 \leq e < 1$ , *eccentricità*.  $f$  è l'angolo tra pericentro (il punto di distanza minima tra orbita e centro della forza) e posizione del corpo e prende il nome



di *anomalia vera*. Poiché  $\dot{f}_t > 0$  è possibile riarammetrizzare i moti con l'anomalia vera  $f$  (pensata a valori sul rivestimento  $\mathbb{R}$  di  $\mathbb{S}^1$ ). I moti dei primari sono allora descritti da

$$q_A(f) = \mu_B q(f), \quad q_B(f) = -\mu_A q(f), \quad (1.6)$$

(dove  $\mu_{A,B} = m_{A,B}/M$ ). Passiamo ora allo studio del problema dei tre corpi ristretto.

## 1.2 Lagrangiana del problema

Studiamo il problema dei tre corpi ellittico ristretto piano, ovvero nel caso in cui il planettoide sia anch'esso contenuto nel piano individuato dai due primari. La Lagrangiana del problema è

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m\|\dot{q}\|^2 + \frac{Gmm_A}{\|q - q_A(t)\|} + \frac{Gmm_B}{\|q - q_B(t)\|}, \quad (1.7)$$

dove  $q \in \mathbb{R}^2, \dot{q} \in \mathbb{R}^2$  sono i vettori posizione e velocità del planettoide e  $q_A(t) \in \mathbb{R}^2, q_B(t) \in \mathbb{R}^2$  sono le posizioni dei primari all'istante  $t$ , di masse rispettivamente  $m_A, m_B$ . Come nella sezione 1.1 indicheremo con  $r_t$  ed  $f_t$  la distanza relativa e l'anomalia vera dei primari all'istante  $t$ .

Per lo studio del problema è conveniente (vedi [10]) utilizzare delle coordinate nelle quali i primari siano in quiete; questo si ottiene passando a un sistema rotante, non uniformemente, e riscalando le coordinate di un fattore  $1/r_t$  in modo da mantenere costante (e uguale a uno) la distanza tra i due primari. Indicando con  $Q$  le coordinate del nuovo sistema, si tratta quindi di applicare la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$q = r_t R_t Q \quad \text{con} \quad R_t = \begin{pmatrix} \cos f_t & -\sin f_t \\ \sin f_t & \cos f_t \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Come fatto in precedenza, indicheremo con  $\mu_A$  e  $\mu_B$  le masse ridotte dei primari  $A$  e  $B$ .

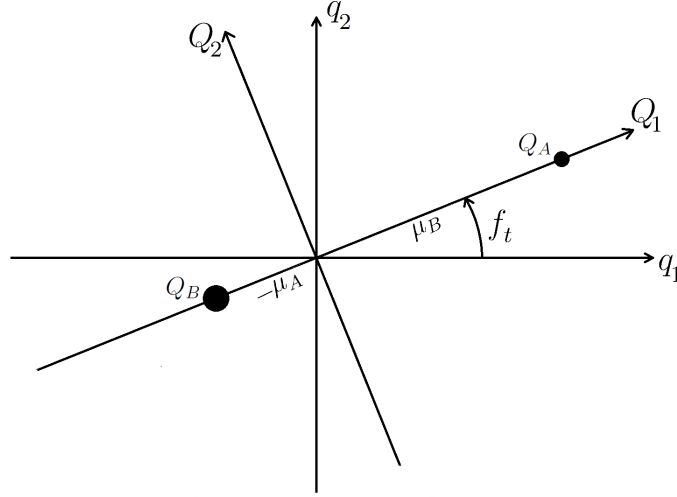


Figura 1.2: Posizione dei primari nel sistema roto-pulsante.

**Proposizione 1.2.1.** *Sia  $r_t$ , data da (1.3). Nel sistema di coordinate dipendente dal tempo (1.8) il problema ristretto ellittico dei tre copri (1.7) è descritto dalla Lagrangiana*

$$L(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} r_t^2 \|\dot{Q}\|^2 + ck Q \cdot \mathbb{J} \dot{Q} - \frac{k^2}{r_t} \left[ V(Q) - \frac{1}{2} \|Q\|^2 \right], \quad (1.9)$$

ove  $\mathbb{J}$  indica la matrice simplettica

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$V(Q) = -\frac{\mu_A}{d_A(Q)} - \frac{\mu_B}{d_B(Q)} \quad (1.10)$$

$$d_A(Q) = \|Q - Q_A\| = \sqrt{(Q_1 - \mu_B)^2 + Q_2^2}$$

$$d_B(Q) = \|Q - Q_B\| = \sqrt{(Q_1 + \mu_A)^2 + Q_2^2}.$$

**Dimostrazione.** Osserviamo anzitutto che in questo sistema di riferimento i due primari assumono le coordinate

$$Q_A = (\mu_B, 0) \quad Q_B = (-\mu_A, 0).$$

Applicata la trasformazione (1.8) la Lagrangiana (1.7) diventa (dopo aver eliminato l'inessenziale fattore  $m$ )

$$L(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} \left[ r_t^2 \|\dot{Q}\|^2 + (r_t^2 + r_t^2 f_t^2) \|Q\|^2 + 2r_t \dot{r}_t Q \cdot \dot{Q} + 2r_t^2 \dot{f}_t Q \cdot \mathbb{J} \dot{Q} \right] - \frac{1}{r} k^2 V(Q)$$

dove  $V(Q)$  è dato da (1.10). La Lagrangiana ottenuta è equivalente ad una più semplice. Se inseriamo il differenziale totale

$$\frac{d}{dt} [r\dot{r}\|Q\|^2] = \dot{r}^2\|Q\|^2 + r\ddot{r}\|Q\|^2 + 2r\dot{r}Q \cdot \dot{Q}$$

nella Lagrangiana, vediamo che i termini  $\dot{r}_t^2\|Q\|^2$  e  $2r_t\dot{r}_tQ \cdot \dot{Q}$  si possono sostituire con  $-r\ddot{r}\|Q\|^2$ . Si giunge così a

$$L(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} \left[ r_t^2 \|\dot{Q}\|^2 + 2r_t^2 \dot{f}_t Q \cdot \mathbb{J}\dot{Q} + (r_t^2 \dot{f}_t - r_t \ddot{r}_t) \|Q\|^2 \right] - \frac{1}{r} k^2 V(Q).$$

Infine, sfruttando le relazioni (1.4) e (1.5), troviamo

$$L(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} r_t^2 \|\dot{Q}\|^2 + ck Q \cdot \mathbb{J}\dot{Q} - \frac{k^2}{r_t} \left[ V(Q) - \frac{1}{2} \|Q\|^2 \right].$$

□

### 1.3 Equilibri

Le configurazioni di equilibrio del sistema di Lagrangiana (1.9) sono i punti  $Q \in \mathbb{R}^2$  tali che  $\frac{\partial L}{\partial Q}(Q, 0, t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ , ovvero, poiché il fattore positivo  $\frac{k^2}{r_t}$  dipende solo da  $t$ , essi sono i punti critici della funzione  $V(Q) - \frac{1}{2}\|Q\|^2$ :

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left[ V(Q) - \frac{1}{2} \|Q\|^2 \right] = 0. \quad (1.11)$$

Le configurazioni di equilibrio sono dunque indipendenti dall'eccentricità, e sono le stesse del problema circolare. Per completezza mostriamo che, come è ben noto, queste configurazioni di equilibrio sono i tre punti “collineari” e i due punti “triangolari” (vedi figura 1.3).

**Proposizione 1.3.1.** *La Lagrangiana (1.9) ha cinque configurazioni di equilibrio:*

1.  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ , detti punti di Eulero, che giacciono sull'asse  $Q_1$  passante per i primari.
2.  $\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5$ , detti punti di Lagrange o punti triangolari, che hanno coordinate

$$\mathcal{L}_4 = (Q_1^{\mathcal{L}_4}, Q_2^{\mathcal{L}_4}) = \left( \frac{1}{2} - \mu_A, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \mathcal{L}_5 = (Q_1^{\mathcal{L}_4}, -Q_2^{\mathcal{L}_4}). \quad (1.12)$$

**Dimostrazione**<sup>1</sup>. Per ricercare i punti critici della funzione

$$V^*(Q) = -\frac{1}{2}\|Q\|^2 + V(Q)$$

possiamo osservare che  $Q \mapsto d(Q) = (d_A(Q), d_B(Q))$  è un diffeomorfismo locale per ogni  $Q$  con  $Q_2 \neq 0$ . Quindi nel caso di equilibri con  $Q_2 \neq 0$ , si può studiare

$$\tilde{V}^*(d) = -\frac{1}{2}\|d\|^2 + V(d),$$

con

$$V(d) = -\frac{\mu_A}{d_A} - \frac{\mu_B}{d_B}.$$

Calcolato

$$\|Q\|^2 = d_A^2\mu_A + d_B^2\mu_B - \mu_A\mu_B$$

allora

$$\frac{\partial \tilde{V}^*}{\partial d}(d) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d_A - \frac{1}{d_A^2} = 0 \\ d_B - \frac{1}{d_B^2} = 0 \end{cases},$$

sistema che ammette soluzione solo per  $d_A = d_B = 1$ . Questi sono i due equilibri triangolari. Consideriamo ora il caso in cui  $Q_2 = 0$ . Poiché

$$\frac{\partial V^*}{\partial Q_2}(Q_1, 0) = 0 \quad \forall Q_1 \in \mathbb{R}$$

gli equilibri con  $Q_2 = 0$  coincidono con i punti critici della funzione  $Q_1 \mapsto V^*(Q_1, 0)$ . Dal momento che

$$V^*(Q_1, 0) = \frac{1}{2}Q_1^2 + \frac{\mu_A}{|Q_1 - \mu_B|} + \frac{\mu_B}{|Q_1 + \mu_A|}$$

è continua per ogni  $Q_1 \in \mathbb{R} \setminus \{-\mu_A, \mu_B\}$  e

$$\lim_{Q_1 \rightarrow \pm\infty} V^*(Q_1, 0) = +\infty$$

$$\lim_{Q_1 \rightarrow -\mu_A} V^*(Q_1, 0) = +\infty$$

$$\lim_{Q_1 \rightarrow \mu_B} V^*(Q_1, 0) = +\infty$$

---

<sup>1</sup>Questa dimostrazione ricalca il cap 1.2 di [3]

concludiamo che  $V^*$  ha almeno un punto critico in ogni intervallo  $] -\infty, -\mu_A[$ ,  $] -\mu_A, \mu_B[$ ,  $] \mu_B, +\infty[$ . Ma in ognuno di questi intervalli vale

$$\frac{d^2V^*}{dQ_1^2}(Q_1, 0) = 1 + \frac{\mu_A}{|Q_1 + \mu_B|^3} + \frac{\mu_B}{|Q_1 + \mu_A|^3} > 0.$$

Quindi  $V^*$  è convessa in ogni intervallo e possiamo dedurre che essa ammette esattamente tre punti critici  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$   $\square$

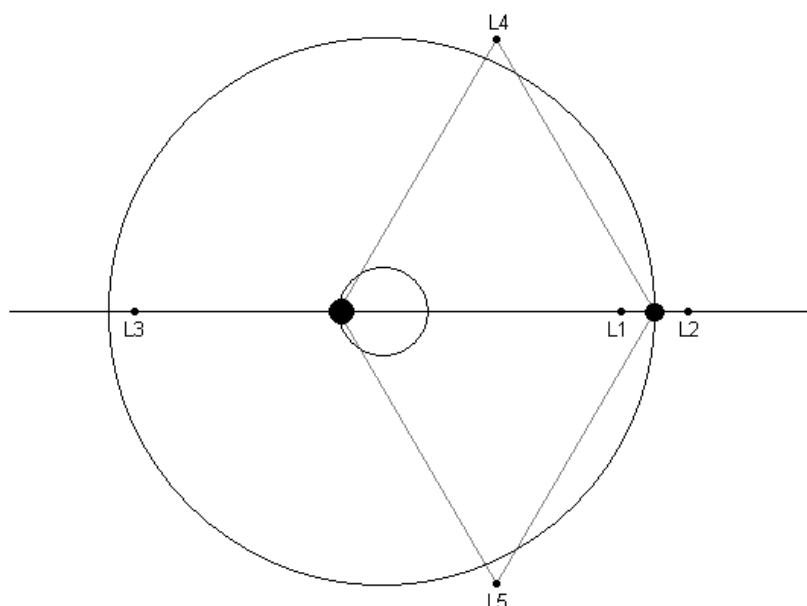


Figura 1.3: Rappresentazione grafica degli equilibri nel sistema roto-pulsante.

## 1.4 Spazio delle fasi esteso

Dunque, nel problema ristretto ellittico, le soluzioni “collineari” e “triangolari” appaiono come equilibri nel sistema di riferimento roto-pulsante. Esse sono dunque equilibri di un sistema di quattro equazioni differenziali che dipendono periodicamente dal tempo. Per studiarne la stabilità è conveniente passare allo spazio delle fasi esteso, nel quale è aggiunta una coordinata temporale, e riguardarli come soluzioni periodiche di un sistema di cinque equazioni differenziali. In realtà, sfruttando la parametrizzabilità

dei moti Kepleriani per mezzo dell'anomalia vera (vedi sezione 1.1), conviene anche qui utilizzare come variabile indipendente (e dunque come coordinata nello spazio delle fasi esteso) non il tempo, ma la anomalia vera dei primari.

**Proposizione 1.4.1.** *Le equazioni del moto per la Lagrangiana (1.9), usando come variabile indipendente l'anomalia vera  $f$  sono*

$$\ddot{Q} - 2\mathbb{J}\dot{Q} = \frac{1}{1 + e \cos f} \left[ Q - \frac{\partial V(Q)}{\partial Q} \right], \quad (1.13)$$

dove il punto denota la derivata rispetto ad  $f$ .

**Dimostrazione.** Le equazioni di Lagrange per la Lagrangiana (1.9) sono

$$r_t^2 \ddot{Q} + 2r_t \dot{r}_t \dot{Q} - 2ck\mathbb{J}\dot{Q} - \frac{k^2}{r_t} \left[ Q - \frac{\partial V(Q)}{\partial Q} \right] = 0. \quad (1.14)$$

Poniamo  $Q(t) = \tilde{Q}(f(t))$  e denotiamo con l'apice la derivata rispetto ad  $f$ . Allora  $\dot{Q} = \dot{f}\tilde{Q}'$ ,  $\ddot{Q} = \dot{f}^2\tilde{Q}'' + \ddot{f}\tilde{Q}'$  e (1.14) diviene

$$r^2 \dot{f}^2 \tilde{Q}'' + (r^2 \ddot{f} + 2r\dot{r}\dot{f})\tilde{Q}' - 2ck\dot{f}\mathbb{J}\tilde{Q}' - \frac{k^2}{r} \left[ \tilde{Q} - \frac{\partial V}{\partial \tilde{Q}}(\tilde{Q}) \right] = 0.$$

Poiché  $\dot{f} = \frac{ck}{r^2}$ , vedi (1.4), il coefficiente di  $\tilde{Q}'$  nel secondo addendo, che si può scrivere come  $\frac{d}{dt}(r^2\dot{f})$ , è nullo (conservazione del momento angolare) e l'equazione si può riscrivere

$$\frac{c^2 k^2}{r^2} \left[ \tilde{Q}'' - 2\mathbb{J}\tilde{Q}' - \frac{r}{c^2} \left( \tilde{Q} - \frac{\partial V}{\partial \tilde{Q}}(\tilde{Q}) \right) \right] = 0$$

che è equivalente a (1.13).  $\square$

Come già sottolineato, per il successivo studio della stabilità è conveniente riscrivere le equazioni del moto come equazioni del primo ordine nello spazio delle fasi esteso  $(Q, W, \tau) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = W_1 \\ \dot{Q}_2 = W_2 \\ \dot{W}_1 = 2W_2 + \frac{1}{1+e \cos \tau} \left[ Q_1 - \frac{\partial V}{\partial Q_1}(Q) \right] \\ \dot{W}_2 = -2W_1 + \frac{1}{1+e \cos \tau} \left[ Q_2 - \frac{\partial V}{\partial Q_2}(Q) \right] \\ \dot{\tau} = 1 \end{cases} \quad (1.15)$$

In questo sistema l'equilibrio viene trasformato in un'orbita periodica, di cui ne studieremo la stabilità lineare. Anche in questo caso (come in quello circolare) i punti collineari continuano ad essere instabili; per maggiori dettagli al riguardo si rimanda al lavoro di Bennet [4]. Ci limiteremo dunque ai punti triangolari.

# Capitolo 2

## Stabilità delle orbite periodiche

Descriviamo in questo capitolo l'apparato matematico per lo studio della stabilità di un'orbita periodica. A favore di un'esposizione più soddisfacente si tratterà il problema con più generalità di quanto sia realmente necessario ai nostri scopi. Come visto nella sezione 1.4, nello spazio delle fasi esteso gli equilibri del sistema roto-pulsante vengono trasformati in orbite periodiche. In tutto questo capitolo considereremo un sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n), \quad (2.1)$$

con  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, e ne denoteremo con  $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$  il flusso. Come usuale, confonderemo spesso le soluzioni con le loro orbite.

**Definizione 2.0.1.** *Un'orbita  $\gamma$  è detta (Lyapunov) stabile se per ogni intorno  $U$  di  $\gamma$  esiste un altro intorno  $V \subseteq U$  di  $\gamma$  tale che ogni soluzione che parte da  $V$  resta confinata in  $U$  per ogni  $t \geq 0$ . Un'orbita  $\gamma$  è detta asintoticamente stabile se è stabile ed inoltre esiste un intorno  $U$  di  $\gamma$  tale che*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), \gamma) = 0$$

*per ogni soluzione  $\varphi(t, x)$  con dato iniziale in  $U$ . Un'orbita è detta instabile se non è stabile.*

Per l'analisi della stabilità delle orbite periodiche uno strumento molto utile è la mappa di Poincaré, che andiamo a descrivere.

### 2.1 Mappa di Poincaré

Nello studio della stabilità di un'orbita periodica Poincaré sviluppò la seguente idea (vedi figura 2.1): scelta una superficie  $\Sigma$  che interseca trasversalmente l'orbita periodica,

i punti di intersezione tra le orbite e  $\Sigma$  definiscono una mappa  $P : \Sigma \mapsto \Sigma$ , detta mappa di Poincaré, della quale l'orbita periodica è un punto fisso. Il problema della stabilità delle orbite periodiche viene quindi spostato allo studio della stabilità dei punti fissi delle loro mappe di Poincaré. Per una descrizione più formale di tale mappa esponiamo il seguente

**Lemma 2.1.1.** *Sia dato  $x_0 \in M$  e  $T > 0$ . Sia  $\Sigma$  una sottovarietà<sup>1</sup> differenziabile di codimensione uno contenente il punto  $\varphi(T, x_0)$  e trasversa<sup>2</sup> al campo  $f$ . Allora esistono un intorno  $U$  di  $x_0$  e una funzione  $\tau \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  tali che  $\tau(x_0) = T$  e*

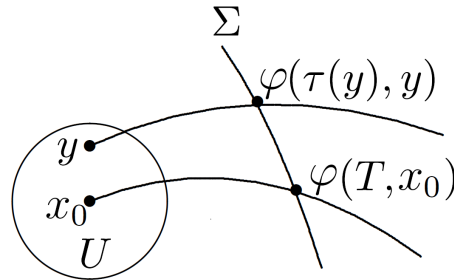
$$\varphi(\tau(y), y) \in \Sigma \quad (2.2)$$

per ogni  $y \in U$ .

**Dimostrazione.** Consideriamo l'equazione  $S(\varphi(t, y)) = 0$ , che è soddisfatta da  $(t, y) = (T, x_0)$ . Poiché  $S$  è trasversa ad  $f$  vale

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} S(\varphi(t, x_0)) \right|_{t=T} = \frac{\partial S}{\partial x}(\varphi(T, x_0)) f(\varphi(T, x_0)) \neq 0.$$

Allora per il teorema della funzione implicita esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  ed una funzione  $\tau \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  tale che per ogni  $y \in U$  si ha  $S(\varphi(\tau(y), y)) = 0$ ; ovvero  $\varphi(\tau(y), y) \in \Sigma$ .  $\square$



Nel caso in cui l'orbita di  $x_0$  sia periodica, di periodo  $T$ , allora si può applicare il lemma ad una sottovarietà  $\Sigma$  che contiene  $x_0$  stesso. Posto  $\Sigma' = \Sigma \cap U$  è allora definita una mappa

$$P : \Sigma' \subset \Sigma \mapsto \Sigma, \quad P(y) = \varphi(\tau(y), y).$$

<sup>1</sup>Ricordiamo che un insieme  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  viene detto *sottovarietà* di codimensione uno se può essere scritto come  $\Sigma = \{x \in U : S(x) = 0\}$  dove  $U \subset \mathbb{R}^n$  aperto,  $S \in C^\infty(U)$  e  $\frac{\partial S}{\partial x}(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \Sigma$ .

<sup>2</sup>Una sottovarietà  $\Sigma$  si dice *trasversa* al campo vettoriale  $f$  se  $\frac{\partial S}{\partial x}(x) \cdot f(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \Sigma$ .



Si viene detta *mappa di Poincaré* e si può dimostrare [6] che essa è un diffeomorfismo. Nelle prossime sezioni focalizzeremo l'attenzione sulla *mappa di Poincaré linearizzata*: con tale espressione ci riferiamo alla matrice  $DP(\bar{x}) : T_{\bar{x}}\Sigma \rightarrow T_{\bar{x}}\Sigma$ , dove  $\bar{x}$  identifica il punto di intersezione tra l'orbita periodica e la superficie  $\Sigma$ , definita da

$$DP(\bar{x}) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(T, \bar{x}) + f_i(\varphi(T, \bar{x})) \frac{\partial \tau}{\partial y_j}(\bar{x}). \quad (2.3)$$

Concludiamo notando che tale generalità nella definizione della mappa non era necessaria per lo studio del sistema (1.13): nel nostro caso basta prendere come superficie  $\Sigma$  il piano  $\tau = 0$ ; la mappa agirà da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^4$  e la funzione  $\tau(y)$  introdotta nel lemma precedente sarà semplicemente  $\tau(y) = 2\pi$  per ogni punto della mappa.

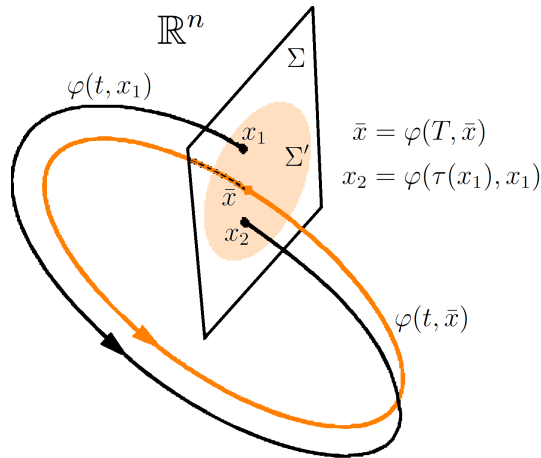


Figura 2.1: Rappresentazione grafica della mappa di Poincaré.

## 2.2 Stabilità delle orbite periodiche

Enunciamo in questa sezione alcuni teoremi fondamentali per lo studio della stabilità di un'orbita periodica in termini della sua mappa di Poincaré. Le nozioni di stabilità, stabilità asintotica ed instabilità di un punto fisso di una mappa sono definite in modo analogo a quelle per un equilibrio di un'equazione differenziale.

**Teorema 2.2.1.** *Sia  $\gamma = \varphi(t, \bar{x})$  soluzione periodica di (2.1) che interseca  $\Sigma$  nel punto  $\bar{x}$ . Allora  $\gamma$  è stabile, asintoticamente stabile, instabile se e solo se  $\bar{x}$  è punto fisso stabile, asintoticamente stabile, instabile per la mappa  $P_\Sigma$ .*

**Dimostrazione.** Supponiamo  $\bar{x}$  punto fisso stabile di  $P_\Sigma$ . Sia  $U$  intorno di  $\gamma$ . Sia inoltre  $\tilde{U} \subseteq U \cap \Sigma$  intorno di  $\bar{x}$  in  $\Sigma$  tale che  $\varphi([0, T], \tilde{U}) \subseteq U$ . Esiste  $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$  tale che  $y_n = P_\Sigma^n(y) \in \tilde{U}$  per ogni  $y \in \tilde{V}$ . Ma allora  $\varphi([0, T], \tilde{V})$  è un insieme di soluzioni contenuto in  $V \subseteq U$ . Se  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile inoltre  $y_n \rightarrow \bar{x}$  e allora  $\varphi(t, y) \rightarrow \varphi(t, \bar{x})$  al crescere di  $n$  per ogni  $y$  in un intorno di  $\bar{x}$ . Se  $\bar{x}$  è punto fisso instabile allora esiste  $y_n \notin \tilde{U}$  con  $y \in \tilde{U}$ . Allora  $\varphi(t, y)$  non è contenuta in  $U$ . I viceversa sono banali.  $\square$

Per la stabilità dei punti fissi di mappe valgono teoremi analoghi ai teoremi di Lyapunov per gli equilibri di un'equazione differenziale (vedi [11]). In particolare si ha il seguente analogo del primo metodo (o teorema spettrale) di Lyapunov:

**Teorema 2.2.2.** *Supponiamo che  $f \in C^\infty$  abbia un'orbita periodica  $\gamma$ . Se tutti gli autovalori della mappa di Poincaré linearizzata sono interni al circolo unitario allora l'orbita è asintoticamente stabile. Se uno di essi è esterno al circolo unitario allora l'orbita è instabile.*

Per lo studio della stabilità occorre dunque determinare  $DP(\bar{x})$ . L'espressione data in (2.3) non è però agevole da calcolare direttamente. Precisamente, abbiamo bisogno di determinare gli autovalori di tale matrice. Come ora andiamo a dimostrare, essi possono essere ricavati per mezzo della “matrice di monodromia” (dell'orbita periodica relativa alla sezione  $\Sigma$ ), che è, per definizione,

$$D\varphi(T, \bar{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, \bar{x}). \quad (2.4)$$

**Teorema 2.2.3.** *Gli  $n$  autovalori di  $D\varphi(T, \bar{x})$  sono  $\lambda = 1$  e gli  $n - 1$  autovalori di  $DP(\bar{x})$  (ciascuno ripetuto tante volte quante la sua molteplicità algebrica).*

**Dimostrazione.** Consideriamo la funzione  $\Psi : U \rightarrow \Psi(U)$  definita da  $\Psi(x) = \varphi(\tau(x), x)$ , con  $U$  intorno di  $\bar{x}$  in  $\mathbb{R}^n$ . La mappa di Poincaré sarà la restrizione di  $\Psi$  a  $\Sigma$ , ovvero  $P : \Psi|_\Sigma : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ , con  $\Sigma' = \Sigma \cap U$ . Per il *teorema di rettificazione*<sup>3</sup> si possono introdurre le coordinate  $(u, s)$ , con  $s = (s_1, \dots, s_{n-1})$  in un intorno  $U$  di

<sup>3</sup>**Teorema di Rettificazione.** Sia  $\bar{x}$  un punto nel quale  $f(\bar{x}) \neq 0$ . Allora esiste un intorno di  $\bar{x}$  munito di coordinate  $y = (y_1, \dots, y_n)$  nelle quali l'equazione differenziale  $\dot{x} = f(x)$  si scrive:

$$\dot{y}_1 = 1, \dot{y}_2 = 0, \dots, \dot{y}_n = 0$$

e dunque il suo flusso è dato da

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) \mapsto (y_1 + t, y_2, \dots, y_n).$$

$\bar{x}$ , tali che  $f = (1, 0, \dots, 0)$ . Poiché  $\Sigma'$  è trasversale ad  $f$ , cioè all'asse  $u$ , in queste coordinate  $\Sigma'$  è il grafico di una funzione  $s \mapsto \tilde{u}(s)$ . Allora nel sistema di coordinate  $(u, s) \mapsto (u, s - \tilde{u}(s))$  (che continueremo ad indicare con  $(u, s)$ )  $\Sigma'$  è la superficie individuata dall'equazione  $u = 0$ , con  $f(u, s) = (1, 0)$ . Siano  $(u = 0, \bar{s})$  le coordinate di  $\bar{x}$ . Il flusso di  $f(u, s)$  per  $(t, (u, s))$  in un intorno di  $(0, (0, \bar{s}))$  è dato da

$$\varphi(t, (u, s)) = (u + t, s).$$

A questo punto diventa facile dimostrare l'asserto: innanzitutto osserviamo che, in queste coordinate, la mappa di Poincaré è rappresentata da una mappa  $s \mapsto p(s)$ . Resta da calcolare  $D\varphi(T, \bar{x})$ , e per farlo determiniamo la mappa  $x \mapsto \varphi(t, x)$ . Per la proprietà di gruppo del flusso si ha

$$\tau(u, s) = \tau(0, s) - u$$

e poiché dopo un tempo  $\tau(x)$  l'orbita di un punto  $x \in U$  interseca  $\Sigma$ , e quindi riattraversa  $U$ , per  $(t, (u, s))$  in un intorno di  $(T, (0, \bar{s}))$  si ha

$$\varphi(t, (u, s)) = (t - \tau(u, s), p(s)) = (t + u - \tau(0, s), p(s)).$$

Allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t, (u, s)) &= (1, 0), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, (u, s)) &= \left( -\frac{\partial \tau}{\partial s}(0, s), \frac{\partial p}{\partial s}(s) \right), \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (u, s)}(u, s) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & -\frac{\partial \tau}{\partial s}(0, s) \\ \hline 0 & \frac{\partial p}{\partial s}(s) \end{array} \right).$$

□

Grazie al teorema precedente, il problema di calcolare gli autovalori della mappa di Poincaré linearizzata  $DP(\bar{x})$  è ricondotto a quello di determinare la matrice di monodromia  $D\varphi(T, \bar{x})$ . Per questa ragione, si userà il fatto ben noto che la matrice Jacobiana  $t \mapsto D\varphi(t, \bar{x})$  soddisfa la cosiddetta "equazione alle variazioni"

$$\frac{d}{dt} D\varphi(t, \bar{x}) = Df(\varphi(t, \bar{x})) D\varphi(t, \bar{x}) \quad (2.5)$$

ove  $Df = \partial f / \partial x$ . Nota (analiticamente o numericamente) la soluzione periodica  $t \mapsto \varphi(t, \bar{x})$ , (2.5) è un'equazione differenziale lineare a coefficienti dipendenti periodicamente dal tempo per  $t \mapsto D\varphi(t, \bar{x}) \in L(n)$ , che può essere risolta, se non analiticamente,

almeno numericamente.

**Matrice di monodromia.** Spieghiamo un po' più nel dettaglio la genesi di tale matrice. L'equazione (2.5) è un'equazione del tipo

$$\dot{Y} = A(t)Y, \quad Y \in L(n), \quad (2.6)$$

con  $A(t+T) = A(t)$  matrice continua per ogni  $t$ . Siccome l'equazione è lineare, dati  $t_0$  e  $t$ , esiste una matrice  $M_{t_0,t}$  tale che, qualunque sia il dato iniziale  $Y_0$ , la soluzione  $Y(t, t_0, Y_0)$  (ovvero  $Y(t_0, t_0, Y_0) = Y_0$ ) è esprimibile come

$$M_{t_0,t}Y_0. \quad (2.7)$$

La matrice  $M_{t_0,t_0+T}$  si chiama *matrice di monodromia dell'equazione (2.6) relativa all'istante  $t_0$* .

Osserviamo che gli autovalori della matrice di monodromia non dipendono da  $t_0$ : se  $M_{t,t_0}$  e  $M_{t,t_1}$  sono due matrici fondamentali allora esiste una matrice  $U$  tale che  $M_{t,t_1} = M_{t,t_0}U$ . Sfruttando la proprietà di gruppo del flusso ricaviamo che

$$M_{T,t_1} = M_{t,t_1}^{-1}M_{t+T,t_1} = U^{-1}M_{t,t_0}^{-1}M_{t+T,t_0}U = U^{-1}M_{T,t_0}U.$$

Quindi  $M_{T,t_1}$  è simile a  $M_{T,t_0}$ . Dunque gli spettri delle due matrici coincidono e dipendono solo dal sistema. Si può allora scegliere  $t_0 = 0$ ;  $M_{0,T}$  si chiama semplicemente *matrice di monodromia* di (2.6) e si denota con  $M_T$ .

In particolare, per  $Y_0 = \mathbb{I}$ , si ha  $Y(T, 0, \mathbb{I}) = M_T$ . Applicando questo fatto all'equazione alle variazioni, ed osservando che poichè  $\varphi(0, x) = id$  si ha  $D\varphi(0, \bar{x}) = \mathbb{I}$ , si conclude che la matrice di monodromia  $D\varphi(T, \bar{x})$  di un'orbita periodica coincide con la matrice di monodromia  $M_T$  della corrispondente equazione alle variazioni.

## 2.3 Teoria di Floquet

Inseriamo in questo capitolo una breve digressione sui metodi usati in [5], [4] per lo studio della stabilità. Vogliamo mostrare che le differenze tra l'approccio per mezzo di mappe di Poincaré e teoria di Floquet sono solo di carattere formale: da un punto di vista pratico i due metodi sono di fatto equivalenti.

Negli articoli sopra citati il punto di partenza per lo studio della stabilità sono le equazioni del campo linearizzate in  $\mathcal{L}_4$ . Queste equazioni costituiscono un sistema lineare periodico rispetto al tempo, per il quale è possibile sfruttare la teoria di Floquet. Il teorema cardine (per un'esposizione più rigorosa si può consultare [6]) assicura che

la matrice fondamentale  $\Phi(t)$ , con  $\Phi(0) = \mathbb{I}$ , di un sistema  $\dot{Y} = A(t)Y$ , dove  $A(t) = A(t+T)$  è matrice reale continua, può essere scritta nella forma

$$\Phi(t) = P(t) \exp(Bt), \quad (2.8)$$

con  $P(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  matrice regolare tale che  $P(t+T) = P(t)$ ,  $P(0) = \mathbb{I}$  e  $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  matrice costante. Tale teorema fornisce un cambiamento di coordinate in cui le equazioni sono indipendenti da  $t$ . È infatti sufficiente considerare la trasformazione  $y = P(t)z$ , con  $P(t) = \Phi(t) \exp(-Bt)$ : essa porta a considerare il sistema  $\dot{z} = P^{-1}(AP - \dot{P})z$ , ed osservato che

$$\begin{aligned} P^{-1}(AP - \dot{P}) &= \exp(Bt) \Phi^{-1} [A \Phi \exp(-Bt) - \dot{\Phi} \exp(-Bt) + \Phi B \exp(-Bt)] = \\ &= \exp(Bt) \Phi^{-1} \Phi B \exp(-Bt) = B, \end{aligned}$$

nelle nuove coordinate il sistema si riscrive come

$$\dot{z} = Bz.$$

Indicata con  $\Psi(t)$  la matrice fondamentale di tale sistema, è facile vedere che essa soddisfa  $\Psi(t+T) = \Psi(t)M_T$ , ove  $M_T$  indica la matrice di monodromia. Se allora gli autovalori di  $M_T$  sono tutti interni al circolo unitario si ha stabilità; in caso contrario, se almeno uno di essi è esterno, l'equilibrio sarà instabile.



# Capitolo 3

## Stabilità di $\mathcal{L}_4$

### 3.1 Struttura della matrice di monodromia

In questo capitolo applichiamo le tecniche del capitolo precedente allo studio della stabilità delle soluzioni periodiche del sistema (1.15) corrispondenti alle soluzioni triangolari  $\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5$  del problema ristretto ellittico piano (possiamo naturalmente, per ragioni di simmetria, limitarci al caso di  $\mathcal{L}_4$ ). Come abbiamo visto, sarà necessario calcolare la matrice di monodromia del problema. Il sistema (1.15) nello spazio delle fasi esteso ha dimensione 5, ma come ora mostriamo, grazie alla sua speciale dipendenza dalla coordinata  $\tau$ , è possibile restringersi ad un blocco  $4 \times 4$  della matrice di monodromia. Il restante autovalore della matrice di monodromia è 1.

Si tratta di determinare la matrice di monodromia per un sistema del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, \tau) \\ \dot{\tau} = 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

con soluzione periodica  $t \mapsto (\bar{x}, t)$  tale che

$$F(\bar{x}, \tau) = 0 \quad \forall \tau, \quad (3.2)$$

(ovviamente possiamo prendere un dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{\tau})$  per la soluzione periodica con  $\bar{\tau} = 0$ ). Al fine di determinare tale matrice adottiamo le coordinate  $(x, \tau)$  e indichiamo una soluzione  $\varphi(t, (x, \tau))$  con la notazione  $\varphi(t, (x, \tau)) = (\varphi_x(t, (x, \tau)), \varphi_\tau(t, \tau))$ , ove  $\varphi_\tau(t, \tau) = t + \tau$ . L'equazione alle variazioni relativa alla soluzione periodica  $t \mapsto (\bar{x}, t)$  è

$$\frac{d}{dt} (D_{(x,\tau)}\varphi)(t, (\bar{x}, 0)) = D_{(x,\tau)}f(\bar{x}, t)D_{(x,\tau)}\varphi(t, (\bar{x}, 0)).$$

La matrice Jacobiana  $D_{(x,\tau)}\varphi$  valutata lungo la soluzione periodica ha la struttura a blocchi

$$D_{(x,\tau)}\varphi(t, (\bar{x}, 0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_x}{\partial x}(t, (\bar{x}, \tau)) & \frac{\partial\varphi_x}{\partial\tau}(t, (\bar{x}, \tau)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La linearizzazione del campo vettoriale lungo la soluzione periodica è

$$D_{(x,\tau)}f(\varphi(t, (\bar{x}, 0))) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, t) & \frac{\partial F}{\partial\tau}(\bar{x}, t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

perché  $F(\bar{x}, \tau) = 0$  per ogni  $\tau$  implica  $\frac{\partial F}{\partial\tau}(\bar{x}, t) = 0$  per ogni  $t$ .

Ne segue che la matrice di monodromia dell'equazione alle variazioni ha la struttura

$$M_T = \begin{pmatrix} M_T^{xx} & M_T^{x\tau} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed i suoi autovalori sono 1 e gli autovalori del blocco  $M_T^{xx}$ , il quale è la matrice di monodromia dell'equazione alle variazioni  $\dot{x} = F(x, t)$  relativa all'orbita periodica  $t \mapsto \bar{x}$ .

Per studiare la stabilità di  $\mathcal{L}_4$  si tratta quindi di ricavare la matrice di monodromia al tempo  $T = 2\pi$  del sistema lineare (ottenuto linearizzando le equazioni (1.13))

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 - 2\dot{Q}_2 &= G(t) [\alpha Q_1 + \beta Q_2] \\ \ddot{Q}_2 + 2\dot{Q}_1 &= G(t) [\gamma Q_2 + \beta Q_1] \end{aligned} \quad (3.3)$$

con  $\alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\beta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - \mu_A\right)$ ,  $\gamma = \frac{9}{4}$ ,  $G(t) = \frac{1}{1+e \cos t}$ . Per delle ragioni che saranno chiare successivamente applichiamo a (3.3) il seguente cambiamento di coordinate (vedi [10])

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 \cos \eta - q_2 \sin \eta \\ Q_2 &= q_1 \sin \eta + q_2 \cos \eta \end{aligned}$$

dove

$$\tan(2\eta) = \sqrt{3}(1 - 2\mu_A).$$

In queste coordinate le equazioni linearizzate diventano

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 &= G(t) \alpha_1 q_1 \\ \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 &= G(t) \alpha_2 q_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

con

$$\alpha_{1,2} = \frac{3}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 3\mu_A(1 - \mu_A)} \right].$$



La matrice che compare nell'equazione alle variazioni del sistema  $\dot{x} = F(x, t)$ , scritto in queste coordinate è allora

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ G(t)\alpha_2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & G(t)\alpha_1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

## 3.2 Calcolo della matrice di monodromia

In questa sezione esponiamo un algoritmo per il calcolo numerico (vedi [6]) della matrice di monodromia per un generico sistema lineare dipendente periodicamente dal tempo

$$\dot{Y} = A(t)Y, \quad A(t) = A(t + T) \quad (3.6)$$

dove  $A(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , continua in  $t$ . Tale algoritmo verrà usato per la determinazione della matrice di monodromia relativa all'equilibrio  $\mathcal{L}_4$ . L'idea è quella di discretizzare la matrice  $A(t)$  suddividendo l'intervallo  $[0, T]$  in  $N$  intervalli  $[t_k, t_{k+1}[$  di lunghezza  $h = T/N$  e approssimare  $A(t)$  con le matrici costanti

$$A(t_k) \quad \text{per } t \in [t_k, t_{k+1}[ \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Per ogni  $k$ , ci troviamo quindi di fronte a un sistema lineare a coefficienti costanti

$$\dot{Y}_k = A(t_k)Y_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}[ \quad (3.7)$$

il cui flusso è dato dalla matrice  $\exp(tA(t_k))$ . Approssimiamo allora le soluzioni di (3.6) per mezzo della composizione

$$Y_h(t) := \exp((t - t_k)A(t_k)) \exp(hA(t_{k-1})) \cdots \exp(hA(t_0)) \quad \text{per } t \in [t_k, t_{k+1}[ \quad (3.8)$$

dove abbiamo aggiunto il pedice  $h$  alla matrice fondamentale per tenere a mente l'approssimazione.

**Proposizione 3.2.1.** *La matrice*

$$Y_h(T) = \exp(hA(t_{N-1})) \exp(hA(t_{N-2})) \cdots \exp(hA(t_0)),$$

*tende alla matrice di monodromia di (3.6) per  $h \rightarrow 0$ .*

**Dimostrazione.** Mostriamo che effettivamente  $Y_h(T) \rightarrow Y(T)$  per  $h$  che tende a zero. Integrando (3.6) e (3.7) con condizione iniziale  $Y(0) = \mathbb{I}$  otteniamo

$$Y(t) = \mathbb{I} + \int_0^t A(\tau)Y(\tau)d\tau,$$

$$Y_h(t) = \mathbb{I} + \int_0^t A_h(\tau)Y_h(\tau)d\tau,$$

dove  $A_h(\tau) = A(t_k)$  per  $\tau \in [t_k, t_{k+1}[$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ . Quindi per  $t \in [0, T[$ ,

$$Y_h(t) - Y(t) = \int_0^t (A_h(\tau) - A(\tau))Y_h(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau)(Y_h(\tau) - Y(\tau))d\tau.$$

Prendendone la norma ricaviamo la disuguaglianza

$$\|Y_h(t) - Y(t)\| \leq \int_0^t \|A_h(\tau) - A(\tau)\| \|Y_h(\tau)\|d\tau + \int_0^t \|A(\tau)\| \|Y_h(\tau) - Y(\tau)\|d\tau.$$

Sia  $M \geq \|A(t)\|$  per  $t \in [0, T]$ . Allora (3.8) è maggiorata da

$$\begin{aligned} \|Y_h(t)\| &\leq \exp(h\|A(t_k)\|) \exp(h\|A(t_{k-1})\|) \cdots \exp(h\|A(t_0)\|) \\ &\leq \exp(hNM) = \exp(TM), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

D'altra parte, per la continuità di  $A$  nell'intervallo  $[0, T]$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$  con  $|\tau_1 - \tau_2| < \delta_\varepsilon$  si ha  $\|A(\tau_1) - A(\tau_2)\| < \varepsilon$ . Ma vale anche  $\|A_h(\tau) - A(\tau)\| < \varepsilon$  per  $\tau \in [0, T]$  se  $h < \delta_\varepsilon$  e quindi vale

$$\|Y_h(t) - Y(t)\| \leq \varepsilon T \exp(TM) + \int_0^t M \|Y_h(\tau) - Y(\tau)\|d\tau$$

se  $h < \delta_\varepsilon$ . Applicando ora il Lemma di Gronwall<sup>1</sup> si ottiene

$$\|Y_h(t) - Y(t)\| \leq \varepsilon T \exp(TM + Mt), \quad t \in [0, T],$$

---

<sup>1</sup>**Lemma di Gronwall.** Sia  $I$  intervallo di  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$ ,  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni continue non negative, e  $c \in \mathbb{R}^{\geq 0}$  tali che

$$v(t) \leq c + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds, \quad \forall t \in I, t \geq t_0.$$

Allora vale

$$v(t) \leq c \exp\left(\int_{t_0}^t u(s)ds\right)$$

per ogni  $t \in I, t \geq t_0$ .

quindi

$$\|Y_h(T) - Y(T)\| \leq \varepsilon T \exp(2TM),$$

e questo implica che

$$Y(T) = \lim_{h \rightarrow 0} Y_h(T).$$

□

### 3.2.1 Ottimizzazione del calcolo

Nonostante i tempi di elaborazione per il calcolo della matrice di monodromia non siano problematici è comunque interessante sfruttare una proprietà della matrice (3.5) che permette di dimezzarli (vedi [9]). Per essa vale infatti la seguente “proprietà E”: Una matrice  $P(t)$ ,  $T$ -periodica e continua per  $t \in \mathbb{R}$ , ha la “proprietà E” se esiste una matrice  $S$ , con  $S^2 = \mathbb{I}$ , tale che per ogni  $t \in \mathbb{R}$  si ha

$$P(-t) = -SP(t)S. \quad (3.9)$$

Allora se si considera il sistema

$$\dot{x} = P(t)x \quad (3.10)$$

è immediato osservare che se  $x(t)$  è soluzione di (3.10) allora lo è anche  $y(t) = Sx(-t)$ . Denotiamo con  $X(t)$  la soluzione di (3.10) con dato iniziale  $X(0) = \mathbb{I}$ . Sia  $M_T$  la matrice di monodromia di (3.10), cioè  $M_T = X(T)$ .

**Teorema 3.2.1.** *Se  $P(t)$  ha la proprietà E allora*

$$X(-t) = SX(t)S, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

$$M_T = SX^{-1}(T/2)SX(T/2). \quad (3.12)$$

**Dimostrazione.** Sia  $Y(t)$  risolvente di (3.10). Allora anche  $Y_1(t) = SY(-t)$  è risolvente di (3.10), e poiché  $S$  è non-singolare, lo stesso vale per  $Y_2(t) = SY(-t)S$ . Allora in particolare  $X(0) = SX(0)S = S^2 = \mathbb{I}$  e per l’unicità le due soluzioni coincidono. Ponendo poi  $t = T/2$  in  $X(t+T) = X(t)M_T$  e sfruttando (3.11) troviamo (3.12). □

Al prezzo di calcolare la matrice inversa nella risolvente è possibile limitare l’integrazione al tempo  $T/2$ , dimezzando (o quasi) i tempi. Osserviamo che da (3.12) segue  $\det M_T = 1$ , ovvero il prodotto degli autovalori della matrice di monodromia deve valere 1. In realtà si può dire qualcosa di più: dal momento che  $S = S^{-1}$ , si ha  $M_T = \tilde{X}^{-1}X$ ,  $M_T^{-1} = \tilde{X}X^{-1}$ , dove con la “tilde” sono indicate le matrici a cui è stata applicata la trasformazione  $S$ ; allora se  $\lambda$  è autovalore di  $M_T$ , lo è anche  $1/\lambda$ .

Concludiamo fornendo la matrice  $S$  soddisfacente (3.9) nel caso in cui  $P(t)$  sia data da (3.5),

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.3 Regioni di stabilità lineare

I parametri liberi in (3.5) sono l'eccentricità e il rapporto di massa tra i due primari,  $\mu = \mu_A$  (si ricordi infatti che  $\mu_B = 1 - \mu_A$ ). Si sono quindi studiati numericamente gli autovalori della matrice di monodromia al variare di  $(\mu, e)$ . Il risultato è mostrato in figura 3.1

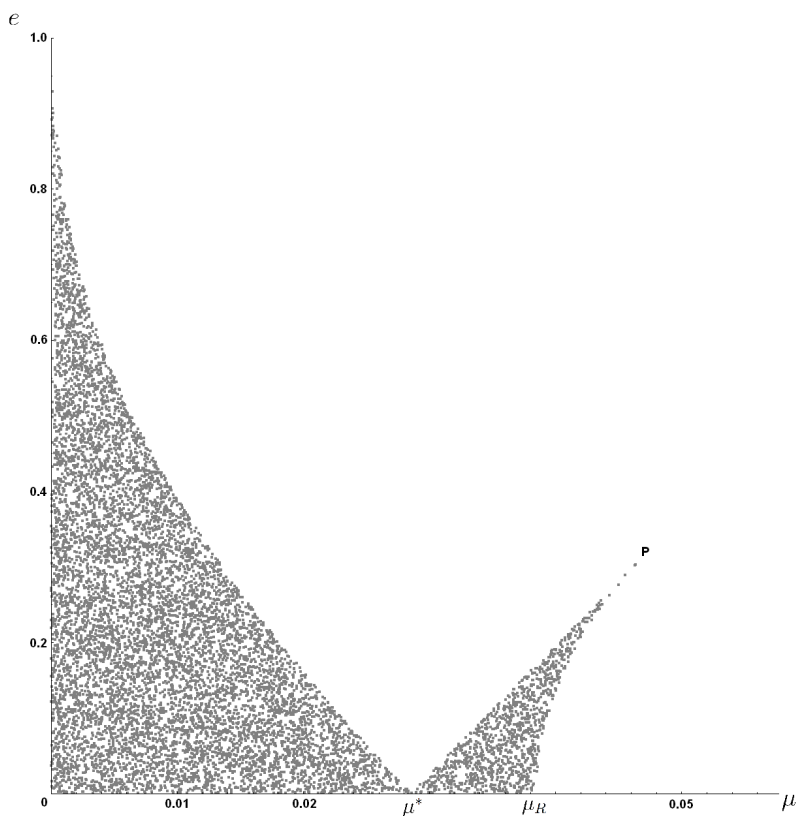


Figura 3.1: Stabilità lineare per il problema dei tre corpi ristretto ellittico (in grigio).

Il grafico riportato mostra le regioni di stabilità lineare/instabilità per  $\mathcal{L}_4$ : i punti in grigio corrispondono ai valori  $(\mu, e)$  per cui gli autovalori sono in modulo pari a uno. L'aspetto granuloso del grafico non è dovuto a mancanza di stabilità nell'intorno dei punti stabili, ma alla limitata risoluzione dell'approccio numerico. Il punto  $(\mu^*, 0)$  coincide con un punto di risonanza, in cui le frequenze associate agli autovalori sono in rapporto 1:1. Tale condizione pregiudica la stabilità per valori di  $e \neq 0$ . Il valore  $\mu_R$  è la ben nota soglia di Routh, alla quale i punti triangolari del problema circolare perdono la stabilità lineare.

Osserviamo, inoltre, che Markeev [8] ha individuato 10 curve di risonanza parametrica all'interno delle regioni di stabilità. In uno studio recente [2], si è studiata numericamente la stabilità delle orbite nell'intorno di  $\mathcal{L}_4$ ; si è osservato che lungo tali curve di risonanza la dimensione degli intorni per cui l'orbita del planetoido rimane "vicina" a  $\mathcal{L}_4$  tende ad essere più piccola rispetto che negli altri punti dello spazio  $(\mu, e)$  dove si ha stabilità. Per un'analisi più dettagliata del problema rimandiamo a tali lavori.

Per quanto riguarda l'aspetto computazionale, si è determinata la matrice di monodromia per 40000 punti casuali nello spazio  $[\mu_{min}, \mu_{max}] \times [e_{min}, e_{max}] = [0, 0.05] \times [0, 1]$  con uno step di  $\pi/1000$ . Successivamente, per determinare con più precisione il punto  $P$  e il comportamento per  $e \rightarrow 1$  si è eseguita una seconda determinazione degli autovalori nei loro intorni, diminuendo lo step a  $\pi/2000$ . A causa delle approssimazioni numeriche non è possibile determinare autovalori in modulo esattamente uguali a 1; per questa ragione i punti sono stati considerati stabili se i moduli degli autovalori differivano dall'unità di un valore inferiore a una parte su  $10^6$ . Il grafico ottenuto conferma i risultati già descritti da Danby, [5]. Il punto  $P$  ha coordinate  $(\mu_P, e_P) = (0.04699, 0.31402)$ .

I punti  $\mu_R$  e  $\mu^*$  si possono ricavare analiticamente applicando il metodo spettrale alla matrice (3.5) previo aver posto  $e = 0$ . L'equazione caratteristica è

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0$$

con radici

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left[ -1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} \right]$$

e (a conti fatti) si ha instabilità per  $\mu > \mu_R = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{69}}{9} \right) = 0.038521$ . Nel caso in cui  $\mu < \mu_R$  gli autovalori sono  $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ , dove:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} \right]} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} \right]}.$$

Il valore di  $\mu^*$ , infine, corrisponde a frequenze  $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$ ,  $\mu^* = \frac{1}{6}(3 - 2\sqrt{2}) = 0.0285954..$



# Appendice A

## Codice per il calcolo della stabilità

Riportiamo il codice per il calcolo della matrice di monodromia (scritto in Mathematica).

```
PuntiStabili = {};  
S = {  
  {1, 0, 0, 0},  
  {0, -1, 0, 0},  
  {0, 0, -1, 0},  
  {0, 0, 0, 1}  
};  
Num = 1000; dt = (Pi/Num);  
  
Z[f_, \[Alpha]_, \[Gamma]_, e_] = {  
  {0, 0, 1, 0},  
  {0, 0, 0, 1},  
  {1/(1 + e Cos[f]) \[Alpha], 0, 0, 2},  
  {0, 1/(1 + e Cos[f]) \[Gamma], -2, 0}  
};  
PUNTI = 40000;  
For[i = 0, i < PUNTI, i = i + 1, {  
  e = RandomReal[{0, 1}];  
  \[Mu] = RandomReal[{0, 0.05}];  
  \[Alpha] = 3/2 (1 - Sqrt[1 - 3 \[Mu] (1 - \[Mu])]);  
  \[Gamma] = 3/2 (1 + Sqrt[1 - 3 \[Mu] (1 - \[Mu])]);  
  
  R = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};  
  For[t = 0, t < Pi, t = t + dt, {
```

```
    swp = MatrixExp[dt Z[t, \[Alpha], \[Gamma], e]],
    R = swp.R
  }
]
R = S.Inverse[R].S.R;
Autovalori = Eigenvalues[R];

flag = 1;
For[s = 1, s < 5, s++, {
  If[ (Abs[Autovalori[[s]]] - 1) > 0.000001, flag = 0]
}
]

If[flag == 1,
  PuntiStabili = AppendTo[PuntiStabili, Point[{mu, e }]]]
}]
```



# Bibliografia

- [1] K. T. Alfriend and R. H. Rand. ‘Stability of the Triangular Points in the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies’. *AIAA Journal*, 7(6):1024–1028, 1969.
- [2] I. Nagy R. Rajnai B. Érdi, E. Forgács-Dajka. ‘A Parametric Study of Stability and Resonances Around L4 in the Elliptic Restricted Three-body Problem’. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104(1):145–158, 2009.
- [3] T. Benacchio. ‘Stability of L4 and L5 in the Restricted Planar Three-Body Problem’. Master’s thesis, Università degli Studi di Padova, 2006.  
<http://www.math.unipd.it/~fasso/>.
- [4] A. Bennet. ‘Characteristic Exponents of the Five Equilibrium Solutions in the Elliptically Restricted Problem’. *Icarus*, 4:177–187, 1965.
- [5] J. M. A. Danby. ‘Stability of the Triangular Points in the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies’. *The Astronomical Journal*, 69(2):165–172, 1964.
- [6] M. Farkas. *Periodic Motions*. Applied Mathematical Sciences 104. Springer-Verlag, 1994.
- [7] F. Fassò. Istituzioni di Fisica Matematica. Dispense del corso, 2010.  
<http://www.math.unipd.it/~fasso/>.
- [8] A. P. Markeev. ‘On the Stability of Triangular Libration Points in the Elliptic Restricted Three-Body Problem’. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 34(2):215–221, 1970.
- [9] R. Meire and A. Vanderbauwhede. ‘A useful result for certain linear periodic ordinary differential equations’. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 5(1):59–61, 1979.
- [10] V. Szebehely. *Theory of Orbits*. Academic Press, 1967.

- [11] G. Teschl. Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, 2010.  
<http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/>.