

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA

L'ATOMO D'IDROGENO IN UN DEBOLE
CAMPO ELETTROMAGNETICO,
UNO STUDIO CLASSICO TRAMITE LA
TEORIA DI NEKHOROSHEV

RELATORE
PROF. FRANCESCO FASSÒ

LAUREANDO
DANIELE FONTANARI

ANNO ACCADEMICO 2007-2008

Indice

| | |
|---|-----------|
| Introduzione | 5 |
| 1 Il problema di Kepler e la sua regolarizzazione | 7 |
| 1.1 Formulazione Hamiltoniana | 7 |
| 1.2 Riparametrizzazione del tempo tramite l'anomalia eccentrica | 8 |
| 1.3 Il metodo di regolarizzazione di Kustaanheimo-Stiefel | 11 |
| 1.4 Dimostrazione del teorema | 12 |
| 2 L'atomo d'idrogeno in un debole campo elettromagnetico | 17 |
| 2.1 La Hamiltoniana dell'atomo d'idrogeno perturbato | 17 |
| 2.2 Le simmetrie nel problema regolarizzato e la riduzione rispetto al flusso Hamiltoniano | 19 |
| 3 Forme normali | 23 |
| 3.1 Costruzione della prima forma normale | 23 |
| 3.2 Studio della prima forma normale | 25 |
| 3.3 La seconda forma normale | 28 |
| 4 Costruzione della seconda forma normale | 31 |
| 4.1 Notazioni | 31 |
| 4.2 Un passo perturbativo | 34 |
| 4.3 Iterazione | 40 |
| 4.4 Geometria delle risonanze nello spazio delle frequenze | 42 |
| Conclusioni | 47 |
| Ringraziamenti | 51 |
| A Il metodo di regolarizzazione di Moser | 53 |

Introduzione

Una metodologia di ricerca relativamente recente in chimica fisica, in particolare nella spettroscopia molecolare, si basa sull'ipotesi di un riscontro sulle caratteristiche osservabili di un sistema fisico della struttura topologica del sistema Hamiltoniano che lo descrive. In particolare l'idea che sta alla base di lavori come [7], [8], [9] e [16] consiste nello studiare, mediante una trattazione Hamiltoniana classica, un sistema composto da un atomo di idrogeno immerso in un campo elettromagnetico sufficientemente debole. Sfruttando il fatto che il sistema classico è un sistema quasi-integrabile, le cui frequenze imperturbate sono dipendenti dai parametri che determinano il campo, in tale lavoro sono state analizzate le proprietà geometriche delle fibrazioni in tori invarianti indotte da opportune forme normali troncate.

Nel presente lavoro ci si propone di motivare in modo matematicamente rigoroso la validità di tali studi del sistema classico servendosi della teoria di Nekhoroshev.

Nel primo capitolo si studia il problema di Kepler, che modella il sistema in assenza di campo, e la sua dinamica. Si discutono quelle tecniche, dette di regolarizzazione, che consentono di superare le difficoltà insite nella natura singolare del potenziale Kepleriano e, contemporaneamente, mettono in luce le notevoli proprietà di simmetria del problema.

Nel secondo capitolo si introduce la formulazione Hamiltoniana per il problema dell'atomo di idrogeno immerso in un campo elettromagnetico e se ne discute la natura perturbativa. Si descrivono gli integrali primi del sistema imperturbato e si analizza la struttura dello spazio ridotto tramite l'azione del gruppo di simmetria del flusso Kepleriano.

Nel terzo capitolo si mette in atto il processo, in due passi, di costruzione delle forme normali del sistema. La prima normalizzazione, rispetto al flusso Kepleriano, produce un sistema a due gradi di libertà che è una piccola perturbazione di un sistema isocrono le cui frequenze dipendono dai parametri del campo esterno e possono dunque essere risonanti o non risonanti. Per questo motivo, per effettuare una seconda normalizzazione, rispetto al flusso di questo sistema isocrono, si farà ricorso alla teoria di Nekhoroshev.

A differenza della teoria di Nekhoroshev standard, nella quale si decompone lo spazio delle azioni in zone caratterizzate da diverse proprietà di risonanza, qui si decomporrà invece in zone risonanti e non risonanti lo spazio dei parametri.

I dettagli tecnici della costruzione della seconda forma normale sono dati nel capitolo 5.

La rilevanza di questi risultati per lo studio del problema quantistico è delineata nelle conclusioni.

Capitolo 1

Il problema di Kepler e la sua regolarizzazione

Le difficoltà nello studio del problema di Kepler, e delle sue perturbazioni, sorgono in primo luogo a causa della presenza di una singolarità per il potenziale Kepleriano. Per i moti di momento angolare diverso da zero la singolarità non viene raggiunta, e la restrizione del flusso sull'insieme dove non si annulla il momento angolare è completa. Invece, i moti di momento angolare nullo (detti di collisione) raggiungono la singolarità in un tempo finito. Per la conservazione dell'energia ciò implica che le velocità (e dunque, nella formulazione Hamiltoniana, i momenti coniugati) tendono in norma all'infinito causando l'incompletezza del flusso. Per risolvere tale inconveniente si procede con la cosiddetta regolarizzazione, che consiste nel compattificare opportunamente lo spazio delle fasi, o parte di esso, in modo da comprendere la varietà all'infinito verso la quale tendono i moti di collisione, e riportarsi così ad un problema nel quale però il flusso sia completo ovunque. Ciò si può ottenere in svariati modi e ha in aggiunta il pregio di rendere manifeste le proprietà di simmetria del problema.

In questo capitolo, dopo aver introdotto il problema di Kepler e la riparametrizzazione del tempo tramite l'anomalia eccentrica, si introdurrà il metodo di regolarizzazione di Kustaanheimo-Stiefel. Si rimanda all'appendice per la descrizione di un altro metodo di regolarizzazione, dovuto a Moser.

1.1 Formulazione Hamiltoniana

Il problema di Kepler in 3 dimensioni è descritto da un sistema Hamiltoniano su $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ dotato della struttura simplettica di fibrato cotangente. La Hamiltoniana che lo definisce, a meno di un riscaldamento delle variabili e del tempo, è

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \|p\|^2 - \frac{1}{\|q\|} \quad (q, p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}), \quad (1.1)$$

dove si è indicata con $\|\cdot\|$ la norma euclidea. Il sistema è autonomo e dunque l'energia H è un integrale primo. Altri integrali primi sono le componenti del momento angolare $G(q, p) = q \times p$ e del vettore di Runge-Lenz $A(q, p) = p \times G(q, p) - \frac{q}{\|q\|}$. Nel sottoinsieme dello spazio delle fasi ad energia negativa i moti risultano inoltre periodici (si veda [3] per i dettagli).

Osservazione. Sia $\lambda > 0$, tramite la trasformazione canonica estesa dipendente dal tempo

$$\begin{aligned} q &\longrightarrow \lambda^{-1}q \\ p &\longrightarrow \lambda^{\frac{1}{2}}p \\ t &\longrightarrow \lambda^{-\frac{3}{2}}t \end{aligned} \quad (1.2)$$

la Hamiltoniana $H(q, p)$ mantiene la sua forma originaria, mentre la superficie di energia $H^{-1}(E)$, $E \in \mathbb{R}$ viene mandata in $H^{-1}\left(\frac{E}{\lambda}\right)$. Non è dunque restrittivo porsi, nello studio dei moti limitati, sulla superficie di energia $H^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ponendo $\lambda = \omega = -2E$.

1.2 Riparametrizzazione del tempo tramite l'anomalia eccentrica

Sia

$$Y(q, p) = \|q\|X_H(q, p).$$

Chiaramente tale campo vettoriale non è Hamiltoniano. Se lo fosse infatti si avrebbe, in accordo con il teorema di Schwarz, che

$$\frac{\partial Y_{q_i}}{\partial q_j} + \frac{\partial Y_{p_j}}{\partial p_i} = 0 \quad i, j = 1 \dots 3$$

mentre si ha che

$$\frac{\partial Y_{q_i}}{\partial q_j} + \frac{\partial Y_{p_j}}{\partial p_i} = \frac{q_j p_i}{\|q\|} \neq 0 \quad i, j = 1 \dots 3.$$

Vale però la seguente proposizione, dove verrà indicata con Φ_X^t la mappa al tempo t del flusso di un campo vettoriale X .

Proposizione 1. *Fissato $E \in \mathbb{R}$ la restrizione di Y a $H^{-1}(E)$ coincide con la restrizione del campo vettoriale generato dalla Hamiltoniana*

$$K_E(q, p) = \|q\|(H(q, p) - E) + 1 = \frac{\|q\|}{2}(\|p\|^2 - 2E). \quad (1.3)$$

Inoltre, $\forall z_0 = (q_0, p_0) \in H^{-1}(E)$ e $\forall t$ nell'intervallo di definizione della curva integrale

$$\tau \rightarrow \Phi_Y^\tau(z_0) = (q(\tau, z_0), p(\tau, z_0))$$

di Y con dato iniziale z_0 , si ha che

$$\Phi_H^t(z_0) = \Phi_{K_E}^{\hat{s}(t; z_0)}(z_0) \quad (1.4)$$

dove

$$\hat{s}(t; z_0) = \int_0^t \frac{1}{\|q(\tau; z_0)\|} d\tau.$$

Dimostrazione. Sia $f : T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$. Si ha, per $(q, p) \in H^{-1}(E)$, che

$$\{f, K_E\}(q, p) = \|q\|\{f, H\}(q, p) + (H(q, p) - E)\{f, \|q\|\} = \|q\|\{f, H\}(q, p)$$

e quindi, da $(X_H)_i = \{z_i, H\}$, che $X_{K_E}(q, p) = \|q\|X_H(q, p) = Y(q, p)$. Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato basta derivare rispetto al tempo $\Phi_{K_E}^{\hat{s}(t; z_0)}(z_0)$ ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_{K_E}^{\hat{s}(t; z_0)}(z_0) &= \frac{d}{dt} \hat{s}(t; z_0) X_{K_E}(\Phi^{\hat{s}(t; z_0)}(z_0)) \\ &= \frac{1}{\|q(t; z_0)\|} \|q(t; z_0)\| X_H(\Phi_{K_E}^{\hat{s}(t; z_0)}(z_0)) \\ &= X_H(\Phi_{K_E}^{\hat{s}(t; z_0)}(z_0)). \end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{d}{dt} \Phi_H^t(z_0)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Phi_{K_E}^{\hat{s}(t; z_0)}(z_0)|_{t=0}$$

e questo, assieme alla immediata verifica della validità della (1.4) per $t = 0$, permette di concludere. \square

Si vuole ora chiarire il significato della riparametrizzazione con il parametro s . Limitandosi alle sole orbite a energia negativa come si è visto si può allora, senza perdita di generalità, limitarsi a studiare il problema di Kepler su $H^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, e dunque il problema riparametrizzato $K_{-\frac{1}{2}}$. Le equazioni di Hamilton per $K_{-\frac{1}{2}}$ diventano

$$\begin{cases} q' &= \|q\|p \\ p' &= -\frac{q}{\|q\|^2} \end{cases}. \quad (1.5)$$

Ovviamente G ed A sono, in virtù del parallelismo fra X_H ed Y , integrali primi del sistema di Hamiltoniana $K_{-\frac{1}{2}}$.

Proposizione 2. *Le (1.5) sono equivalenti all'equazione del secondo ordine*

$$q'' + q = -A\left(q, \frac{q'}{\|q\|}\right)$$

dove $A(z)$ è il vettore di Runge-Lenz valutato in $z \in T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$.

Dimostrazione. Derivando la prima equazione (1.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} q'' &= \frac{q \cdot q'}{\|q\|} p + \|q\| p' - A(q, p) \\ &= (q \cdot p) p - \frac{q}{\|q\|}. \end{aligned}$$

Per il vettore di Runge-Lenz si ha che

$$\begin{aligned} A(q, p) &= p \times (q \times p) - \frac{q}{\|q\|} \\ &= \|p\|^2 q - (q \cdot p) p - \frac{q}{\|q\|}. \end{aligned}$$

Utilizzando il fatto che per $(q, p) \in H^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ vale $\frac{\|p\|^2}{2} - \frac{1}{\|q\|} = -\frac{1}{2}$ e ricavando l'espressione di p in funzione di q e q' dalla prima equazione (1.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} q'' &= \|p\|^2 q - 2 \frac{q}{\|q\|} \\ &= 2q \left(\frac{\|p\|^2}{2} - \frac{1}{\|q\|} \right) - A(q, p) = -q - A\left(q, \frac{q'}{\|q\|}\right) \end{aligned}$$

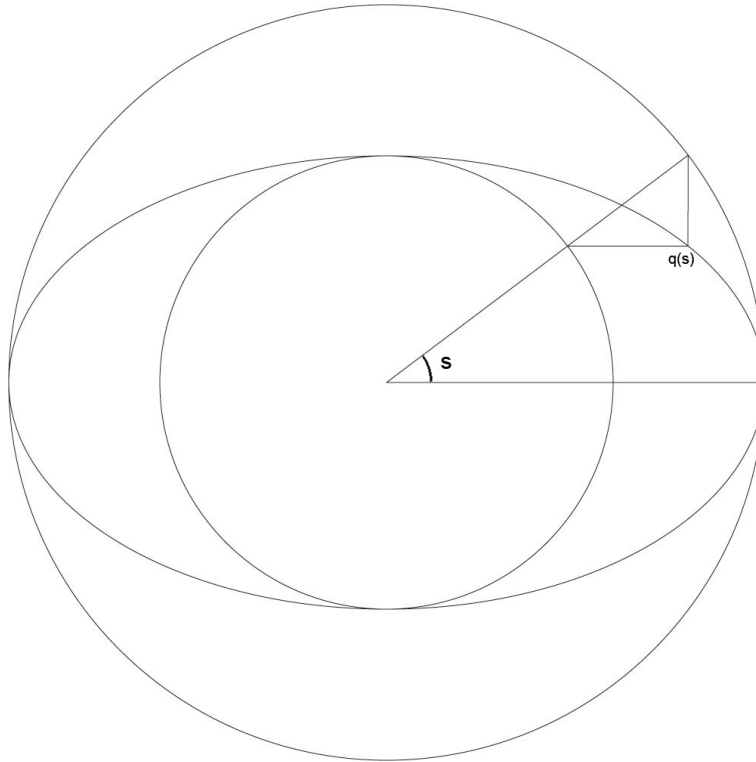


Figura 1.1: interpretazione geometrica dell'anomalia eccentrica

ovvero $q'' + q = -A \left(q, \frac{q'}{\|q\|} \right)$ come da enunciato. \square

Data la costanza del vettore di Runge Lenz, l'equazione (1.5) è quella di un oscillatore armonico forzato e ha per soluzione generale

$$q(s) = C_1 \cos(s) - C_2 \sin(s) - A \quad (1.6)$$

con C_1 e C_2 costanti d'integrazione. In particolare (si veda [3] per i dettagli), nel caso $A \neq 0$ (orbita ellittica) se s_0 indica l'istante di passaggio per il perielio dell'orbita si avrà che

$$q(s) = \frac{A}{\|A\|} \cos(s - s_0) + G \times \frac{A}{\|A\|} \sin(s - s_0) - A$$

mentre nel caso $A = 0$ (orbita circolare) la soluzione diventa (osservando che se $(q, p) \in H^{-1}(\frac{1}{2})$ si ha che $|q(0)| = |G| = 1$)

$$q(s) = q(0) \cos(s) + G \times q(0) \sin(s). \quad (1.7)$$

Si consideri ora sul piano dell'orbita un sistema di assi ortogonali (X, Y) centrati nell'origine e orientati rispettivamente come A e $G \times A$ e come $q(0)$ e $G \times q(0)$ nel caso $A = 0$. Dette $X(s)$ e $Y(s)$ le proiezioni del moto (1.7) su di essi, si avrà

(utilizzando la relazione $\|A\|^2 + \|G\|^2 = 1$ e posto senza perdita di generalità $s_0 = 0$)

$$\begin{aligned} X(s) &= \cos(s) - \|A\| \\ Y(s) &= \sqrt{1 - \|A\|^2} \sin(s). \end{aligned}$$

la prima equazione rappresenta la proiezione sull'asse X di un moto uniforme di velocità unitaria sulla circonferenza circoscritta all'orbita e la seconda equazione rappresenta la proiezione sull'asse Y dello stesso moto ma sulla circonferenza inscritta all'orbita. Ciò qualifica il parametro s come l'anomalia eccentrica (si veda la figura (1.1) per l'interpretazione geometrica dell'anomalia eccentrica). Per questo motivo, nel seguito verrà chiamato *problema di Kepler riparametrizzato con l'anomalia eccentrica*, o semplicemente *problema di Kepler riparametrizzato* il sistema di Hamiltoniana K_E , $E < 0$. Si noti inoltre che fra il parametro s ed il tempo reale del sistema sussiste la relazione, nel caso $E = -\frac{1}{2}$, $\frac{dt}{ds} = \|q\| = 1 - \|A\| \cos(s)$ e dunque $t(s) = s - \|A\| \sin(s)$ che è la nota equazione di Kepler.

1.3 Il metodo di regolarizzazione di Kustaanheimo-Stiefel

Il metodo di regolarizzazione di Kustaanheimo-Stiefel, come viene trattato ad esempio in [5], consiste nell'identificare il sistema di Keplero riparametrizzato con il sistema ottenuto riducendo in modo simplettico sotto un'azione di \mathbb{S}^1 da un oscillatore armonico isotropo con quattro gradi di libertà. Questo sembra il modo più chiaro di descrivere la regolarizzazione di Kustaanheimo-Stiefel, una trattazione più tradizionale si trova ad esempio in [3]).

Si premette dunque alla descrizione del metodo di Kustaanheimo-Stiefel la seguente, particolare versione della riduzione simplettica:

Teorema 1 (Meyer-Marsden-Weinstein). *Sia (Q, ω) una varietà simplettica, G un gruppo di Lie abeliano e*

$$\begin{aligned} \Phi : G \times Q &\longrightarrow Q \\ (g, z) &\longmapsto \Phi_g(z) \end{aligned}$$

un'azione libera, propria ed Hamiltoniana di G su Q di mappa momento ξ . Detta \sim_G la relazione di equivalenza indotta da Φ si ha che, per un qualunque valore μ regolare per ξ , l'insieme $N = \xi^{-1}(\mu) / \sim_G$ dotato della topologia quoziente indotta da quella su $\xi^{-1}(\mu) \subseteq Q$ è una varietà differenziale sulla quale è definita un'unica forma simplettica ω_r tale che, dette ι e π l'inclusione di $\xi^{-1}(\mu)$ in Q e la proiezione di $\xi^{-1}(\mu)$ su N rispettivamente, risulti

$$\iota^* \omega = \pi^* \omega_r$$

Inoltre la proiezione π è una sommersione. Infine, da una qualunque funzione Hamiltoniana H definita su Q invariante rispetto all'azione di Φ discende un'unica funzione $H_r : N \rightarrow \mathbb{R}$, chiamata Hamiltoniana ridotta, tale che

$$H = \pi^* H_r.$$

Il flusso di H è proiettato da π sul flusso di H_r .

Dimostrazione. Si veda ad esempio [1] oppure [10]. \square

Osservazione. Si noti che se G è compatto allora automaticamente l'azione risulterà propria.

Se G è compatto, ogni azione libera automaticamente è propria. Dire che l'azione è Hamiltoniana (o “fortemente Hamiltoniana”) significa che non solo i generatori infinitesimi sono Hamiltoniani, ma anche che vi è un omomorfismo di algebre di Lie fra l'algebra di Lie del gruppo e l'algebra di Lie delle funzioni su T^*Q dotato delle parentesi di Poisson. Si costruisce ora l'azione di \mathbb{S}^1 che serve per la definizione del metodo di Kustaanheimo-Stiefel. verrà identificato $T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ con $(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^4 \ni (u, w)$ e si considererà la funzione $\xi : T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\xi(u, w) = u_1 w_2 - u_2 w_1 + u_3 w_4 - u_4 w_3.$$

È immediato constatare che il flusso di Hamiltoniana ξ è un'azione libera e Hamiltoniana di \mathbb{S}^1 , che viene denotato con Φ_{KS} . Chiaramente, la mappa momento di Φ_{KS} è ξ stessa e 0 è un valore regolare per ξ . Si può dunque considerare lo spazio ridotto $N = \xi^{-1}(0) / \sim_{\mathbb{S}^1}$.

Fissato $E < 0$, e posto $\omega = \sqrt{-2E}$ si consideri su $T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ il sistema di Hamiltonian

$$H_E^{KS}(w, u) = \frac{1}{8}(\|w\|^2 + (2\omega)^2\|u\|^2),$$

che è invariante sotto Φ_{KS} . Sia \hat{H}_E^{KS} la Hamiltoniana ridotta da H_E^{KS} su N .

Teorema 2. *Lo spazio delle fasi ridotto*

$$N = \xi^{-1}(0) / \sim_{\mathbb{S}^1}$$

è *simplettomorfo* a $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ e tale *simplettomorfismo* $\hat{\Phi}_E^{KS}$ coniuga la Hamiltoniana ridotta alla Hamiltoniana K_E del problema di Kepler riparametrizzato.

Chiaramente, per studiare le proprietà di \hat{H}_E^{KS} , e quindi quelle di K_E , basterà studiare la Hamiltoniana H_E^{KS} su $\xi^{-1}(0)$ e quindi passare i risultati a quoziente tramite $\sim_{\mathbb{S}^1}$. Il vantaggio consiste nel fatto che H_E^{KS} è la Hamiltoniana di un oscillatore armonico isotropo, la cui dinamica è semplice.

1.4 Dimostrazione del teorema

Si consideri l'azione di \mathbb{S}^1 su $T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{S}^1 \times T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) &\longrightarrow T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) \\ (\alpha, (u, w)) &\longmapsto (\mathbf{R}^\alpha u, \mathbf{R}^\alpha w) \end{aligned}$$

dove \mathbf{R}^α indica la matrice

$$\mathbf{R}^\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in SO_4(\mathbb{R}).$$

Si verifica che tale azione è quella generata dalla mappa momento $\xi(u, w)$, inoltre essa è libera in quanto l'unico punto fisso è $(u, w) = (0, 0)$ il quale è escluso dalla definizione del dominio $T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$. È dunque possibile applicare il teorema di riduzione a tale azione. Per fare ciò si consideri innanzitutto la mappa

$$\begin{aligned} \phi: T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) &\longrightarrow T^*\mathbb{R}^3 \\ (u, w) &\longmapsto \phi(u, w) = (\phi^x(u), \phi^y(u, w)) \end{aligned}$$

definita tramite:

$$\begin{aligned} \phi_1^x(u, w) &= 2(u_1u_3 + u_2u_4) \\ \phi_2^x(u, w) &= 2(u_2u_3 - u_1u_4) \\ \phi_3^x(u, w) &= -u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \\ \phi_1^y(u, w) &= \frac{1}{2\|u\|^2}(u_3w_1 + u_4w_2 + u_1w_3 + u_2w_4) \\ \phi_2^y(u, w) &= \frac{1}{2\|u\|^2}(-u_4w_1 + u_3w_2 + u_2w_3 - u_1w_4) \\ \phi_3^y(u, w) &= \frac{1}{2\|u\|^2}(-u_1w_1 - u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4). \end{aligned}$$

Per quanto segue sarà utile definire

$$\begin{aligned} M: \mathbb{R}^4 &\longrightarrow M_{3 \times 4}(\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto M(u) \end{aligned}$$

dove

$$M(u) = \begin{pmatrix} u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ -u_4 & u_3 & u_2 & -u_1 \\ -u_1 & -u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}.$$

Si ha infatti che

$$\phi(u, w) = \left(M(u)u, \frac{1}{2\|u\|^2}M(u)w \right).$$

Similmente si definisce

$$\begin{aligned} \tilde{M}: \mathbb{R}^4 &\longrightarrow M_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto \tilde{M}(u) \end{aligned}$$

dove

$$\tilde{M}(u) = \begin{pmatrix} M(u) \\ -u_2 & u_1 & -u_4 & u_3 \end{pmatrix}.$$

Per \tilde{M} valgono

$$\begin{aligned} (\tilde{M}(u)u)_4 &= 0 \\ (\tilde{M}(u)w)_4 &= \xi(u, w). \end{aligned}$$

Si osservi che la mappa ϕ^x (la quale dipendendo esclusivamente dalle u può essere pensata come applicazione da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3) è la mappa di Hopf (si veda ad esempio [5] per i dettagli) relativa alla fibrazione definita dalle orbite, proiettate su $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \subset T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$, di Φ .

Lemma 1.4.1. ϕ è invariante rispetto all'azione di \mathbb{S}^1 definita da Φ , ovvero $(\Phi^\alpha)^*\phi = \phi \ \forall \alpha \in \mathbb{S}^1$.

Dimostrazione. Per quanto appena osservato ϕ^x risulta invariante rispetto all'azione di Φ . La dipendenza di M da u è lineare, cosicché da tale invarianza segue

$$M(\mathbf{R}^\alpha u) \mathbf{R}^\alpha u = M(u) u \Rightarrow M(\mathbf{R}^\alpha u) = M(u) \mathbf{R}^{-\alpha}$$

e ciò implica che

$$M(\mathbf{R}^\alpha u) \mathbf{R}^\alpha w = M(u) \mathbf{R}^{-\alpha} \mathbf{R}^\alpha w = M(u) w.$$

Poiché $\|\mathbf{R}^\alpha u\| = \|u\|$ si può concludere che $\phi(\Phi^\alpha(u, w)) = \phi(u, w) \forall (u, w) \in T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$, $\alpha \in \mathbb{S}^1$. \square

L'invarianza di ϕ sotto l'azione di Φ assicura l'esistenza di una applicazione

$$\tilde{\phi} : N \longrightarrow T^*\mathbb{R}^3$$

tale che $\iota^* \phi = \pi^* \tilde{\phi}$.

Lemma 1.4.2. *La mappa $\iota^* \phi$ è una sommersione*

Dimostrazione. Poiché $\tilde{M}(u) \tilde{M}(u)^T = \|u\|^2 \mathbb{I}_4$ si ha

$$\tilde{M}(u)^{-1} = \frac{1}{\|u\|^2} \tilde{M}(u)^T.$$

Per mostrare la suriettività della mappa tangente a $\iota^* \phi$ basta mostrare la suriettività della mappa tangente a ϕ vincolando i punti del dominio su $T(\xi^{-1}(0))$.

La matrice Jacobiana di ϕ è

$$\mathbf{J} = \left(\begin{array}{c|c} 2M(u) & \mathbb{O}_{3 \times 4} \\ \hline \frac{1}{\|u\|^4} M(u) w u^T + \frac{1}{2\|u\|^2} M(w) & \frac{1}{2\|u\|^2} M(u) \end{array} \right)$$

mentre il vincolo tangente a $\xi(u, v) = 0$, che può essere scritto anche come $\frac{1}{2\|u\|} \xi(u, v) = 0$, è rappresentato dall'iperpiano di coefficienti

$$\left(\frac{1}{\|u\|^2} \left(\tilde{M}(u) w \right)_4 u^T + \frac{1}{2\|u\|^2} \tilde{M}(w)_4 \mid \frac{1}{2\|u\|^2} \tilde{M}(u)_4 \right).$$

Dunque il problema è ricondotto, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, al considerare la suriettività, al variare di $(u, w) \in \xi^{-1}(0)$, della mappa lineare da \mathbb{R}^8 a \mathbb{R}^7 rappresentata dalla matrice

$$\mathbf{K} = \left(\begin{array}{c|c} 2M(u) & \mathbb{O}_{3 \times 4} \\ \hline \frac{1}{\|u\|^4} \tilde{M}(u) w u^T + \frac{1}{2\|u\|^2} \tilde{M}(w) & \frac{1}{2\|u\|^2} \tilde{M}(u) \end{array} \right).$$

Si osservi che tale matrice è la matrice

$$\mathbf{L} = \left(\begin{array}{c|c} 2\tilde{M}(u) & \mathbb{O}_{4 \times 4} \\ \hline \frac{1}{\|u\|^4} \tilde{M}(u) w u^T + \frac{1}{2\|u\|^2} \tilde{M}(w) & \frac{1}{2\|u\|^2} \tilde{M}(u) \end{array} \right)$$

privata della quarta riga. Poiché \mathbf{L} rappresenta un'isomorfismo (la matrice è triangolare a blocchi ed i blocchi della diagonale sono invertibili) la matrice \mathbf{K} risulta suriettiva. \square

Lemma 1.4.3. *L'immagine di $\iota^*\phi$ è $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ e le sue fibre sono le orbite di Φ .*

Dimostrazione. Se $(x, y) \in T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ allora esiste $u \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tale che $x = \phi^x(u)$ in quanto la mappa di Hopf (la quale è legata, come già spiegato, alla ϕ) è suriettiva da $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Fissato dunque un tale u il problema di trovare w tale che $\iota^*\phi(u, w) = (x, y)$, ovvero che $\phi(u, w) = (x, y)$ e $(u, w) \in \xi^{-1}(0)$, è risolto da

$$\frac{1}{2\|u\|^2} \tilde{M}(u) w = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ha come unica soluzione $w(u, y) = 2M^T(u)y$, ciò prova la suriettività di $\iota^*\phi$ su $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Il fatto che $\iota^*\phi$ sia una sommersione implica che ogni sua fibra è unione numerabile e disgiunta di varietà 1-dimensionali. D'altro canto, fissati x e y , tale fibra è il grafico della funzione $\alpha \rightarrow (u_\alpha, w(u_\alpha, y))$ dove u_α varia lungo un fibra di ϕ^x con immagine x . Essendo quest'ultima diffeomorfa a \mathbb{S}^1 le fibre di $\iota^*\phi$ risultano essere varietà 1-dimensionali connesse, il lemma 1.4.1 assicura che le orbite di Φ sono contenute nelle fibre e ciò implica che le fibre sono esattamente tali orbite. \square

Lemma 1.4.4. *Se ω' è la 2-forma simplettica su $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ si ha che*

$$\iota^*(\phi^*\omega') = \iota^*\omega.$$

Dimostrazione. Sia θ la 1-forma di Liouville su $T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$, θ' quella su $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ e sia $\hat{\theta} = \phi^*\theta'$. Si ha che sulla varietà $\xi^{-1}(0)$ esse coincidono, ovvero $\iota^*\theta = \iota^*\hat{\theta}$, infatti

$$\begin{aligned} y \cdot dx &= \frac{1}{2\|u\|^2} M(u) w \cdot d(M(u) u) \\ &= \frac{1}{\|u\|^2} M(u)^T M(u) w \cdot du \\ &= w \cdot du - \xi(u, v) \tilde{M}(u)_4 \cdot du. \end{aligned}$$

Ciò implica che $\iota^*\omega = \iota^*(\phi^*\omega')$ come da enunciato. \square

Alla luce di questi lemmi si può concludere che

Lemma 1.4.5. *La mappa*

$$\tilde{\phi} : N \rightarrow T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

è un diffeomorfismo simplettico.

Dimostrazione. La suriettività di $\tilde{\phi}$ segue dalla suriettività di $\iota^*\phi$. Inoltre essendo le fibre di $\iota^*\phi$ parametrizzate dalle orbite di Φ si ha che $\tilde{\phi}$ è biiettiva. Poiché $\iota^*\phi$ è una sommersione lo sarà anche $\tilde{\phi}$ e dunque $\tilde{\phi}$ è un diffeomorfismo. Per provare la simpletticità di tale mappa basta osservare che, detta ω_N la forma simplettica su N ,

$$\pi^*\omega_M = \iota^*\omega = \hat{\phi}^*\omega' = \pi^*\tilde{\phi}^*\omega'.$$

Ciò equivale, poiché π è una sommersione, a

$$\tilde{\phi}^*\omega' = \omega_N.$$

È provata così la simpletticità di $\tilde{\phi}$. \square

Dunque è stata mostrata l'identificazione di $i^*\phi$ con π espressa nelle coordinate canoniche che identificano N con $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$.

A questo punto resta da vedere come si solleva, tramite $i^*\phi$, la Hamiltoniana di Kepler K_E su $\xi^{-1}(0)$.

Lemma 1.4.6. *Si ha che*

$$\begin{aligned}\|i^*\phi^x(u, w)\| &= \|u\|^2 \\ \|i^*\phi^y(u, w)\| &= \frac{\|w\|^2}{2\|u\|^2}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Dimostrazione. Ricordando che $\tilde{M}(u)^T \tilde{M}(u) = \|u\|^2 \mathbb{I}_4$ e che $(\tilde{M}(u)w)_4 = \xi(u, w)$ si ha che

$$\begin{aligned}\|\phi^x(u, w)\|^2 &= u^T \tilde{M}(u)^T \tilde{M}(u) u \\ &= (\|u\|^2)^2 \\ \|\phi^y(u, w)\|^2 + \left(\frac{1}{2\|u\|^2} \xi\right)^2 &= \frac{1}{4\|u\|^4} w^T \tilde{M}(u)^T \tilde{M}(u) w \\ &= \frac{\|w\|^2}{4\|u\|^2}\end{aligned}$$

che è, su $\xi^{-1}(0)$, il risultato voluto. \square

A questo punto il teorema 2 è dimostrato, in quanto si vede che $(i^*\phi)^*K_E = H_{KS}$.

Osservazione. A questo punto può risultare pratico effettuare il cambio di variabili

$$\begin{aligned}u &\rightarrow 2^{-1}u \\ w &\rightarrow 2w.\end{aligned}$$

In tal modo la Hamiltoniana H_{KS} assume la forma

$$H'_{KS} = \frac{1}{2} \left(\|w\|^2 + \left(\frac{\omega}{2}\right) \|u\|^2 \right)$$

Che si riduce alla forma particolarmente semplice

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(\|w\|^2 + \|u\|^2 \right)$$

nel caso in cui $E = -2$. D'altro canto si è già visto come è possibile, tramite un cambio delle coordinate originarie, porsi su una superficie di energia a piacere.

Capitolo 2

L'atomo d'idrogeno in un debole campo elettromagnetico

2.1 La Hamiltoniana dell'atomo d'idrogeno perturbato

Un modello classico dell'atomo d'idrogeno, che non tenga conto di effetti quantistici o relativistici come lo spin dell'elettrone e del protone, è fornito dal sistema di Lagrangiana

$$\hat{\mathcal{L}}(q_e, q_p, \dot{q}_e, \dot{q}_p) = m_p \frac{\|\dot{q}_p\|^2}{2} + m_e \frac{\|\dot{q}_e\|^2}{2} + \frac{k}{\|q_e - q_p\|}$$

dove $q_p, q_e \in \mathbb{R}^3$ indicano le posizioni, in un sistema di riferimento inerziale, rispettivamente del protone e dell'elettrone, m_p ed m_e le loro masse mentre k è una costante. Passando al sistema di massa ridotta ed ignorando il moto del centro di massa, dopo un adeguato riscalamento delle variabili si ottiene la lagrangiana del problema di Kepler

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\|\dot{q}\|^2}{2} + \frac{1}{\|q\|}, \quad q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Qui $q = q_e - q_p$ è la posizione relativa dell'elettrone rispetto al protone ma, poiché $\frac{m_e}{m_p} \approx 5,4510^{-4}$, il moto descritto dalla lagrangiana \mathcal{L} si può confondere con il moto dell'elettrone nel sistema del centro di massa.

Si consideri ora l'azione di un debole campo elettromagnetico costante ed omogeneo. La sua debolezza implica la trascurabilità del suo effetto sulla dinamica del protone. Detti $\mathcal{A}(q)$ il potenziale vettore e $\phi(q)$ quello elettrico, supposta unitaria la carica dell'elettrone, la Lagrangiana del problema così semplificato risulta

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\|\dot{q}\|^2}{2} + \frac{1}{\|q\|} + \dot{q} \cdot \mathcal{A}(q) - \phi(q).$$

Il momento coniugato a q è

$$p = \dot{q} + \mathcal{A}(q),$$

tramite la trasformazione di Legendre si ricava la Hamiltoniana

$$H_p(q, p) = \frac{\|p - \mathcal{A}(q)\|^2}{2} - \frac{1}{\|q\|} + \phi(q).$$

Poiché, detti $\hat{\mathcal{E}}$ e $\hat{\mathcal{B}}$ i campi elettrico e magnetico, si ha che

$$\mathcal{A}(q) = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{B}} \times q, \quad \phi(q) = \hat{\mathcal{E}} \cdot q$$

la Hamiltoniana si può anche scrivere

$$\begin{aligned} H_p(q, p) &= \frac{1}{2}\|p - \frac{1}{2}\hat{\mathcal{B}} \times q\|^2 - \frac{1}{\|q\|} + \hat{\mathcal{E}} \cdot q \\ &= H(q, p) + \hat{\mathcal{E}} \cdot q - \frac{1}{2}\hat{\mathcal{B}} \cdot G + \frac{1}{8}\|\hat{\mathcal{B}} \times q\|^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Si osservi che, analogamente a quanto fatto in (1.2) per la Hamiltoniana di Kepler tramite la sostituzione

$$\begin{aligned} q &\longrightarrow \lambda^{-1}q \\ p &\longrightarrow \lambda^{\frac{1}{2}}p \\ t &\longrightarrow \lambda^{-\frac{3}{2}}t \end{aligned} \quad (2.2)$$

con $\lambda > 0$, la forma della Hamiltoniana rimane la (2.1) mentre i campi $\hat{\mathcal{E}}$ e $\hat{\mathcal{B}}$ vengono riscaldati come $\lambda^{-2}\hat{\mathcal{E}}$ e $\lambda^{-\frac{3}{2}}\hat{\mathcal{B}}$ e la superficie di energia $H_p^{-1}(E)$ viene mandata sulla superficie di energia $H_p^{-1}(\frac{E}{\lambda})$. In particolare, scegliendo $\lambda = \left(\frac{\omega}{2}\right)^2$, con $\omega = \sqrt{-2E}$, ci si riduce alla Hamiltoniana

$$H_p(q, p) = H(q, p) + 16\frac{\hat{\mathcal{E}}}{\omega^4} \cdot q - 4\frac{\hat{\mathcal{B}}}{\omega^3} \cdot G + 8\|\frac{\hat{\mathcal{B}}}{\omega^3} \times q\|^2 \quad (2.3)$$

sulla superficie di energia $H_p = -2$. Questo serve, come già osservato, a semplificare i calcoli nella coniugazione tramite Kustaanheimo-Stiefel.

Per $\hat{\mathcal{E}}$ e $\hat{\mathcal{B}}$ abbastanza piccoli, (2.1) è un piccola perturbazione della Hamiltoniana di Kepler H . Precisamente, fissato un valore dell'energia *imperturbata* H e applicando un riscaldamento che permetta di riportarsi su $H = -\frac{1}{2}$, si ha

$$\begin{aligned} \|p\| &= \sqrt{\frac{2}{\|q\|} - 1} \\ \|q\| &\leq 2 \end{aligned}$$

definito $\omega_0 = \sqrt{-2H}$, la perturbazione $\hat{H} = H_p - H$ nelle nuove variabili riscaldate soddisfa, su $H = -\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} |\hat{H}| &\leq \|\frac{\hat{\mathcal{E}}}{\omega_0^4}\| \|q\| + \frac{1}{2}\|\frac{\hat{\mathcal{B}}}{\omega_0^3}\| \|q\| \|p\| + \frac{1}{8}\|\frac{\hat{\mathcal{B}}}{\omega_0^3}\|^2 \|q\|^2 \\ &\leq 2\|\frac{\hat{\mathcal{E}}}{\omega_0^4}\| + \frac{1}{2}\|\frac{\hat{\mathcal{B}}}{\omega_0^3}\| + \frac{1}{2}\|\frac{\hat{\mathcal{B}}}{\omega_0^3}\|^2. \end{aligned}$$

Dunque si ha che

$$\frac{\hat{H}}{H_0} \leq 4 \left\| \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\omega_0^4} \right\| + \left\| \frac{\hat{\mathcal{B}}}{\omega_0^3} \right\| + \left\| \frac{\hat{\mathcal{B}}}{\omega_0^3} \right\|^2$$

e, come piccolo parametro della teoria, si può prendere allora una grandezza dell'ordine di

$$\epsilon = \max \left(\frac{\hat{\mathcal{E}}}{\omega_0^4}, \frac{\hat{\mathcal{B}}}{\omega_0^3} \right).$$

Per studiare il problema non è restrittivo porsi in un sistema di coordinate nel quale $\hat{\mathcal{B}} = (0, 0, \mathcal{B})$ e $\hat{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}, 0, \mathcal{E}')$ ottenendo così la Hamiltoniana

$$H_p(q, p) = H(q, p) + 16 \frac{\mathcal{E}}{\omega^4} q_1 + 16 \frac{\mathcal{E}'}{\omega^4} q_3 - 4 \frac{\mathcal{B}}{\omega^3} G_3 + 8 \left(\frac{\mathcal{B}}{\omega^3} \right)^2 (q_1^2 + q_2^2).$$

Essendo H_p indipendente dal tempo la superficie $H_p^{-1}(-2)$ risulterà invariante per il moto. Si consideri dunque la Hamiltoniana

$$K_p = \|q\| (H + 2).$$

Indicata con $K_{-2}(q, p)$ la Hamiltoniana $\frac{\|q\|}{2} (\|p\|^2 + 4)$, si ha

$$K_p(q, p) = K_{-2}(q, p) + 16 \frac{\mathcal{E}}{\omega^4} \|q\| q_1 + 16 \frac{\mathcal{E}'}{\omega^4} \|q\| q_3 - 4 \frac{\mathcal{B}}{\omega^3} G_3 \|q\| + 8 \left(\frac{\mathcal{B}}{\omega^3} \right)^2 \|q\| (q_1^2 + q_2^2).$$

Come spiegato precedentemente $K_p^{-1}(1) = H_p^{-1}(-2)$ e su tale superficie di livello dell'energia i campi vettoriali delle due Hamiltoniane sono paralleli. Applicando la regolarizzazione di Kustaanheimo-Stiefel si ottiene il sistema definito su $\xi^{-1}(0) \subset T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ dalla Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & H_0 + \frac{\mathcal{E}}{\omega^4} \|u\|^2 (2(u_1 u_3 + u_2 u_4)) + \frac{\mathcal{E}'}{\omega^4} \|u\|^2 (-u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) - \\ & \frac{\mathcal{B}}{\omega^3} G_3 \|u\|^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{B}}{\omega^3} \right)^2 \|u\|^2 (u_1^2 + u_2^2) (u_3^2 + u_4^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

dove

$$H_0 = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|w\|^2)$$

e

$$G_3 = \frac{1}{2} (u_1 w_2 - u_2 w_1 + u_4 w_3 - u_3 w_4).$$

2.2 Le simmetrie nel problema regolarizzato e la riduzione rispetto al flusso Hamiltoniano

Quello che ci si propone di fare ora è caratterizzare gli integrali primi del problema di Kepler riparametrizzato e regolarizzato tramite il metodo di Kustaanheimo-Stiefel che corrispondano al momento angolare ed al vettore di Runge-Lenz. È opportuna una precisazione: il processo di regolarizzazione lavora con la Hamiltoniana K_E la quale definisce un campo vettoriale parallelo a quello Kepleriano *esclusivamente* sulla superficie di energia $H^{-1}(E)$. In particolare gli integrali primi del problema originario non saranno necessariamente integrali primi del problema regolarizzato all'infuori di tale superficie e viceversa. Ciò che si

cercherà saranno dunque integrali primi del problema regolarizzato che si identifichino con gli analoghi delle componenti dei vettori del momento angolare e di Runge-Lenz nel problema originario sulla *superficie di energia comune* ai due sistemi.

Si consideri un polinomio omogeneo di secondo grado p su $T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$

$$p(z) = z^T \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} z$$

dove $A, B, C \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$, con A, B matrici simmetriche. La condizione che p sia integrale primo rispetto ai flussi Hamiltoniani di H_0 e di ξ equivale a richiedere che

$$\begin{aligned} \{p, H_0\} &= 0 \\ \{p, \xi\} &= 0. \end{aligned}$$

La prima condizione può essere riscritta come

$$\begin{aligned} B &= A \\ C^T &= -C. \end{aligned}$$

La seconda condizione, se si scrivono le matrici A, B e C nella forma a blocchi

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

con $\alpha_{ij} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, vincola ogni matrice α_{ij} ad essere del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Da questi due fatti segue che, scritto $z = (u, w) \in T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$, p è combinazione lineare degli otto polinomi

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|w\|^2) \\ G_i &= \frac{1}{2} (L_{jk} + L_{4i}), \text{ con } i, j, k \text{ permutazione ciclica di } 1 \dots 3 \quad i = 1, 2, 3 \\ A_i &= -\frac{1}{4} (M(u)u + M(w)w)_i \quad i = 1, 2, 3 \\ \xi &= u_1 w_2 - u_2 w_1 + u_3 w_4 - u_4 w_3 \end{aligned}$$

dove $L_{\mu\nu} = u_\mu w_\nu - u_\nu w_\mu$. Inoltre si ha che qualunque funzione di classe C^∞ integrale primo rispetto ai flussi di H_0 e ξ è funzione esclusivamente di H, G, A e ξ . Si osservi che questi polinomi non sono indipendenti in quanto risulta

$$\begin{aligned} \|A\|^2 + \|G\|^2 &= \left(\frac{H_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 \\ G \cdot A &= \frac{1}{4} \xi \cdot H_0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Fra questi polinomi le uniche regole di commutazione non banali sono

$$\begin{aligned} \{A_i, A_j\} &= \epsilon_{ijk} G_k \\ \{G_i, G_j\} &= \epsilon_{ijk} G_k \\ \{A_i, G_j\} &= \epsilon_{ijk} A_k. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Questo permette di identificare, su $\xi^{-1}(0)$, G con il vettore momento angolare ed A con il vettore di Runge-Lenz per il sistema di Keplero regolarizzato.

Risulta utile inoltre introdurre due nuovi integrali primi X^+ e X^- in luogo di A e G , ad essi legati dalla relazione

$$X^\pm = \frac{1}{2} (G \pm A) \quad (2.7)$$

ovvero

$$\begin{aligned} G &= X^+ + X^- \\ A &= X^+ - X^- . \end{aligned}$$

I vincoli (2.5) diventano

$$(X^\pm)^2 = \left(\frac{G \pm A}{2} \right)^2 = \frac{G^2 \pm 2G \cdot A + A^2}{4} = \left(\frac{H_0 \pm \xi}{4} \right)^2 \quad (2.8)$$

mentre le parentesi di Poisson, calcolate grazie alle (2.6), risultano:

$$\begin{aligned} \{X_i^\pm, X_j^\pm\} &= \epsilon_{ijk} X_k^\pm \\ \{X_i^+, X_j^-\} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si osservi che il flusso di H_0 definisce, su $T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$, un'azione di \mathbb{S}^1 libera e propria ed inoltre, poiché H_0 e ξ commutano, la mappa

$$T = (H_0, \xi) : T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definisce un'azione libera e propria di \mathbb{T}^2 . È allora possibile, analogamente a quanto fatto per ξ nel precedente capitolo, applicare il procedimento di riduzione tramite tale azione.

Teorema 3. *Sia $(\hat{H}_0, \hat{\xi})$ valore regolare per T tale che $|\hat{H}_0| \neq |\hat{\xi}|$, sia $\sim_{\mathbb{T}^2}$ la relazione di equivalenza data dall'appartenere alle orbite dell'azione considerata di \mathbb{T}^2 . Allora $N = T^{-1}(\hat{H}_0, \hat{\xi}) / \sim_{\mathbb{T}^2}$, dotato della struttura simplettica ereditata dalla riduzione da $T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$, è simplettomorfo a $\mathbb{S}_{N^+}^2 \times \mathbb{S}_{N^-}^2 \ni (X^+, X^-)$ (dove \mathbb{S}_R^2 sta ad indicare la sfera bidimensionale di raggio R) dotato dalla struttura simplettica data dalla 2-forma*

$$\omega_r = N^+ Vol^+ + N^- Vol^-$$

dove $Vol^\pm = \frac{1}{N^\pm} (X_1^\pm dX_2^\pm \wedge dX_3^\pm + X_2^\pm dX_3^\pm \wedge dX_1^\pm + X_3^\pm dX_1^\pm \wedge dX_2^\pm)$ indica la 2-forma volume su $\mathbb{S}_{N^\pm}^2$ e dove si è posto $N^\pm = \frac{1}{4} |\hat{H}_0 \pm \hat{\xi}|$.

Dimostrazione. Si definisca $\hat{N} = T^{-1}(\hat{H}_0, \hat{\xi})$. Per quanto detto gli invarianti dell'azione del flusso di T , fissati i valori di H_0 e ξ , sono tutte e sole le funzioni di X^+ ed X^- . Scegliendo le componenti di queste ultime quali coordinate dello spazio ridotto N si ha che esso è contenuto, in virtù delle (2.8), in $\mathbb{S}_{N^+}^2 \times \mathbb{S}_{N^-}^2$ con

$$N^\pm = \frac{|\hat{H}_0 \pm \hat{\xi}|}{4} .$$

Per mostrare che effettivamente $N = \mathbb{S}_{N^+}^2 \times \mathbb{S}_{N^-}^2$ si consideri la funzione Hamiltoniana $J = k^+ \cdot X^+ + k^- \cdot X^-$ dove $k^+, k^- \in \mathbb{R}^3$ sono fissati. Il flusso generato lascia invariato \hat{N} ed inoltre, sfruttando le regole di commutazione (2.9), risulta che

$$\frac{dX^\pm \circ \Phi_J^t}{dt} \Big|_{t=0} = k^\pm \times X^\pm$$

equivalentemente

$$X^\pm \circ \Phi_J^t = \mathbf{R}_{tk^\pm} X^\pm$$

dove $\mathbf{R}_v \in SO(3)$ indica la rotazione di asse v ed angolo $\|v\|$ (e ponendo per definizione $\mathbf{R}_0 = \mathbb{I}$). Se dunque $\tilde{z} \in N$ è arbitrario e $\tilde{X}^\pm = X^\pm(\tilde{z})$, qualunque sia $(\hat{X}^+, \hat{X}^-) \in \mathbb{S}_{N^+}^2 \times \mathbb{S}_{N^-}^2$ siano $k^+, k^- \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{R}_{k^\pm} \tilde{X}^\pm = \hat{X}^\pm$ e si definisca $\hat{z} = \Phi_{k^+, X^+ + k^-, X^-}^1(\tilde{z})$ (si osservi che poiché \hat{N} è compatta il flusso generato da $k^+ \cdot X^+ + k^- \cdot X^-$ è completo e quindi \hat{z} è ben definita) si avrà che $\hat{X}^\pm = X^\pm(\hat{z})$ il che prova la suriettività della mappa (X^+, X^-) su $\mathbb{S}_{N^+}^2 \times \mathbb{S}_{N^-}^2$. Le regole di commutazione (2.9) definiscono inoltre la struttura simplettica indotta su $\mathbb{S}_{N^+}^2 \times \mathbb{S}_{N^-}^2$, che risulta essere quella espressa nell'enunciato. \square

Quanto è stato fatto in questa sezione tornerà utile quando si lavorerà con le forme normali troncate della Hamiltoniana del problema di Keplero perturbato nelle coordinate di Kustaanheimo-Stiefel. Tali forme commutano con la Hamiltoniana di Keplero e dunque possono essere proiettate sullo spazio ridotto e viste come funzioni delle nuove coordinate X^\pm . Per concludere si osservi che nel caso in studio $\xi = 0$, dunque risulta $N = \mathbb{S}_{\frac{1}{4}H_0}^2 \times \mathbb{S}_{\frac{1}{4}H_0}^2$, abbreviato nel seguito con $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ (il vincolo $H_0 \neq 0$ è automaticamente soddisfatto su $T^*(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$).

Capitolo 3

Forme normali

Per studiare il problema si costruiscono delle forme normali, procedendo in due passi. Prima si media la Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno perturbato rispetto al flusso Kepleriano. La forma normale così ottenuta è a sua volta una piccola perturbazione di un sistema integrabile, e può essere mediata una seconda volta rispetto ad esso. Questo procedimento produce delle forme normali ad un grado di libertà.

3.1 Costruzione della prima forma normale

Il primo passo nella costruzione delle forme normali consiste nel mediare la Hamiltoniana perturbata $\tilde{H} = H_0 + H_1$ come in (2.4) rispetto al flusso di H_0 . Questo significa trovare una trasformazione canonica che coniughi

$$\tilde{H} = H_0 + H_1$$

con una nuova Hamiltoniana

$$\tilde{H}_1 = H_0 + \bar{H}_1 + H_2 \tag{3.1}$$

tale che

$$\begin{aligned} \{\bar{H}_1, H_0\} &= 0 \\ H_2 &= o(H_1) . \end{aligned}$$

Il resto si può rendere piccolo a piacimento, fintanto sono soddisfatte alcune condizioni, e in particolare, nell'idea della teoria di Nekhoroshev, esponenzialmente piccolo nel parametro perturbativo.

Proposizione 3. *Esiste una costante positiva $\hat{\epsilon}$ tale che, se $\epsilon < \hat{\epsilon}$, è possibile trovare una trasformazione canonica Φ la quale permette di coniugare, in un intorno della superficie di energia $\tilde{H}^{-1}(1)$ la Hamiltoniana \tilde{H} alla Hamiltoniana $\tilde{H}_r := \Phi^* \tilde{H}$ definita da*

$$\tilde{H}_r = H_0 + \bar{\bar{H}}_1 + \hat{H}_2 .$$

Quest'ultima è tale che $\{\bar{\bar{H}}_1, H_0\} = 0$, $\bar{\bar{H}}_1$ risulta essere una perturbazione di \bar{H}_1 mentre la sup-norma sul dominio, laddove è definita, di \hat{H}_2 è dell'ordine di $\epsilon \exp(-\hat{\epsilon}/\epsilon)$.

Il processo, la cui dimostrazione è qui accennata, si basa sulla reiterazione di un passo base che coniuga fra loro due Hamiltoniane in forma normale con un resto non normalizzato. Se le condizioni nelle quali si opera sono scelte accuratamente l'entità del resto della seconda Hamiltoniana risulterà minore di quello della prima. Innanzitutto un modo comune per definire il singolo passo perturbativo è il metodo di Lie, nel quale la trasformazione canonica che coniuga le due Hamiltoniane è data dal flusso al tempo 1, Φ_χ^1 , di una terza funzione Hamiltoniana χ opportunamente scelta.

Si supponga che il flusso H_0 definisca un'azione di \mathbb{T}^n sullo spazio delle fasi e sia \bar{H}_1 la media di H_1 sulle orbite di H_0 . Allora ovviamente vale $\{\bar{H}_1, H_0\} = 0$. Se χ è una funzione, allora

$$\tilde{H} \circ \Phi_\chi^1 = H_0 + (H_1 + L_\chi H_0) + L_\chi H_1 + o(\chi^2).$$

Pertanto se χ soddisfa

$$L_{H_0} \chi = H_1 - \bar{H}_1 \quad (3.2)$$

allora $\bar{H}_1 = \tilde{H} \circ \Phi_\chi^1$ soddisfa (3.1) con $H_2 = L_\chi H_1 + o(\chi^2)$. Questo risultato va precisato nel caso in cui H_0 definisca un'azione di \mathbb{S}^1 , ciò che avviene se il flusso di H_0 è periodico con periodo continuo e positivo. In particolare si ha (si veda per esempio [4])

Lemma 3.1.1. *Se H_0 definisce una azione di \mathbb{S}^1 , ovvero le orbite di H_0 sono periodiche con periodo continuo sullo spazio delle fasi, detto T il periodo delle orbite (omessa la dipendenza di T dai punti dello spazio delle fasi) allora detta*

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T H_1 \circ \Phi_{H_0}^s ds$$

una Hamiltoniana χ che risolva (3.2) è data da

$$\chi = \frac{1}{T} \int_0^T s (H_1 - \bar{H}_1) \circ \Phi_{H_0}^s ds$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F} = H_1 - \bar{H}_1$ e si osservi che $\bar{\mathcal{F}} = 0$. Allora

$$\begin{aligned} L_{H_0} \chi &= \left. \frac{d\chi(\Phi_{H_0}^t)}{ds} \right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T s \left. \frac{d(\mathcal{F} \circ \Phi_{H_0}^{s+t})}{dt} \right|_{t=0} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T s \nabla \mathcal{F}(\Phi_{H_0}^s) \cdot X_{H_0}(\Phi_{H_0}^s) ds \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T s L_{H_0}(\mathcal{F} \circ \Phi_{H_0}^s) ds \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T s \frac{d(\mathcal{F} \circ \Phi_{H_0}^s)}{ds} ds \\ &= \frac{1}{T} s \mathcal{F} \circ \Phi_{H_0}^s \Big|_{s=0}^T - \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{F} \circ \Phi_{H_0}^s ds \\ &= \mathcal{F} = H_1 - \bar{H}_1 \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che, data la periodicità del flusso di H_0 , si ha che $\Phi_{H_0}^T = 0$ ed il fatto che \mathcal{F} ha media nulla sulle orbite di H_0 . \square

A questo punto si reitera questo processo di media controllando ad ogni passo, con tecniche analoghe a quelle che verranno presentate nel capitolo 5, l'entità del resto che si genera. Si pongono infine condizioni per le quali quest'ultimo sia piccolo come da enunciato.

3.2 Studio della prima forma normale

Verrà determinata ora la forma normale (3.1) per la Hamiltoniana \tilde{H} dell'atomo di idrogeno perturbato dato da (2.4). Si definiscano le seguenti grandezze:

$$a = -\frac{3\mathcal{E}}{\omega^4}, \quad b = -\frac{3\mathcal{E}'}{\omega^4}, \quad c = -\frac{\mathcal{B}}{\omega^3}, \quad \epsilon = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il parametro ϵ (che risulta essere dell'ordine di grandezza adeguato perché si possa considerare il sistema una perturbazione di H_0 , come visto nel capitolo precedente) misura la forza del campo elettromagnetico ed è il piccolo parametro della teoria. Si noti che a , b e c indicano la predominanza delle singole componenti del campo elettromagnetico rispetto alle altre (rispettivamente a per la componente del campo elettrico ortogonale al campo magnetico, b per la componente del campo elettrico parallela al campo magnetico e c per il campo magnetico). La Hamiltoniana \tilde{H} si può scrivere nella forma $\tilde{H} = H_0 + H_1$ con

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|w\|^2) \\ H_1 &= \left(-\frac{a}{3} \|u\|^2 (2(u_1 u_3 + u_2 u_4)) - \frac{b}{3} \|u\|^2 (-u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) + cG_3 \|u\|^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{c^2}{2} \|u\|^2 (u_1^2 + u_2^2) (u_3^2 + u_4^2) \right). \end{aligned}$$

Un semplice calcolo mostra che

$$\frac{1}{T} \int_0^T \|u\|^2 \circ \Phi_{H_0}^s ds = H_0$$

ed un calcolo un po' più laborioso mostra invece che

$$\frac{1}{T} \int_0^T \|u\|^2 M(u) u \circ \Phi_{H_0}^s ds = -3H_0 A + \xi G.$$

Di conseguenza su $\xi^{-1}(0)$

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T H_1 \circ \Phi_{H_0}^s ds = H_0 (aA_1 + bA_3 + cG_3) + o(\epsilon) \\ &= H_0 (v^+ \cdot X^+ + v^- \cdot X^-) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

dove

$$v^\pm = \begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \\ c \pm a \end{pmatrix}$$

e le X^\pm sono state definite in (2.7).

Si studi ora la Hamiltoniana normalizzata troncata al primo ordine in ϵ

$$\tilde{H}'_1 = H_0 + \bar{H}'_1,$$

dove $\bar{H}'_1 = H_0(v^+ \cdot X^+ + v^- \cdot X^-)$, che si può ovviamente riguardare come definita sullo spazio ridotto N descritto alla fine del precedente capitolo. Anzi, poiché H_0 è costante sullo spazio ridotto, ci si può limitare a considerare la Hamiltoniana \bar{H}'_1 su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

Per studiare \bar{H}'_1 è opportuno riscriverla in nuove coordinate. Si osservi che, date $R^+, R^- \in SO(3)$, $Y^\pm = R^\pm X^\pm$ sono ancora coordinate simpletiche su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ (poiché le rotazioni lasciano invariata la 2-forma volume). Si scelgano allora R^\pm in modo che, posto

$$\alpha^\pm := \|v^\pm\| = \sqrt{a^2 + (b \pm c)^2} = \epsilon \sqrt{1 \pm 2 \frac{bc}{\epsilon^2}}$$

si abbia $v^+ \cdot X^+ + v^- \cdot X^- = \alpha^+ Y_1^+ + \alpha^- Y_1^-$ e dunque $\bar{H}'_1 = H_0(\alpha^+ Y_1^+ + \alpha^- Y_1^-)$. La forma esplicita di tali matrici è data da

$$R^\pm = \begin{pmatrix} \frac{\pm a}{\alpha^\pm} & 0 & \frac{b \pm c}{\alpha^\pm} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-b \mp c}{\alpha^\pm} & 0 & \frac{\pm a}{\alpha^\pm} \end{pmatrix}.$$

L'uso delle coordinate Y^\pm rende facile la determinazione del flusso di \tilde{H}'_1 su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Usando le regole di commutazione per le Y^\pm si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dY_1^\pm}{ds} &= 0 \\ \frac{dY_2^\pm}{ds} &= -(\alpha^\pm H_0) Y_3^\pm \\ \frac{dY_3^\pm}{ds} &= (\alpha^\pm H_0) Y_2^\pm, \end{aligned}$$

ovvero Y^+ ruota attorno al primo asse con velocità angolare $\alpha^+ H_0$ e analogamente Y^- ruota attorno al primo asse con velocità angolare $\alpha^- H_0$. Dunque, H'_1 è la Hamiltoniana di un sistema integrabile isocrono, ma a seconda del valore di α^\pm possono presentarsi due situazioni:

- $\alpha^+/\alpha^- \in \mathbb{Q}$ oppure $\alpha^- = 0$: il flusso di H'_1 è periodico e definisce un'azione di \mathbb{S}^1 su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ (si parla in questo caso di frequenze risonanti).
- $\alpha^- \neq 0$ e $\alpha^+/\alpha^- \notin \mathbb{Q}$: il flusso di H'_1 è quasi-periodico e definisce un'azione di \mathbb{T}^2 su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ (si parla in questo caso di frequenze non risonanti).

Casi di particolare interesse fisico, nei quali il flusso di H'_1 è periodico, comprendono:

- Effetto Stark: L'atomo è immerso in un campo esclusivamente elettrico. Allora $c = 0$ e poiché non vi è distinzione fra a e b , si può porre $b = 0$, cosicché $\alpha^\pm = |a|$.
- Effetto Zeeman: L'atomo è immerso in un campo esclusivamente magnetico, $a = b = 0$ e $\alpha^\pm = |c|$.

- Campi ortogonali: Il campo elettromagnetico soddisfa la condizione $\mathcal{E} \cdot \mathcal{B} = 0$, ovvero $b = 0$ e $\alpha^\pm = \sqrt{a^2 + c^2}$.
- Campi paralleli: \mathcal{E} e \mathcal{B} sono paralleli, ovvero $a = 0$ e inoltre $b = c$. Si ha allora $\alpha^- = 0$ (ovvero X^- è integrale primo anche di H_1^+).

Si osservi che utilizzando la terminologia che si ritrova in [9], dove si parla di risonanza $k_1 : k_2$ quando

$$\alpha^+ k_2 = \alpha^- k_1,$$

nei primi tre casi si ha risonanza $1 : 1$, nell'ultimo risonanza $1 : 0$.

Poiché il problema di Hamiltoniana \bar{H}_1 è integrabile ha senso studiare il problema perturbato normalizzato e troncato agli ordini perturbativi successivi quale perturbazione di \bar{H}_1 su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, per fare ciò bisogna però trattare il problema delle risonanze che avvengono quando α^+ e α^- sono reciprocamente razionali. Per prima cosa conviene portare il problema in coordinate azione-angolo. Sia

$$\tau : \begin{array}{ccc}]-N, N[\times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (I, \phi) & \longmapsto & \tau(I, \phi) \end{array},$$

posto $N = \frac{H_0}{4}$, definita da

$$\tau(I, \phi) = (\tau_1(I, \phi), \tau_2(I, \phi), \tau_3(I, \phi))$$

dove

$$\begin{aligned} \tau_1 &= I \\ \tau_2 &= \sqrt{N^2 - I^2} \cos(\phi) \\ \tau_3 &= \sqrt{N^2 - I^2} \sin(\phi) \end{aligned}$$

Sia $\mathcal{S} =]-N, N[\times]-N, N[$

Proposizione 4. *La mappa $\hat{\tau} = \tau \times \tau : \mathcal{S} \times \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ è un diffeomorfismo sulla sua immagine $(\mathbb{S}_N^2 \setminus \{(\pm N, 0, 0)\}) \times (\mathbb{S}_N^2 \setminus \{(\pm N, 0, 0)\})$ che, dette (I_1, I_2) le coordinate su \mathcal{S} e (ϕ_1, ϕ_2) le coordinate su \mathbb{T}^2 , soddisfa*

$$\hat{\tau}^* \omega_r = d\phi_1 \wedge dI_1 + d\phi_2 \wedge dI_2.$$

Dimostrazione. Per brevità si definisca $\hat{\mathbb{S}}_N^2 = \mathbb{S}_N^2 \setminus \{(N, 0, 0), (-N, 0, 0)\}$ l'immagine di τ è contenuta in $\hat{\mathbb{S}}_N^2 \times \hat{\mathbb{S}}_N^2$ infatti un calcolo immediato mostra che $\|\tau\| = N$ e $|\tau_1| < N$. Definita

$$\rho : \begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{S}}_N^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \\ Y & \longmapsto & \rho(Y) \end{array}$$

tramite

$$\rho(Y) = (Y_1, \arg(Y_2 + iY_3^\pm))$$

si vede che la sua immagine è $]-N, N[\times \mathbb{S}^1$ ed inoltre

$$\begin{aligned} \rho^\pm \circ \tau &= id_{\hat{\mathbb{S}}_N^2} \\ \tau^\pm \circ \rho &= id_{]-N, N[\times \mathbb{S}^1}. \end{aligned}$$

Questo, unito alla regolarità di τ e ρ indica che τ (e quindi τ) è un diffeomorfismo. La simpletticità della trasformazione si ricava mediante un semplice calcolo delle parentesi di Poisson fondamentali. \square

Quanto dimostrato permette di coniugare lo spazio ridotto delle fasi (privato dei poli delle sfere) con lo spazio $\mathcal{S} \times \mathbb{T}^2$ e la Hamiltoniana \bar{H}'_1 in tale spazio risulta un sistema integrabile isocrono espresso in coordinate azione-angolo:

$$\tau^* \bar{H}'_1(I, \phi) = \omega \cdot I$$

dove $I = (I_1, I_2) \in \mathcal{S}$ e $\omega = (H_0\alpha^+, H_0\alpha^-)$.

Osservazione. L'eliminazione dei poli delle sfere dalla descrizione della dinamica, necessaria se si vogliono utilizzare coordinate azione angolo, non è pienamente soddisfacente. Un modo per evitarla è quella di considerare, su ciascun \mathbb{S}^2 , un atlante simplettico composto da due sistemi di coordinate simplettiche, ciascuno definito in un intorno di uno dei poli, sulle quali \bar{H}'_1 diventa un oscillatore armonico. Questo si fa per mezzo delle mappe $\phi^i : \mathcal{D}_N \rightarrow \mathbb{S}^2$ $i = 1, 2$, con $\mathcal{D}_N = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 \mid q^2 + p^2 < 2N\}$, le cui espressioni sono

$$\phi^1(q, p) = \left(\frac{1}{2}(q^2 + p^2) - N, \sqrt{\frac{4N^2 - (q^2 + p^2 - 2N)^2}{4(q^2 + p^2)}} p, \sqrt{\frac{4N^2 - (q^2 + p^2 - 2N)^2}{4(q^2 + p^2)}} q \right)$$

e

$$\phi^2(q, p) = \left(N - \frac{1}{2}(q^2 + p^2), \sqrt{\frac{4N^2 - (q^2 + p^2 - 2N)^2}{4(q^2 + p^2)}} q, \sqrt{\frac{4N^2 - (q^2 + p^2 - 2N)^2}{4(q^2 + p^2)}} p \right).$$

In queste nuove coordinate la Hamiltoniana assume la forma

$$\bar{H}'_1 = NH_0(\alpha^+ + \alpha^-) \pm \frac{1}{2}(H_0\alpha^+(q_1^2 + p_1^2) + H_0\alpha^-(q_2^2 + p_2^2))$$

la quale rappresenta (a meno di una costante trascurabile) la Hamiltoniana di un oscillatore armonico (il segno varia a seconda della carta in cui ci si pone, ma è ininfluente ai fini dello studio del moto). La costruzione delle forme normali, che verrà sviluppata nel prossimo capitolo, potrebbe essere eseguita anche utilizzando queste coordinate di tipo cartesiano (si veda ad esempio [13] oppure [14]). Qui saranno utilizzate coordinate azione-angolo solo per semplicità.

3.3 La seconda forma normale

Ci si è ricondotti ad un sistema isocrono perturbato a due gradi di libertà coniugato, a meno di un resto esponenzialmente piccolo, al problema originario. Si può ora applicare, analogamente a quanto fatto nella sezione precedente per il flusso Kepleriano, un procedimento di media, rispetto al flusso della parte integrabile \bar{H}'_1 di \bar{H}_r , detto di "seconda normalizzazione". Lo scopo di ciò consiste nel coniugare \bar{H}_r con una Hamiltoniana la quale risulti, a meno di un resto trascurabile, in forma normale rispetto ad una adeguata risonanza. La novità rispetto al processo di prima normalizzazione consiste nel fatto che le frequenze imperturbate non sono fissate, ma dipendono dai parametri del campo. Questo pone delle difficoltà nel decidere rispetto a quali risonanze sia conveniente adattare le forme normali generate, nel caso in cui le frequenze siano non risonanti, al fine di ottenere un resto non normalizzato di entità trascurabile. In particolare, poiché i contributi delle armoniche della perturbazione alla norma

di quest'ultima decrescono esponenzialmente con il crescere delle frequenze, è possibile fissare un parametro N , detto di cut-off. Esso divide la perturbazione in una parte ultravioletta che, in quanto di norma trascurabile, non viene normalizzata, ed in una parte infrarossa, la quale viene normalizzata. Poiché nella parte infrarossa le armoniche non nulle sono finite, sarà finito il numero di risonanze che possono influenzare, tramite il problema dei piccoli denominatori, il processo di media. Tali risonanze possono essere rappresentate, nello spazio (bidimensionale) delle frequenze, da rette. Attorno ad esse, e disgiunte le une dalle altre, si definiscono delle zone risonanti. Tale costruzione, tipica nella teoria di Nekhoroshev, viene detta geometria delle risonanze. Quando una frequenza imperturbata si trova all'interno di una di queste zone la forma normale risultante viene costruita rispetto alla corrispondente risonanza, mentre se la frequenza si trova all'esterno di tutte le risonanze si costruisce una forma normale non risonante. Si osservi che al crescere del cut-off, nel caso si voglia far decrescere il resto non normalizzato, il numero delle risonanze cresce, cosicché la risonanza al quale è legata una data frequenza (a meno che non sia essa stessa esattamente risonante, come accade appunto per la prima normalizzazione) può variare. La scelta delle zone risonanti viene fatta in maniera tale da controllare piccoli denominatori nel processo di media.

Nella prossima sezione si costruirà la teoria che sta alla base della normalizzazione concludendo con dei risultati riassumibili nei due enunciati

Teorema 4. *Sia $\tilde{H}_r = \omega \cdot I + v(I, \phi)$ la Hamiltoniana ridotta del problema di Kepler perturbato in coordinate azione-angolo (la dipendenza da ϵ è stata omissa). Esistono delle costanti positive $\tilde{\epsilon}$, γ ed N tali che, se $\epsilon \leq \tilde{\epsilon}$, esiste un cambiamento di coordinate canonico Φ tale che*

$$\Phi^* h = \omega \cdot I + u(I, \phi) + v'(I, \phi)$$

con u normale rispetto ad particolare risonanza, dipendente da ω , di ordine minore di N e tale che $u = O(v)$. Mentre $v' = O(\exp(-\tilde{\epsilon}/\epsilon)v)$. Il valore di cut-off N risulta dell'ordine di $\tilde{\epsilon}/\epsilon$

Teorema 5. *Usando per \tilde{H}_r , ω , v le stesse notazioni del teorema precedente e fissata una costante m , esistono delle costanti positive $\tilde{\epsilon}$ ed N tali che, se $\epsilon \leq \tilde{\epsilon}m^{-2}$, esiste un cambiamento di coordinate canonico Φ tale che*

$$\Phi^* h = \omega \cdot I + u(I, \phi) + v'(I, \phi)$$

con u normale rispetto ad particolare risonanza, dipendente da ω , di ordine minore di N e tale che $u = O(v)$. Mentre $v' = O(\exp(-m)v)$. Il valore di cut-off N risulta dell'ordine di m

Mentre nel prossimo capitolo si studieranno in dettaglio le dimostrazioni e si renderà preciso il significato delle espressioni contenute negli enunciati, può però essere subito data un'interpretazione fisica. Il primo è un risultato in linea con la teoria classica di Nekhoroshev dove si cerca, indipendentemente dalle risonanze presenti, di ridurre il più possibile il resto non normalizzato. Il problema con questo approccio, se ci si pone in un ottica pratica, consiste nella crescita del valore di cut-off con l'avvicinarsi a 0 della perturbazione. Questo ha come effetto la comparsa di nuove risonanze che rendono complessa la geometria delle risonanze (esse formano un insieme denso quando ϵ tende a 0). Nella

realtà ha tuttavia presumibilmente senso pensare che esista una scala di tempo caratteristica del sistema (che potrebbe ad esempio essere dell'ordine del periodo del problema imperturbato) e quindi si richieda che la forma normale approssimi il problema reale esclusivamente entro tale scala di tempo. Questo si traduce nel porre un valore limite, indicato con m nel secondo teorema, per la norma della parte non normalizzata al di sotto del quale non è necessario spingersi. In tal caso si osserva come le risonanze che entrano in gioco nel sistema siano poche fintanto che si mantenga basso il tempo caratteristico del sistema e l'entità della perturbazione.

Capitolo 4

Costruzione della seconda forma normale

In questa sezione Verrà sviluppato l'apparato necessario alla dimostrazione dei due teoremi presentati alla fine del capitolo precedente. I risultati ottenuti si possono ritrovare, lievemente modificati in [2], [11], [13] e [14].

4.1 Notazioni

Nel seguito \mathcal{A} rappresenterà un aperto di \mathbb{R}^n , ρ_I e ρ_ϕ costanti positive (si parlerà d'ora in poi più brevemente di vettore d'estensione $\rho = (\rho_I, \rho_\phi)$). Da questi si definiranno

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\rho &= \{I \in \mathbb{C}^n \mid \|I - \mathcal{A}\| < \rho_I\} \\ \mathcal{S}_\rho &= \{\phi \in \mathbb{C}^n \mid |Im(\phi)| < \rho_\phi\} / \mathbb{Z}^n \\ \mathcal{D}_\rho &= \mathcal{A}_\rho \times \mathcal{S}_\rho \end{cases}$$

dove si intende che \mathcal{S}_ρ può essere descritto come l'insieme dei numeri complessi con parte immaginaria minore, in valore assoluto, di ρ_ϕ identificando inoltre due elementi se la loro differenza appartiene a \mathbb{Z}^n . D'ora in avanti si intenderà che una funzione definita su \mathcal{D}_ρ sarà anche analitica ed inoltre assumerà su $\mathcal{A} \times \mathbb{T}^n$ valori reali (nel caso di funzioni a valori in \mathbb{C}^n si intenderà che reali saranno i valori delle singole componenti, mentre per funzioni a valori in $\mathcal{D}'_{\rho'} = \mathcal{A}'_{\rho'} \times \mathcal{S}_{\rho'}$ si richiederà che l'immagine di $\mathcal{A} \times \mathbb{T}^n$ sia contenuta in $\mathcal{A}' \times \mathbb{T}^n$).

Per funzioni analitiche $f : \mathcal{D}_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ si userà la norma

$$|f|_\rho^\infty = \sup\{|f(z)| \mid z \in \mathcal{D}_\rho\}.$$

Inoltre, essendo possibile esprimere f come somma della sua serie di Fourier nelle variabili angolo, detta tale serie

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} f_\nu$$

con

$$f_\nu(I, \phi) = \hat{f}_\nu(I) e^{i\nu \cdot \phi},$$

si definirà l'ulteriore norma

$$|f|_\rho = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |f_\nu|_\rho^\infty.$$

È noto che, se f è analitica in \mathcal{D}_ρ , allora $|f|_\rho < \infty$, è immediato constatare inoltre che $|f|_\rho^\infty \leq |f|_\rho$ per ogni f e ρ .

Similmente verranno introdotte delle norme per campi vettoriali su \mathcal{D}_ρ . Fissato una volta per tutte un vettore d'estensione $R = (R_I, R_\phi)$ dato un campo vettoriale analitico X su \mathcal{D}_ρ , $\rho \leq R$ (la disuguaglianza va intesa componente per componente, in questo caso significa $\rho_I \leq R_I$ e $\rho_\phi \leq R_\phi$), si porrà

$$\dagger X \dagger_\rho^\infty = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{|X^{I_i}|_\rho^\infty}{R_I}, \frac{|X^{\phi_i}|_\rho^\infty}{R_\phi} \right\}$$

e

$$\dagger X \dagger_\rho = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \dagger X_\nu \dagger_\rho^\infty.$$

Ovviamente vale anche qui la relazione $\dagger X \dagger_\rho^\infty \leq |X|_\rho$.

Se $\Phi = \Phi_X^1$ è un la mappa al tempo uno del flusso di un campo vettoriale X , e f è una funzione a valori in \mathbb{C} , si ha lo sviluppo formale

$$\Phi^* f = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{L_X^s f}{s!}$$

dove con $L_X f$ si indica la derivata di Lie di f lungo X :

$$L_X f = \frac{d(f \circ \Phi_X^t)}{dt} \Big|_{t=0}$$

e

$$\begin{aligned} L_X^s f &= L_X(L_X^{s-1} f) \quad s = 1, 2, \dots \\ L_X^0 f &= f. \end{aligned}$$

Se k è un intero positivo si indicherà con $R_X^k(f)$ il resto di ordine k di questo sviluppo in serie, ovvero:

$$R_X^k(f) = \sum_{s=k}^{+\infty} \frac{L_X^s f}{s!}.$$

Dunque si avrà, ad esempio:

$$\Phi^* f = f + R_X^1(f) = f + L_X(f) + R_X^2(f).$$

Analogamente se Y è un campo vettoriale si ha

$$\Phi^* Y = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{L_X^s Y}{s!}$$

dove in questo caso $L_X Y$ è la derivata di Lie, cioè il campo vettoriale di componenti

$$(L_X Y)^a = L_X(Y^a) - L_Y(X^a), \quad a = 1, \dots, 2n$$

e, analogamente a prima,

$$\begin{aligned} L_X^s Y &= L_X(L_X^{s-1} Y) \quad s = 1, 2, \dots \\ L_X^0 Y &= Y. \end{aligned}$$

Per i resti $R_X^k(Y)$ si danno analoghe definizioni a quelle date per $R_X^k(f)$.

Nel seguito si lavorerà con \mathbb{Z} -moduli di \mathbb{Z}^n . Un insieme Λ è detto \mathbb{Z} -modulo di \mathbb{Z}^n (“reticolo”) se

$$\forall \nu, \nu' \in \Lambda, k \in \mathbb{Z} \quad \nu + k\nu' \in \Lambda.$$

La dimensione di un reticolo Λ è il numero minimo di elementi di Λ (una “base”) necessari a generare Λ (ovvero ogni elemento di Λ è una combinazione lineare a coefficienti in \mathbb{Z} degli elementi di una base). Un reticolo Λ è detto massimale se non è contenuto propriamente in alcun altro reticolo della medesima dimensionalità. Se N è un intero non negativo un N -reticolo è un reticolo per cui esista una base i cui elementi abbiano tutti norma che non superi N , qualora \mathbb{Z}^n venga dotato della seguente norma:

$$|\nu| = |\nu_1| + \dots + |\nu_n|.$$

Nel caso concreto del problema di Kepler, nel quale $n = 2$ si lavorerà in \mathbb{Z}^2 con N -reticoli massimali, in tal caso si avranno 3 possibilità:

- $\Lambda = \mathbb{Z}^2$
- $\Lambda = \{0\}$
- $\Lambda = \nu\mathbb{Z}$

dove $\nu = (\nu_1, \nu_2) \neq 0$ può essere scelto nel primo o nel secondo quadrante in modo tale che

- $|\nu_1| + |\nu_2| \leq N$
- $GCD(\nu_1, \nu_2) = 1$.

Se Λ è un reticolo viene definito un operatore lineare Π_Λ che ad una funzione f associ la funzione $\Pi_\Lambda f$ tale che:

$$\Pi_\Lambda f = \sum_{\nu \in \Lambda} f_\nu.$$

Analogamente per i campi vettoriali verrà definito un operatore lineare, detto ancora Π_Λ , che ad ogni campo vettoriale X associ un campo vettoriale $\Pi_\Lambda X$ tale che

$$\Pi_\Lambda X = \sum_{\nu \in \Lambda} X_\nu.$$

Fissato un intero non negativo N verrà definito un altro operatore lineare T_N tale che ad ogni funzione f (risp. campo vettoriale X) associ una funzione $T_N f$ (risp. campo vettoriale $T_N X$) definita dalle armoniche di ordine minore di N di f (risp. X) ovvero

$$T_N f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n, |\nu| \leq N} f_\nu$$

(similmente viene definito $T_N X$). Per non appesantire le notazioni si scriverà $f_\Lambda, f^{\leq N}, f_{\Lambda^c}, f^{>N}$ in luogo di $\Pi_\Lambda f, T_N f, (1 - \Pi_\Lambda)f, (1 - T_N)f$ rispettivamente. Analogamente si farà per i campi vettoriali. (Si verifica che questa è una buona notazione in quanto Π_Λ e T_N commutano e quindi l'eventuale ambiguità data dalla definizione di $f_\Lambda^{\leq N}$ e simili non sussiste). Infine se f è una funzione a valori in \mathbb{C} , si denoterà con F il suo campo vettoriale Hamiltoniano.

4.2 Un passo perturbativo

Sia dunque

$$h = k + u + v$$

Hamiltoniana definita su \mathcal{D}_σ , per qualche vettore d'estensione $\sigma \leq R$, con

$$k = \omega \cdot I,$$

ω e R fissati. Si supponga inoltre esista, per qualche $N > 0$ un N -reticolo massimale Λ ed un numero $\alpha > 0$ tali che

$$|\omega \cdot \nu| \geq \alpha \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \Lambda, \quad |\nu| \leq N$$

Ciò che si vuole fare è trovare una trasformazione canonica vicina all'identità Φ definita su $\mathcal{D}_{\sigma-xR}$, per un qualche valore di x tale per cui $xR < \sigma$, ed a valori in \mathcal{D}_σ e per la quale si abbia

$$\Phi^* h = k + u' + v'$$

con

$$\begin{aligned} u' &= u + v_\Lambda, \\ |v'|_{\sigma-xR} &\leq e^{-1} |v'|_\sigma. \end{aligned}$$

Tale trasformazione può essere generata tramite il metodo di Lie, ovvero mediante il flusso al tempo unitario di un campo vettoriale Hamiltoniano X di Hamiltoniana χ . Poiché

$$\Phi^* h = k + u + (L_X k + v^{\leq N}) + v_\Lambda^{>N} + v_{\Lambda^c}^{>N} + R_X^2(k) + R_X^1(u + v),$$

se X soddisfa

$$L_X k = -v_{\Lambda^c}^{\leq N}, \tag{4.1}$$

allora si ottiene il risultato voluto con

$$v' := v_{\Lambda^c}^{>N} + R_X^2(k) + R_X^1(u + v). \tag{4.2}$$

Per stimare $|v'|_{\sigma-xR}$ sono necessari alcuni risultati preliminari.

Lemma 4.2.1. *se χ risolve l'equazione (4.1) allora, per ogni $i = 1, \dots, n$*

$$\begin{aligned} |\chi|_\sigma &\leq \frac{|v|_\sigma}{\alpha} \\ \dagger X \dagger_\sigma &\leq \frac{|V|_\sigma}{\alpha}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Una χ risolvete la (4.1) è data da

$$\chi = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \Lambda, |\nu| \leq N} \frac{v_\nu}{i\omega \cdot \nu}$$

e dunque si ha che

$$|\chi|_\sigma \leq \frac{\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |v_\nu|_\sigma}{\max\{|\omega \cdot \nu| \mid \nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \Lambda, |\nu| \leq N\}} \leq \frac{|v|_\sigma}{\alpha}.$$

Similmente

$$X = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \Lambda, |\nu| \leq N} \frac{V_\nu}{i\omega \cdot \nu}$$

ed un ragionamento analogo a quello precedente permette di concludere. \square

Lemma 4.2.2. *Se $\|V\|_\sigma \leq \frac{x\alpha}{2}$ allora Φ_X^1 è un diffeomorfismo da $\mathcal{D}_{\sigma-xR}$ sulla sua immagine, che è contenuta in \mathcal{D}_σ .*

Dimostrazione. Una stima delle componenti del campo vettoriale, nelle condizioni dell'enunciato, è data da:

$$\|X^{I_i}\|_\sigma^\infty \leq \|X^{I_i}\|_\sigma \leq \frac{\|V^{I_i}\|_\sigma}{\alpha} \leq \frac{R_I x}{2}.$$

Analogamente si ottiene

$$\|X^{\phi_i}\|_\sigma^\infty \leq \frac{xR_\phi}{2}.$$

Sia ora $z \in \mathcal{D}_{\sigma-xR}$ e $T_z = \sup\{T > 0 \mid \Phi_X^t(z) \in \mathcal{D}_{\sigma-\frac{xR}{2}} \forall t \in [0, T]\}$ il tempo di prima uscita nel futuro (eventualmente può valere anche $+\infty$) di z da $\mathcal{D}_{\sigma-\frac{xR}{2}}$ tramite Φ_X^t . Allora

$$\|(\Phi_X^{T_z} - id)^{I_i}(z)\| = \left| \int_0^{T_z} \frac{d\Phi_X^t(z)^{I_i}}{dt} dt \right| \leq \int_0^{T_z} \|X^{I_i}(\Phi_X^t(z))\| dt \leq T_z \|X^{I_i}\|_{\sigma-\frac{xR}{2}}^\infty \leq \frac{xR_I}{2} T_z$$

ed analogamente

$$\|(\Phi_X^{T_z} - id)^{\phi_i}(z)\| \leq \frac{xR_\phi}{2} T_z.$$

Deve dunque valere $T_z \geq 1$ altrimenti, in contraddizione con la massimalità di T_z , tali espressioni implicherebbero $\Phi_X^{T_z}(z) \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{\sigma-\frac{xR}{2}}$ dunque si ha

$$\Phi_X^1(z) \in \mathcal{D}_{\sigma-\frac{xR}{2}} \quad \forall z \in \mathcal{D}_{\sigma-xR}$$

che assieme all'invertibilità di Φ_X^1 , la quale segue da teoremi generali, prova l'enunciato. \square

Si tratta ora di stimare, sotto opportune ipotesi sulle norme delle componenti della Hamiltoniana e dei loro campi vettoriali, le norme dei resti della trasformazione. I calcoli per la dimostrazione del seguente lemma possono essere trovati in [11].

Lemma 4.2.3. *Sia $\chi : \mathcal{D}_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ analitica e tale che il suo campo vettoriale Hamiltoniano X soddisfi $\|X\|_\sigma \leq \frac{x}{12}$ per qualche $0 < x < 1$ tale che $xR < \sigma < R$. Allora, $\Phi_X^1(\mathcal{D}_{\sigma-xR}) \subseteq \mathcal{D}_\sigma$ e, per ogni funzione analitica $f : \mathcal{D}_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ ed ogni campo vettoriale analitico Y in \mathcal{D}_σ si ha*

- $\|f^{>N}\|_{\sigma-xR} \leq e^{-xR_\phi N} \|f\|_\sigma$
- $\|R_X^1(f)\|_{\sigma-xR} \leq \frac{2}{x} \|\chi\|_\sigma \|F\|_\sigma$
- $\|R_X^2(f)\|_{\sigma-xR} \leq \frac{1}{x} \|X\|_\sigma \|L_X f\|_\sigma$
- $\|R_X^1(Y)\|_{\sigma-xR} \leq \frac{4}{x} \|X\|_\sigma \|Y\|_\sigma$
- $\|R_X^2(Y)\|_{\sigma-xR} \leq \frac{2}{x} \|X\|_\sigma \|L_X Y\|_\sigma$.

Dimostrazione. Seguendo a grandi linee la trattazione presente in [11], indicando la serie di Fourier di f come

$$f(I, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} f_\nu(I, \phi) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\nu(I) e^{i\nu \cdot \phi}$$

si avrà

$$\begin{aligned} |f^{>N}|_{\sigma-xR} &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n, |\nu| > N} |\hat{f}_\nu|_{\sigma-xR}^\infty e^{|\nu|(\sigma_\phi - xR_\phi)} \\ &\leq e^{-NxR_\phi} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}_\nu|_{\sigma}^\infty e^{|\nu|\sigma_\phi} \\ &= e^{-NxR_\phi} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |f_\nu|_{\sigma}^\infty \\ &= e^{-NxR_\phi} |f|_{\sigma}. \end{aligned}$$

Cosicché il primo punto è stato mostrato.

Per dimostrare le stime sui resti innanzitutto si mostra un risultato tecnico. Sia $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$, si vuole mostrare che

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{z^s}{s+1} = 1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{z^s}{s+1} \leq 1 + z$$

(ponendo, per consistenza, $0^0 = 1$). Si consideri innanzitutto la nota formula, valida per $|y| < 1$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} y^p}{p} = \ln(1+y).$$

Si ottiene, dividendo entrambi i membri per y e ponendo $y = -z$, $p = s+1$:

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{z^s}{s+1} = -\frac{\ln(1-z)}{z} =: g(z)$$

Uno studio analitico mostra che $g(z)$, nell'intervallo $(0, 1)$ è convessa, tende ad 1 per z tendente a 0 e tende a $+\infty$ per z tendente ad 1 e la sua derivata in 0 tende a $\frac{1}{2}$, questo basta ad affermare che vi è un punto $\bar{z} \in]0, 1[$ tale che $f(\bar{z}) = \bar{z} + 1$, $g(z) < z + 1$ per $0 < z < \bar{z}$ e $g(z) > z + 1$ per $\bar{z} < z < 1$. Poiché $g(\frac{1}{2}) = 2 \ln(2) < 1 + \frac{1}{2}$ si deduce quindi che $\frac{1}{2} < \bar{z}$ e dunque che $g(z) < z + 1$ per $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ come richiesto.

Prima della stima sui resti serve una stima sulle derivate di Lie delle funzioni e dei campi vettoriali. Fissata $z \in \mathcal{D}_{\sigma-xR}$, la funzione $t \rightarrow F_z(t) = f(z + tX(z))$ analitica su $[-T, T]$ per qualche $T > 0$. Un possibile valore di tale T è dato dalla condizione $z + tX(z) \in \mathcal{D}_\sigma$ per ogni t in valore assoluto minore di T , ciò che certamente vale se per ogni $i = 1 \dots n$

$$\begin{cases} |t| |X(z)_i^I| \leq xR_I \\ |t| |X(z)_i^\phi| \leq xR_\phi \end{cases}$$

ovvero se

$$|t| |X|_{\sigma-xR}^\infty \leq x$$

Dunque si può porre $T = \frac{x}{\dagger X \dagger_{\sigma-xR}^\infty}$. Risulta dunque che

$$|L_X f(z)| = \left| \frac{dF_z(0)}{dt} \right| \leq \frac{\sup_{|t| \leq T} \{|F_z(t)|\}}{T} \leq \frac{1}{x} \dagger X \dagger_{\sigma-xR}^\infty |f|_\sigma^\infty$$

e poiché la stima vale uniformemente in z si può concludere che

$$|L_X f|_{\sigma-xR}^\infty \leq \frac{\dagger X \dagger_{\sigma-xR}^\infty |f|_\sigma^\infty}{x}.$$

Per passare alle stime mediante la norma di Fourier $|\cdot|_\sigma$ basta osservare che, scritta

$$L_X f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} (L_X f)_\nu$$

la serie di Fourier di $L_X f$, si ha che

$$(L_X f)_\nu = \sum_{\nu' + \nu'' = \nu} L_{X_{\nu'}} f_{\nu''}$$

dunque

$$|(L_X f)_\nu|_{\sigma-xR}^\infty \leq \sum_{\nu' + \nu'' = \nu} |L_{X_{\nu'}} f_{\nu''}|_{\sigma-xR}^\infty \leq \sum_{\nu' + \nu'' = \nu} \frac{\dagger X_{\nu'} \dagger_{\sigma-xR}^\infty |f_{\nu''}|_\sigma^\infty}{x}$$

da cui

$$\begin{aligned} |L_X f|_{\sigma-xR} &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |(L_X f)_\nu|_{\sigma-xR}^\infty \\ &\leq \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\nu' + \nu'' = \nu} \frac{\dagger X_{\nu'} \dagger_{\sigma-xR}^\infty |f_{\nu''}|_\sigma^\infty}{x} \\ &\leq \frac{1}{x} \sum_{\nu' \in \mathbb{Z}^n} \dagger X_{\nu'} \dagger_{\sigma-xR}^\infty \sum_{\nu'' \in \mathbb{Z}^n} |f_{\nu''}|_\sigma^\infty \\ &= \frac{\dagger X \dagger_{\sigma-xR} |f|_\sigma}{x} \end{aligned}$$

cosicché risulta $|L_X f|_{\sigma-xR} \leq \frac{1}{x} \dagger X \dagger_{\sigma-xR} |f|_\sigma$.

Per quanto concerne le stime sulle derivate di Lie dei campi vettoriali si ha:

$$\begin{aligned} \frac{|(L_X Y)^{I_i}|_{\sigma-xR}}{R_I} &= \frac{|L_X(Y^{I_i}) - L_Y(X^{I_i})|_{\sigma-xR}}{R_I} \\ &\leq \frac{|L_X(Y^{I_i})|_{\sigma-xR} + |L_Y(X^{I_i})|_{\sigma-xR}}{R_I} \\ &\leq \frac{1}{x} (\dagger X \dagger_{\sigma-xR} \frac{|Y^{I_i}|_\sigma}{R_I} + \dagger Y \dagger_{\sigma-xR} \frac{|X^{I_i}|_\sigma}{R_I}) \\ &\leq \frac{1}{x} (\dagger X \dagger_\sigma \frac{|Y^{I_i}|_\sigma}{R_I} + \dagger Y \dagger_\sigma \frac{|X^{I_i}|_\sigma}{R_I}). \end{aligned}$$

Conti analoghi permettono di stimare $\frac{1}{R_\phi} |(L_X Y)^{\phi_i}|_{\sigma-xR}$, quindi passando al massimo per $i = 1, \dots, n$ si ottiene $\dagger L_X Y \dagger_{\sigma-xR} \leq \frac{2}{x} \dagger X \dagger_\sigma \dagger Y \dagger_\sigma$.

A questo punto per stimare la norma delle derivate di Lie di ordine successivo si procede tramite uno schema induttivo. Sia $s \geq 1$, si vuole mostrare che $|\frac{1}{s!}L_X^s f|_{\sigma-xR} \leq \frac{1}{e} \left(\frac{e}{x} \dagger X \dagger \sigma\right)^s |f|_\sigma$. Per $s = 1$ il risultato è vero per quanto detto precedentemente. Se si suppone vero per s fissato, si avrà:

$$\begin{aligned}
\frac{|L_X^{s+1} f|_{\sigma-xR}}{(s+1)!} &= \frac{1}{s+1} |L_X \frac{L_X^s f}{s!}|_{\sigma-xR} \\
&\leq \frac{1}{s+1} \frac{s+1}{x} \dagger X \dagger_{\sigma-xR} |L_X^s f|_{\sigma-x\frac{s}{s+1}R} \\
&\leq \frac{1}{x} \dagger X \dagger_\sigma \left(\frac{1}{e} \left(\frac{e \dagger X \dagger_\sigma (s+1)}{xs} \right)^s |f|_\sigma \right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \frac{1}{e} e^s \left(\frac{1}{x} \dagger X \dagger_\sigma\right)^{s+1} |f|_\sigma \\
&\leq \frac{1}{e} \left(\frac{e}{x} \dagger X \dagger_\sigma\right)^{s+1} |f|_\sigma
\end{aligned}$$

dove è stata usata la disuguaglianza $(1 + \frac{1}{s})^s \leq e \forall s > 0$. In modo assolutamente analogo si mostra che $\dagger \frac{1}{s!} L_X^s Y \dagger_{\sigma-xR} \leq \frac{1}{e} \left(\frac{2e}{x} \dagger X \dagger_\sigma\right)^s \dagger Y \dagger_\sigma$. Modificando leggermente il conto precedente si ottiene alternativamente:

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{s!} L_X^s f|_{\sigma-xR} &= \frac{1}{s} \left| \frac{1}{(s-1)!} L_X^{s-1} (L_X f) \right|_{\sigma-xR} \\
&\leq \frac{1}{se} \left(\frac{2e}{x} \dagger X \dagger_\sigma\right)^{s-1} |L_X f|_{\sigma-\frac{xR}{2}} \\
&= \frac{1}{se} \left(\frac{2e}{x} \dagger X \dagger_\sigma\right)^{s-1} |L_F \chi|_{\sigma-\frac{xR}{2}} \\
&\leq \frac{2}{sex} \left(\frac{2e}{x} \dagger X \dagger_\sigma\right)^{s-1} \dagger F \dagger_\sigma |\chi|_\sigma.
\end{aligned}$$

A questo punto si possono cominciare a stimare i resti. Si osservi che le condizioni su x permettono di affermare che $\frac{e}{x} \dagger X \dagger_\sigma \leq \frac{2e}{x} \dagger X \dagger_\sigma \leq \frac{1}{2}$ e dunque:

$$\begin{aligned}
|R_X^1(f)|_{\sigma-xR} &\leq \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{|L_X^s f|_{\sigma-xR}}{s!} \\
&\leq \frac{2}{ex} \dagger F \dagger_\sigma |\chi|_\sigma \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{s+1} \left(\frac{2e}{x} \dagger X \dagger_\sigma\right)^s \\
&\leq \frac{2}{ex} \dagger F \dagger_\sigma |\chi|_\sigma \left(1 + \frac{2e}{x} \dagger X \dagger_\sigma\right) \\
&\leq \frac{3}{ex} \dagger F \dagger_\sigma |\chi|_\sigma \\
&\leq \frac{2}{x} \dagger F \dagger_\sigma |\chi|_\sigma.
\end{aligned}$$

Similmente (osservando che $\frac{1}{s!} L_X^s f = \frac{1}{s} \frac{L_X^{s-1} (L_X f)}{(s-1)!}$) si ha che

$$|R_X^2(f)|_{\sigma-xR} \leq \frac{|L_X f|_\sigma}{e} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s+1} \left(\frac{e \dagger X \dagger_\sigma}{x}\right)^s \leq \frac{|L_X f|_\sigma \dagger X \dagger_\sigma}{x}.$$

In completa analogia si recuperano gli ultimi due risultati:

$$\begin{aligned} \dagger R_X^1(Y) \dagger_{\sigma-xR} &\leq \frac{2\dagger X \dagger_{\sigma} \dagger Y \dagger_{\sigma}}{x} \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\frac{2e\dagger X \dagger_{\sigma}}{x} \right)^s = \frac{2\dagger X \dagger_{\sigma} \dagger Y \dagger_{\sigma}}{x} \frac{1}{1 - \frac{2e\dagger X \dagger_{\sigma}}{x}} \leq \frac{4\dagger X \dagger_{\sigma} \dagger Y \dagger_{\sigma}}{x}. \\ \dagger R_X^2(Y) \dagger_{\sigma-xR} &\leq \frac{\dagger L_X Y \dagger_{\sigma}}{e} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s+1} \left(\frac{2e\dagger X \dagger_{\sigma}}{x} \right)^s \leq \frac{2\dagger X \dagger_{\sigma} \dagger L_X Y \dagger_{\sigma}}{x}. \end{aligned}$$

□

A questo punto si è in grado di stimare il resto v' definito in (4.2).

Proposizione 5. *Sia $0 < x < 1$ tale che $xR < \sigma \leq R$ e sia $h = k + u + v$ analitica in \mathcal{D}_{σ} con $k(I, \phi) = \omega \cdot I$, $\omega \in \mathbb{R}^2$. Siano $N > 0$ intero e Λ un N -reticolo di \mathbb{Z}^n massimale tali che*

$$\inf\{|\omega \cdot \nu| \mid \nu \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda, |\nu| \leq N\} \geq \alpha.$$

Si supponga inoltre che il campo vettoriale Hamiltoniano V di v soddisfi

$$\dagger V \dagger_{\sigma} \leq \frac{x\alpha}{12}$$

e che $u_{\Lambda} = u$. Allora esiste una trasformazione canonica analitica $\Phi : \mathcal{D}_{\rho-xR} \rightarrow \mathcal{D}_{\rho}$ tale che

$$h' = \Phi^* h = k + u' + v'$$

con $u' = u + v_{\Lambda}$ e

$$\begin{aligned} |v'|_{\sigma-xR} &\leq S|v|_{\sigma} \\ \dagger V' \dagger_{\sigma-xR} &\leq S\dagger V \dagger_{\sigma} \end{aligned}$$

ove

$$S = 6 \left(e^{-xR_{\phi}N} + \frac{\dagger U \dagger_{\sigma} + \dagger V \dagger_{\sigma}}{\alpha x} \right)$$

Dimostrazione. Sia $\Phi = \Phi_X^1$ con X campo vettoriale generato dalla Hamiltoniana χ soddisfacente la (4.1). In virtù della condizione $\dagger V \dagger_{\sigma} \leq \frac{x\alpha}{12} \leq \frac{x\alpha}{2}$ si ha che $\Phi(\mathcal{D}_{\rho-xR}) \subseteq \mathcal{D}_{\rho}$ e $\dagger X \dagger_{\sigma} \leq \frac{x}{12}$, cosicché ci si trova nelle ipotesi della proposizione appena mostrata. Allora

$$\begin{aligned} |v'|_{\sigma-xR} &\leq |v_{\Lambda^c}^{\leq N}|_{\sigma-xR} + |R_1^X(u+v)|_{\sigma-xR} + |R_2^X(k)|_{\sigma-xR} \\ &\leq e^{-xR_{\phi}N} |v_{\Lambda^c}|_{\sigma} + \frac{2\dagger U + \dagger V \dagger_{\sigma}}{x} |\chi|_{\sigma} + \frac{\dagger X \dagger_{\sigma}}{x} |L_X k|_{\sigma} \\ &\leq e^{-xR_{\phi}N} |v|_{\sigma} + \frac{2\dagger U \dagger_{\sigma} + 2\dagger V \dagger_{\sigma}}{\alpha x} |v|_{\sigma} + \frac{\dagger V \dagger_{\sigma}}{\alpha x} |v_{\Lambda^c}^{\leq N}|_{\sigma} \\ &\leq (e^{-xR_{\phi}N} + \frac{2\dagger U \dagger_{\sigma} + 3\dagger V \dagger_{\sigma}}{\alpha x}) |v|_{\sigma} \\ &\leq S|v|_{\sigma} \\ \dagger V' \dagger_{\sigma-xR} &\leq \dagger V_{\Lambda^c}^{\leq N} \dagger_{\sigma-xR} + \dagger R_1^X(U+V) \dagger_{\sigma-xR} + \dagger R_2^X(K) \dagger_{\sigma-xR} \\ &\leq e^{-xR_{\phi}N} \dagger V_{\Lambda^c} \dagger_{\sigma} + \frac{4\dagger U + \dagger V \dagger_{\sigma}}{x} \dagger X \dagger_{\sigma} + \frac{2\dagger X \dagger_{\sigma}}{x} \dagger L_X K \dagger_{\sigma} \\ &\leq e^{-xR_{\phi}N} \dagger V \dagger_{\sigma} + \frac{4(\dagger U \dagger_{\sigma} + \dagger V \dagger_{\sigma})}{\alpha x} \dagger V \dagger_{\sigma} + \frac{2\dagger V \dagger_{\sigma}}{\alpha x} \dagger V_{\Lambda^c}^{\leq N} \dagger_{\sigma} \\ &\leq (e^{-xR_{\phi}N} + \frac{4\dagger U \dagger_{\sigma} + 6\dagger V \dagger_{\sigma}}{\alpha x}) \dagger V \dagger_{\sigma} \\ &\leq S\dagger V \dagger_{\sigma} \end{aligned}$$

□

4.3 Iterazione

Per concludere la dimostrazione dei teoremi presentati alla fine del capitolo precedente viene ora iterata un numero finito di volte la procedura della sezione precedente.

Lemma 4.3.1. *Sia $h = k + v$ analitica in \mathcal{D}_σ con $\sigma < R$, $k(I, \phi) = \omega \cdot I$ con $\omega \in \mathbb{R}^n$. Se $N > 0$ intero, $\alpha > 0$ e Λ un N -reticolo tale che*

$$\inf\{|\omega \cdot \nu| \mid \omega \in \mathbb{Z}^n \setminus \Lambda, |\nu| \leq N\}$$

Siano $\tau = \min\{\frac{\sigma_I}{R_I}, \frac{\sigma_\phi}{R_\phi}\}$ ed $m \geq 0$ un intero. Se vale

$$\begin{aligned} 144 \dagger V \dagger_\sigma m &\leq \alpha \tau \\ 8m &\leq N \tau R_\phi \end{aligned} \tag{4.3}$$

allora esiste una trasformazione canonica analitica $\Phi : \mathcal{D}_{\frac{\sigma}{2}} \rightarrow \mathcal{D}_\sigma$ tale che $h' = \Phi^ h = k + u + v'$ con*

- $u = u_\Lambda$
- $|u - v_\Lambda|_{\frac{\sigma}{2}} \leq |v|_\sigma$
- $|v'|_{\frac{\sigma}{2}} \leq e^{-m} |v|_\sigma$
- $\dagger V' \dagger_{\frac{\sigma}{2}} \leq e^{-m} \dagger V \dagger_\sigma$

Dimostrazione. Sia $x = \frac{\tau}{2m}$ e $\sigma_l = \sigma - lxR$, $l = 1, \dots, m$. Verranno costruiti, tramite il procedimento enunciato nella precedente proposizione, m trasformazioni canoniche $(\Phi^l)_{l=1 \dots m}$ tali che $\Phi^l : \mathcal{D}_{\sigma_l} \rightarrow \mathcal{D}_{\sigma_{l-1}}$ e tali che $h^l = \Phi^{l*} h^{l-1} = k + u^l + v^l$ (definendo $h^0 = h$) con

$$\begin{aligned} u_{l+1} &= u_l + (v_l)_\Lambda \quad (u_0 = 0, \quad v_0 = v) \\ |v_l|_{\sigma_l} &\leq e^{-l} |v_0|_\sigma \end{aligned}$$

Questo implica che $\Phi = \Phi^m \circ \dots \circ \Phi^1$ avrà le proprietà richieste, poiché, essendo $m\tau \leq \frac{\sigma}{2}$, certamente si può considerare $\mathcal{D}_{\frac{\sigma}{2}}$ come dominio di Φ ed inoltre

$$|u - v_\Lambda|_{\frac{\sigma}{2}} \leq \sum_{s=1}^{m-1} |v_s|_{\sigma_s} \leq e^{-1} \sum_{s=0}^{m-2} e^{-s} |v|_\sigma \leq \frac{1}{e-1} |v|_\sigma \leq |v|_\sigma.$$

Procedendo induttivamente, si supponga di aver costruito le prime l trasformazioni, cosicché

$$|V_l| \leq e^{-l} \dagger V \dagger_\sigma \leq \dagger V \dagger_\sigma \leq \frac{\alpha \tau}{144m} = \frac{\alpha x}{72} \leq \frac{\alpha x}{12}.$$

È dunque possibile costruire una trasformazione canonica analitica Φ^{l+1} tale che

$$\begin{aligned} |v_{l+1}|_{\sigma_{l+1}} &\leq S_l |v_l|_{\sigma_l} \leq S_l e^{-l} |v|_\sigma \\ \dagger V_{l+1} \dagger_{\sigma_{l+1}} &\leq S_l \dagger V_l \dagger_{\sigma_l} \leq S_l e^{-l} \dagger V \dagger_\sigma \end{aligned}$$

dove

$$S_l = 6 \left(e^{-\frac{\tau R_\phi N}{2m}} + 2m \frac{\dagger U_l \dagger_{\sigma_l} + \dagger V_l \dagger_{\sigma_l}}{\alpha \tau} \right) \leq \left(6e^{-\frac{\tau R_\phi N}{2m}} + \frac{24 \dagger V \dagger_\sigma m}{\alpha \tau} \right)$$

dove si è sfruttato il fatto che $U_l = \sum_{t=0}^{l-1} (V_t)_\Lambda$ e dunque $\dagger U_l \dagger_{\sigma_l} + \dagger V_l \dagger_{\sigma_l} \leq \sum_{t=0}^l \dagger V_t \dagger_{\sigma_t} \leq \sum_{t=0}^l e^{-t} \dagger V \dagger_\sigma \leq 2 \dagger V \dagger_\sigma$. Se valgono le condizioni dell'enunciato si avrà che $S_l \leq e^{-1}$ permettendo così di concludere \square

Per ottenere una nuova Hamiltoniana h' nella quale il resto v' decada in maniera esponenziale con l'entità della perturbazione originaria $\dagger V \dagger_\sigma$ basta ora scegliere opportunamente il cut-off N in funzione di $\dagger V \dagger_\sigma$.

Proposizione 6. *Nelle notazioni del lemma precedente, siano β costante reale e η costante reale positiva. Definiti $(\lfloor \cdot \rfloor)$ indica la parte intera)*

$$\begin{aligned} \epsilon^* &= \frac{\eta}{18R_\phi} \\ N &= \left\lfloor \left(\frac{\epsilon^*}{\dagger V \dagger_\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \right\rfloor \\ \alpha &= \eta N^\beta \\ \gamma &= \frac{\tau R_\phi}{8} \end{aligned}$$

sia Λ un N -reticolo tale che

$$\inf\{|\omega \cdot \nu| \mid \omega \in \mathbb{Z}^n \setminus \Lambda, |\nu| \leq N\} \geq \alpha. \quad (4.4)$$

Allora esiste una trasformazione canonica $\Phi : \mathcal{D}_{\frac{\sigma}{2}} \rightarrow \mathcal{D}_\sigma$, con le proprietà del lemma precedente e tale che

$$m = \lfloor \gamma N \rfloor$$

Dimostrazione. La seconda disuguaglianza delle (4.3) può essere riscritta come

$$m \leq \frac{\tau R_\phi}{8} N$$

Combinando quest'ultima con la prima disuguaglianza, e ponendo $\alpha = \eta N^\beta$, si ottiene

$$N^{1-\beta} \frac{\dagger V \dagger_\sigma}{\epsilon^*} \leq 1$$

risolta da una scelta di N come nelle ipotesi, la scelta di m si ottiene risolvendo in maniera ottimale la seconda disuguaglianza delle (4.3) sostituendo ad N il valore trovato (ricordando che m deve essere intero). \square

Osservazione. Nella proposizione appena mostrata non si sono fatte ipotesi esplicite su β e $\dagger V \dagger_\sigma$. Chiaramente se l'obiettivo consiste nel generare una forma normale a resto piccolo con la norma della perturbazione la condizione naturale da richiedere sarà:

$$\begin{aligned} \dagger V \dagger_\sigma &\leq \epsilon^* \\ \beta &< 1 \end{aligned}$$

4.4 Geometria delle risonanze nello spazio delle frequenze

Per completare la dimostrazione dei risultati precedentemente enunciati bisogna trovare, come già accennato, una suddivisione dello spazio delle frequenze in zone associate ciascuna ad un N -reticolo Λ per le quali valga la (4.4). Per fare ciò innanzitutto verranno dati dei lemmi puramente tecnici.

Lemma 4.4.1. *Siano $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\beta \in [0, \pi]$, se $\sin(\alpha) \leq c \sin(\beta)$ allora*

$$\alpha \leq c \frac{\pi}{2} \beta$$

In particolare se $c \leq \frac{1}{3}$ allora

$$\alpha < \frac{1}{2} \beta$$

Dimostrazione. Il risultato si basa sul fatto che per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ (la verifica è immediata tramite lo studio delle derivate e degli zeri della funzione $\sin(x) - \frac{2}{\pi}x$), assieme alla nota relazione $\sin(x) \leq x$ valida per qualunque x . Esse unite danno

$$c \geq \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \geq \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\beta}$$

che è esattamente la formula nell'enunciato. La seconda parte dell'enunciato è un'immediata conseguenza di $\pi > 3$. \square

Lemma 4.4.2. *Siano $\nu, \nu' \in \mathbb{Z}^2$, non paralleli. Indicato con $\widehat{\nu\nu'}$ l'angolo acuto fra ν e ν'*

$$\sin(\widehat{\nu\nu'}) \geq \frac{1}{\|\nu\| \|\nu'\|}$$

Dimostrazione. Il prodotto esterno \wedge fra due vettori (nella comune identificazione di vettori con 1-forme e scalari con 2-forme dello spazio euclideo \mathbb{R}^2) si esprime come un polinomio omogeneo a coefficienti in \mathbb{Z} di secondo grado nelle componenti di ν e ν' , dunque $\nu \wedge \nu' \in \mathbb{Z}$ essendo tali componenti in \mathbb{Z} , oltretutto, essendo i due vettori non paralleli, $|\nu \wedge \nu'| \geq 1$, infine vale $|\nu \wedge \nu'| = \|\nu\| \|\nu'\| \sin(\widehat{\nu\nu'})$, e ciò permette di concludere. \square

Detto ciò è possibile trovare una suddivisione dello spazio delle frequenze che permetta di creare opportune forme normali per il problema, si ha infatti:

Proposizione 7. *Sia $0 \leq c \leq \frac{1}{3}$, $N > 0$ intero. Per ogni N -reticolo massimale Λ di \mathbb{Z}^2 è possibile definire un insieme $R^{\Lambda, c, N} \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che*

- se $\Lambda \neq \Lambda'$ allora $R^{\Lambda, c, N}$ e $R^{\Lambda', c, N}$ sono disgiunti
- l'unione di tutti gli $R^{\Lambda, c, N}$ da \mathbb{R}^2
- se $\omega \in R^{\Lambda, c, N}$ allora vale

$$\inf\{|\omega \cdot \nu| \mid \nu \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda, |\nu| \leq N\} \geq \alpha = \frac{c\|\omega\|}{N}$$

e tale stima è migliorata nel caso di $\Lambda = \nu\mathbb{Z}$, per qualche $\nu \in \mathbb{Z}^2$, da

$$\alpha = \frac{(1-c)\|\omega\|}{\|\nu\|}$$

Dimostrazione. Come già osservato gli N -reticoli massimali di \mathbb{Z}^2 si riducono a tre casi

- $\Lambda = \mathbb{Z}^2$
- $\Lambda = \nu\mathbb{Z}$
- $\Lambda = \{0\}$

con $\nu = (\nu_1, \nu_2) \neq 0$ tale che ν stia nel primo quadrante, abbia norma minore di N e tale che $GCD(\nu_1, \nu_2) = 1$. Nel caso $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ la terza condizione è banalmente soddisfatta per qualunque scelta di $\omega \in \mathbb{R}^2$, così si può porre, per consistenza,

$$R^{\mathbb{Z}^2, c, N} = \{0\}.$$

Per quanto riguarda il caso $\Lambda = \nu\mathbb{Z}$ si definisca $\gamma_\nu \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\sin(\gamma_\nu) = \inf\{c \sin(\widehat{\nu\nu'}) \mid \nu' \in \mathbb{Z}^2, 0 < |\nu'| \leq N, \nu \neq \nu'\}.$$

Poiché $c \leq \frac{1}{3}$ si ha che

$$\gamma_\nu < \frac{1}{2}\widehat{\nu\nu'}$$

per qualunque vettore intero ν' diverso da ν e di norma minore di N . Definendo quindi come $R^{\nu\mathbb{Z}, c, N}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ formato dai punti ω per i quali $\widehat{\omega\nu} \leq \gamma_\nu$ si ha che due insiemi di questo tipo non si intersecano, e chiaramente non intersecano nemmeno $R^{\mathbb{Z}^2, c, N}$, definendo $R^{\{0\}, c, N}$ come il complementare in \mathbb{R}^2 di tutti gli insiemi precedentemente definiti sicuramente i primi due punti dell'enunciato saranno soddisfatti, restano da controllare le proprietà di risonanza di tali insiemi.

Si osservi innanzitutto che per quanto detto nel lemma precedente

$$\sin(\gamma_\nu) \geq \frac{c}{\|\nu\|\|\nu'\|} \quad \forall \nu' \in \mathbb{Z}^2, 0 < |\nu'| \leq N, \nu \neq \nu'$$

Inoltre, poiché $\|\nu'\| \leq |\nu'| \leq N$ si ha anche che

$$\sin(\gamma_\nu) \geq \frac{c}{\|\nu\|N}$$

Nel caso $\omega \in R^{\{0\}, c, N}$ ciò permette di ottenere

$$|\omega \cdot \nu| = \|\omega\|\|\nu\|\cos(\widehat{\omega\nu}) = \|\omega\|\|\nu\|\sin(\widehat{\omega\nu^\perp}) \geq \|\omega\|\|\nu\|\sin(\gamma_\nu) \geq \frac{c\|\omega\|}{N}.$$

Se invece $\omega \in R^{\nu\mathbb{Z}, c, N}$, sia ν' non parallelo a ν . Detto ν'^\perp il vettore ortogonale a ν' , con la stessa norma (euclidea) e tale che $0 \leq \widehat{\omega\nu'^\perp} \leq \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\begin{aligned} |\omega \cdot \nu'| &= \|\omega\|\|\nu'\|\cos(\widehat{\omega\nu'}) \\ &= \|\omega\|\|\nu'\|\sin(\widehat{\omega\nu'^\perp}) \\ &\geq \|\omega\|\|\nu'\|\sin(\widehat{\nu\nu'^\perp} - \gamma_\nu u) \\ &\geq \|\omega\|\|\nu'\|(\sin(\widehat{\nu\nu'^\perp}) - \sin(\gamma_\nu u)) \\ &\geq \frac{(1-c)\|\omega\|}{\|\nu\|}. \end{aligned}$$

Ovviamente poiché $c < \frac{1}{2}$ si ha che $1 - c > c$ ed inoltre $\|\nu\| \leq |\nu| \leq N$ cosicché questa è effettivamente una stima migliore di quella che è possibile effettuare su $R^{\{0\}, c, N}$. \square

Si è quindi ora in grado di raccogliere i precedenti risultati in un teorema che garantisce, sotto opportune condizioni, l'esistenza, uniformemente nello spazio delle frequenze, di un cambiamento di coordinate che mette in forma normale la Hamiltoniana del problema originario generando un resto esponenzialmente piccolo:

Teorema 6. *Sia $h = k + v$ analitica in \mathcal{D}_R , $k(I, \phi) = \omega \cdot I$ con $\omega \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e siano*

$$\begin{aligned}\epsilon^* &= \frac{\|\omega\|}{54R_\phi} \\ \gamma &= \frac{R_\phi}{8} \\ N &= \left\lceil \left(\frac{\epsilon^*}{\dagger V \dagger_\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \right\rceil.\end{aligned}$$

Si assuma che $\dagger V \dagger_\sigma \leq \epsilon^$ e che $\omega \in R^{\Lambda, c, N}$ per qualche Λ N -reticolo massimale di \mathbb{Z}^2 . Allora esiste una trasformazione canonica $\Phi : \mathcal{D}_{\frac{R}{2}} \rightarrow \mathcal{D}_R$ tale che*

$$\Phi^* h = k + u + v'$$

con:

- $u = u_\Lambda$
- $|u - v_\Lambda|_{\frac{R}{2}} \leq |v|_R$
- $|v'|_{\frac{R}{2}} \leq e^{-\lfloor \gamma N \rfloor} |v|_R$
- $\dagger V \dagger_{\frac{R}{2}} \leq e^{-\lfloor \gamma N \rfloor} \dagger V \dagger_R$

Dimostrazione. Si applicano le ultime due proposizioni allo spazio delle frequenze ed alla Hamiltoniana di partenza dove sono stati fissati come parametri: $\sigma = R$ (così da avere $\tau = 1$), $c = \frac{1}{3}$, $\eta = c\|\omega\|$, $\beta = -1$. \square

In un ottica diversa rispetto alla classica teoria di Nekhoroshev è possibile fissare un valore limite, indipendente dalla perturbazione, per il resto non normalizzato a fronte di una crescita più lenta del cut-off (nel caso precedente N diverge con l'approssimarsi di $\dagger V \dagger_R$ a 0) che risulta in una semplificazione della geometria delle risonanze.

Teorema 7. *Sia $h = k + v$ analitica in \mathcal{D}_R , $k(I, \phi) = \omega \cdot I$ con $\omega \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sia fissato $m > 0$ intero e vengano definiti*

$$\begin{aligned}\epsilon^* &= \frac{\|\omega\| R_\phi}{3456} m^{-2} \\ N &= \left\lceil \frac{8}{R_\phi} m \right\rceil.\end{aligned}$$

Se $\dagger V \dagger_\sigma \leq \epsilon^$ allora esiste una trasformazione canonica $\Phi : \mathcal{D}_{\frac{R}{2}} \rightarrow \mathcal{D}_R$, tale che*

$$\Phi^* h = k + u + v'$$

ed in tal caso si ha che

- $u = u_\Lambda$
- $|u - v_\Lambda|_{\frac{R}{2}} \leq |v|_R$

- $|v'|_{\frac{R}{2}} \leq e^{-m}|v|_R$
- $\dagger V' \dagger_{\frac{R}{2}} \leq e^{-m} \dagger V \dagger_R$

con Λ N -reticolo massimale di \mathbb{Z}^2 tale che $\omega \in R^{\Lambda, \frac{1}{3}, N}$.

Dimostrazione. Ricavando il valore di m nella seconda disequazione delle (4.3), ponendo $\sigma = R$, sostituendo il risultato nella prima disequazione e stimando α con i valori ottenuti nella proposizione relativa alla geometria delle risonanze, ponendo $c = \frac{1}{3}$, si ottiene

$$\dagger V \dagger_R \leq \frac{\|\omega\|}{54R_\phi} N^{-2}.$$

Riscrivendo tale disequazione in funzione di m anziché di N si ottengono le condizioni richieste dall'enunciato. \square

Questo risultato può risultare utile, come già precedentemente osservato, da un punto di vista fisico in quanto è possibile mettere in relazione l'entità della perturbazione con un limite temporale entro il quale la forma normale descriva adeguatamente la dinamica effettiva del sistema. Poiché nella realtà tale limite è fissato da un tempo caratteristico del sistema, cosicché si lavora con m fissato, l' N che si ricava nel secondo teorema dovrebbe indicare quali sono le armoniche che effettivamente influenzano la dinamica e quindi si manifestano nelle caratteristiche dello spettro quantistico del sistema.

Conclusioni

Pur senza entrare nel dettaglio degli studi applicativi (la comparazione fra lo spettro quantistico e la struttura topologica e dinamica del sistema studiato) per il quale questo lavoro è stato redatto, è comunque possibile ricavare, dai risultati ottenuti, alcune utili osservazioni.

Innanzitutto la suddivisione in zone risonanti dello spazio dei parametri, ipotizzata in [9], ha un riscontro nella geometria delle risonanze, sviluppata qui nell'ambito della seconda normalizzazione. In entrambi i casi, questa suddivisione viene costruita con l'obiettivo di definire *quale* forma normale sia la più adatta a descrivere il sistema. Va tuttavia notato come nel problema fisico una quantificazione della bontà di tale approssimazione non appare, al momento, completamente chiara, mentre nel presente contesto il discriminante è la piccolezza del resto non normalizzato.

Accettata tale identificazione si è anche data una stima per l'ampiezza di tali zone. Infatti, fissato un parametro di cut-off N , l'ampiezza delle zone relative alla risonanza ν (tale che $|\nu| \leq N$) è dell'ordine della distanza dalla risonanza di norma minore di N più prossima a ν . Tale distanza è dell'ordine di $(\|\nu\|N)^{-1}$. Nei teoremi conclusivi è stato mostrato come N venga scelto dell'ordine di $\epsilon^{-1/2}$ (nel primo teorema questo è chiaro, nel secondo si vede che N è dell'ordine di m e quest'ultimo è dell'ordine di $\epsilon^{-1/2}$) cosicché la larghezza della zona risonante di un'assegnata risonanza ν è, supposta la forza del campo elettromagnetico fissata ed esplicitando la dipendenza di ϵ da n , dell'ordine di $\sqrt{\epsilon}/N$. L'ampiezza delle zone risonanti di ordine alto ($|\nu| \sim N$) e quella delle zone non risonanti è stimata in $N^{-2} \sim \epsilon$. La nostra conclusione è che l'uso di forme normali risonanti per l'interpretazione di dati spettroscopici abbia senso in zone di tale ampiezza. Una eventuale conferma di ciò si ha nello studio degli spettri della parte lineare della perturbazione normalizzata. Si vede che con il crescere di n le risonanze di ordine alto vadano a sparire (cut-off dell'ordine di n^{-2}) ed inoltre la larghezza delle zone risonanti si allarghi (dell'ordine, fissata la frequenza, di n^2 , nel disegno tale allargamento non è visibile in quanto l'asse delle ascisse è riscalato di un fattore n^{-4}) Dalla trattazione effettuata risulta anche il valore del parametro perturbativo ϵ in funzione dei parametri \mathcal{E} , \mathcal{E}' , \mathcal{B} del campo e dell'energia E del sistema. Precisamente, detti

$$a = -\frac{3\mathcal{E}}{\omega^4}, \quad b = -\frac{3\mathcal{E}'}{\omega^4}, \quad c = -\frac{\mathcal{B}}{\omega^3}, \quad \omega = \sqrt{-2E}$$

risulta essere $\epsilon = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. È interessante notare come nei lavori citati si utilizzi $\omega\epsilon$ quale parametro perturbativo, salvo poi notare come effettivamente sia ϵ a determinare il comportamento qualitativo delle osservazioni sperimentali. La dipendenza di ϵ da E si traduce in una dipendenza dell'ampiezza delle zone

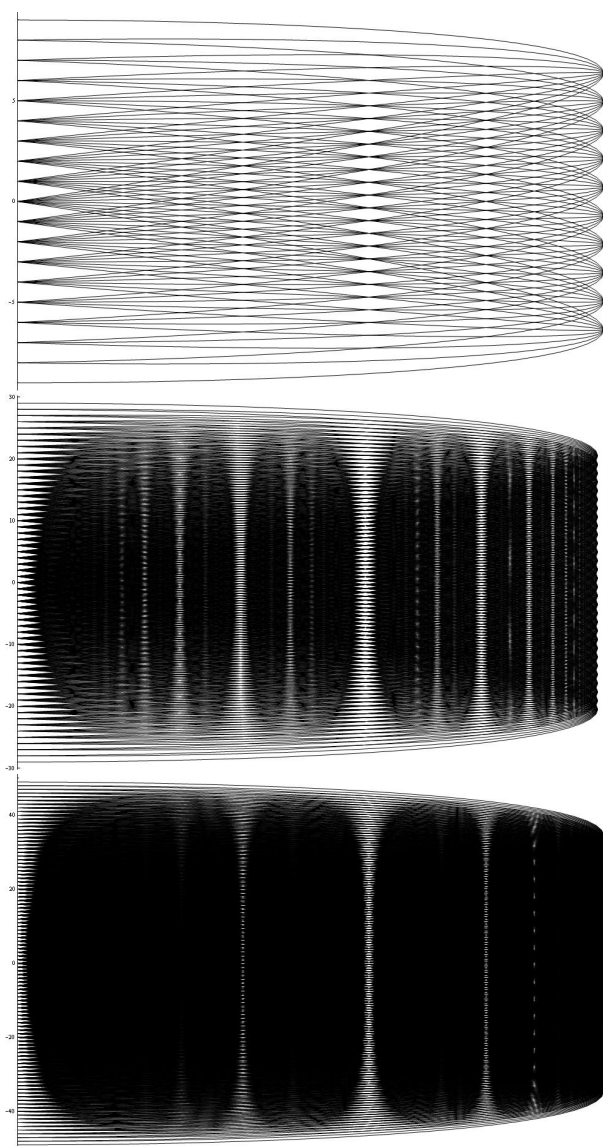


Figura 4.1: spettri per valori di $n=10, 30, 50$

risonanti dal numero quantico principale n : poiché $E \sim (n)^{-2}$, l'ampiezza della zona della risonanza ν è dell'ordine di $\frac{n^2}{|\nu|}$.

Come si è anticipato nell'introduzione, questo è solo un primo stadio volto a porre su basi solide l'uso di tecniche perturbative classiche per lo studio dell'atomo d'idrogeno in un debole campo elettromagnetico, e molto resta ancora da fare.

Da un punto di vista tecnico, sarà certamente necessario ripetere la seconda costruzione perturbativa usando coordinate di tipo cartesiano sugli spazi ridotti $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, in modo da evitare l'esclusione dei poli ed ottenere una più chiara descrizione del sistema normalizzato.

Inoltre, lo studio ha utilizzato, oltre alle zone risonanti, anche le zone non risonanti. L'uso di forme normali non risonanti non è finora stato considerato negli studi sull'atomo d'idrogeno. Si tratterà dunque di capirne il ruolo e l'utilità, e si apre la possibilità di uno studio globale, sullo spazio dei parametri, che possa portare ad una più profonda comprensione delle relazioni fra le proprietà classiche e quelle spettrali.

Ringraziamenti

Ringraziamenti particolari vanno al dott. Andrea Giacobbe e al prof. Dmitrií Sadovskií per le fruttuose discussioni ed i preziosi consigli datimi.

Appendice A

Il metodo di regolarizzazione di Moser

Verranno ora discussi degli approfondimenti sul tema della regolarizzazione, trattando principalmente il metodo di Moser e dando un'accenno e dei riferimenti bibliografici per il metodo di Ligon-Schaaf. Ciò che segue consisterà in uno sviluppo degli argomenti presentati in [15] e riproposti in [3]. L'obiettivo del procedimento di Moser sta nel coniugare lo spazio delle fasi del problema di Kepler con il fibrato tangente della sfera 3-dimensionale privata di un polo. Verrà mostrato poi come il flusso Kepleriano riparametrizzato corrisponda, per un fissato valore dell'energia, al flusso geodetico di velocità unitaria sulla sfera, rendendo così da una parte palesi le proprietà di simmetria del problema e dall'altra permettendo di completare in maniera naturale il flusso aggiungendo il polo mancante alla sfera.

Nel seguito, se M indica una sottovarietà di \mathbb{R}^n , TM e T^*M saranno identificati tramite la struttura euclidea di \mathbb{R}^n .

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$ definito privando \mathbb{R}^4 dell'insieme $\{(0, 0, 0, k) \in \mathbb{R}^4 \mid k > 0\}$ e si consideri la varietà $M = TV \ni (x, y)$ dotata della struttura simplettica $\omega = \sum_{i=1}^4 dx_i \wedge dy_i$. Sia $\xi(x, y) = x \cdot y$ funzione Hamiltoniana definita su M . 0 è un valore regolare per ξ e $\xi^{-1}(0) = \bigcup_{r>0} T\hat{\mathbb{S}}_r^3$ dove $\hat{\mathbb{S}}_r^3$ indica la sfera tridimensionale di raggio r privata del polo nord (si ometterà la scritta a pedice se $r = 1$). Il flusso Hamiltoniano di ξ definisce un'azione libera e propria di \mathbb{R} su M definita da

$$\Phi_\xi^\alpha(x, y) = (e^\alpha x, e^{-\alpha} y).$$

Per il teorema di riduzione si ha che $N = \xi^{-1}(0)/\sim_\xi$, dove \sim_ξ è la relazione di equivalenza definita dalle orbite del flusso di ξ , eredita una struttura simplettica da quella di M . Sia $\psi : M \rightarrow M$ definita da

$$\psi(x, y) = (\psi_x(x, y), \psi_y(x, y)) = \left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\|y \right).$$

Si ha che

Proposizione 8. N è simpletticamente diffeomorfo a $T\hat{\mathbb{S}}^3$ e tale diffeomorfismo è dato dalla mappa $\hat{\psi}$ definita tramite

$$i_\xi^* \psi = \pi_\xi^* \hat{\psi}$$

dove ι_ξ e π_ξ indicano rispettivamente l'inclusione in M e il quoziente tramite \sim_ξ di $\xi^{-1}(0)$.

La dimostrazione della proposizione verrà data tramite alcuni lemmi tecnici.

Lemma A.0.3. *L'immagine di $\iota^*\psi$ è $T\hat{\mathbb{S}}^3$ e le sue fibre sono le orbite di Φ_ξ^α .*

Dimostrazione. Se $(x, y) \in \xi^{-1}(0)$, $\psi(x, y) \in \psi^{-1}(0)$ ed inoltre si ha che $\|\psi_x\| = 1$ cosicché $\psi(x, y) \in T\hat{\mathbb{S}}^3$ inoltre la ψ ristretta a $T\hat{\mathbb{S}}^3$ è l'identità e dunque è mostrata la suriettività di $\iota_\xi^*\psi$ su $T\hat{\mathbb{S}}^3$. Siano $(x, y), (x', y') \in \xi^{-1}(0)$ tali che $\psi(x, y) = \psi(x', y')$. Poiché $\psi_x(x, y)$ e $\psi_y(x, y)$ sono paralleli ad x e ad y rispettivamente, esistono $k_x, k_y \in \mathbb{R}$ per cui

$$\begin{aligned} x' &= k_x x \\ y' &= k_y y. \end{aligned}$$

L'espressione di ψ impone che $k_x > 0$ e $k_y = k_x^{-1}$. Posto dunque $\alpha = \ln(k_x)$ si ha che

$$(x', y') = \Phi_\xi^\alpha(x, y).$$

Viceversa è ovvio che $(\Phi_\xi^\alpha)^*\psi = \psi$ per ogni α . \square

Lemma A.0.4. *$(\iota_\xi^*\psi)^*(\iota_\xi^*\omega) = \omega'$ dove ω' è la 2-forma simplettica canonica su $T\hat{\mathbb{S}}^3$.*

Dimostrazione. Il pull-back della 1-forma di Liouville su $\xi^{-1}(0)$ tramite $\iota_\xi^*\psi$ vale, ricordando che $x \cdot y = 0$,

$$\psi_y(x, y) \cdot d\psi_x(x, y) = y \cdot dx - \frac{1}{\|x\|^2} (x \cdot y)(x \cdot dy) = y \cdot dx$$

che è per l'appunto la 1-forma di Liouville canonica su M ristretta all'immagine di $\iota_\xi^*\psi$. \square

Lemma A.0.5. *$\iota_\xi^*\psi$ è una sommersione.*

Dimostrazione. Se, fissato $(x, y) \in \xi^{-1}(0)$, si indicano con $u = (v, w)$ i vettori di $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \cong T_{(x, y)}M$, l'equazione $D(\iota_\xi^*\psi)(x, y)u = 0$ per $u \in T_{(x, y)}\xi^{-1}(0)$ è risolta da $(v, w) \in (x, -y)\mathbb{R}$, dunque un'analisi dimensionale mostra come la mappa $D(\iota_\xi^*\psi)$ abbia rango massimo su $\xi^{-1}(0)$. \square

Analogamente a quanto fatto per il metodo di regolarizzazione di Kustaanheimo-Stiefel questi 3 lemmi assicurano che $\hat{\psi}$ abbia le proprietà richieste nella proposizione.

Sia ora $F(x, y) = \frac{1}{2}\|x\|^2\|y\|^2$ un'altra Hamiltoniana su M , è immediato constatare che $\{F, \xi\} = 0$ dunque è possibile definire un'unica \hat{F} su N tale che $\iota_\xi^*\hat{F} = \pi_\xi^*F$. Si ha che

Proposizione 9. *\hat{F} induce su N , identificato con $T\hat{\mathbb{S}}^3$, il flusso geodetico di velocità costante sulla sfera 3-dimensionale privata del polo nord.*

Dimostrazione. $\{\|x\|^2, F\} = 2\|x\|^2 x \cdot y$, dunque $\{\|x\|, \iota_\xi^* F\} = 0$ e analogamente $\{\|y\|, \iota_\xi^* F\} = 0$. Le equazioni di Hamilton per $\iota_\xi^* F$ si scrivono come

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \|x\|^2 y \\ \dot{y} &= -\|y\|^2 x.\end{aligned}$$

Esse rappresentano le equazioni delle geodetiche su $\hat{\mathbb{S}}_{\|x\|}^3$ percorse con velocità costante $\|y\|$. Osservando che $\iota_\xi^* \psi$ manda queste ultime in geodetiche percorse con velocità costante su $\hat{\mathbb{S}}^3$ si conclude. \square

Si consideri la mappa

$$\begin{aligned}\phi : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow V \\ (\vec{x}, x_4) &\longmapsto \phi(\vec{x}, x_4) = \left(2\vec{x}, \|\vec{x}\|^2 - 1\right) e^{x_4} (\|\vec{x}\|^2 + 1)^{-1}.\end{aligned}$$

Si noti che detta $\phi_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{S}}^3$ l'inversa della proiezione stereografica della sfera tridimensionale si ha che $\phi(x) = \phi_0(\vec{x}) e^{x_4}$, dunque detta ψ_0 l'inversa di ϕ_0 si ha che

$$\psi(x) = \left(\psi_0\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \ln(\|x\|) \right)$$

è l'inversa di ψ . Questo è sufficiente per affermare che ϕ è un diffeomorfismo, essendolo ϕ_0 sulla sua immagine. A questo punto verrà generata una trasformazione canonica sollevando ϕ al fibrato cotangente di \mathbb{R}^4 .

Proposizione 10. *Il sollevamento canonico di ϕ è*

$$\tilde{\phi}(x, y) = (\phi(x), \tilde{\phi}_y(x, y))$$

dove $\tilde{\phi}_y := \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^{-T}$ vale

$$\tilde{\phi}_y(x, y) = e^{-x_4} \left(\frac{\|\vec{x}\|^2 + 1}{2} \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{x} + \frac{2y_4}{\|\vec{x}\|^2 + 1} \vec{x}, (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \frac{\|\vec{x}\|^2 - 1}{\|\vec{x}\|^2 + 1} y_4 \right).$$

Dette $L = \tilde{\phi}^* F$ e $\eta = \tilde{\phi}^* \xi$ si ha che

$$\begin{aligned}L(x, y) &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \|\vec{y}\| (\|\vec{x}\|^2 + 1) \right)^2 + \left(\frac{\|\vec{x}\|^2 - 1}{\|\vec{x}\|^2 + 1} y_4 \right)^2 \right) \\ \eta(x, y) &= y_4\end{aligned}$$

Dimostrazione. Per sollevare canonicamente ϕ ad una mappa $\tilde{\phi} : T^*\mathbb{R}^4 \rightarrow V$ si devono esprimere le componenti della matrice Jacobiana di ϕ , $\mathbf{J}(x)$. Per $i, j = 1 \dots 3$ si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(x)_{ij} &= (2\delta_{ij}(\|\vec{x}\|^2 + 1) - 4x_i x_j)(\|\vec{x}\|^2 + 1)^{-2} e^{x_4} \\ \mathbf{J}(x)_{4j} &= 4x_j (\|\vec{x}\|^2 + 1)^{-2} e^{x_4} \\ \mathbf{J}(x)_{i4} &= 2x_i (\|\vec{x}\|^2 + 1)^{-1} e^{x_4} \\ \mathbf{J}(x)_{44} &= (\|\vec{x}\|^2 - 1)(\|\vec{x}\|^2 + 1)^{-1} e^{x_4}\end{aligned}$$

ovvero si ha la struttura a blocchi

$$\mathbf{J}(x) = \left(\tilde{\mathbf{J}}_{x_4}(\vec{x}) \mid \phi(x) \right)$$

dove $\tilde{\mathbf{J}}_{x_4}(\vec{x})$ rappresenta la matrice Jacobiana della trasformazione ottenuta da ϕ trattando x_4 alla stregua di un parametro costante. Un calcolo immediato mostra che (d'ora in poi si ometterà la dipendenza di \mathbf{J} e di $\tilde{\mathbf{J}}$ da x , intendendo che $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x)$ e $\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}_{x_4}(\vec{x})$)

$$\tilde{\mathbf{J}}^T \tilde{\mathbf{J}} = \left(\frac{2}{1 + \|\vec{x}\|^2} \right)^2 e^{2x_4} \mathbb{I}_3.$$

Inoltre si osserva che, poiché la norma di $\phi(x)$ è costante per x_4 fissato si ha

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \|\phi(x)\|^2}{\partial \vec{x}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_k(x)}{\partial \vec{x}_i} \frac{\partial \|X\|_{X=\phi(x)}^2}{\partial X_k} = \tilde{\mathbf{J}}_{ki} \phi_k(x) = \left(\tilde{\mathbf{J}}^T \phi(x) \right)_i.$$

Si può quindi calcolare

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{J}}^T \tilde{\mathbf{J}} & \tilde{\mathbf{J}}^T \phi(x) \\ \hline (\tilde{\mathbf{J}}^T \phi(x))^T & \phi(x)^2 \end{array} \right) = e^{2x_4} \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{2}{1 + \|\vec{x}\|^2} \right)^2 \mathbb{I}_3 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

da cui, tramite inversione e prodotto a sinistra per $\mathbf{J}(x)$ di entrambi i membri, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-T} &= e^{-2x_4} \mathbf{J} \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{1 + \|\vec{x}\|^2}{2} \right)^2 \mathbb{I}_3 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \\ &= e^{-2x_4} \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{1 + \|\vec{x}\|^2}{2} \right)^2 \tilde{\mathbf{J}} & \phi(x) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Quindi mediante la formula $\tilde{\phi}_y(x, y) = \mathbf{J}^{-T} y$ si ricava il risultato espresso nell'enunciato, mentre le forme di L e η risultano da un calcolo immediato. \square

Analogamente a quanto fatto su M si può ridurre $T^*\mathbb{R}^4$ tramite l'azione generata da η . Definita

$$\begin{aligned} \rho: T^*\mathbb{R}^4 &\longrightarrow T^*\mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \rho(x, y) = (\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

si ha che

Proposizione 11. $\tilde{N} = \eta^{-1}(0) / \sim_\eta$, dove \sim_η è la relazione di equivalenza definita dall'azione di η , è semplicemente connesso e diffeomorfo a $T^*\mathbb{R}^3$ tramite la mappa $\hat{\rho}$ definita tramite $i_\eta^* \rho = \pi_\eta^* \hat{\rho}$ dove i_η e π_η indicano rispettivamente l'inclusione in M e il quoziente tramite \sim_η di $\eta^{-1}(0)$.

Dimostrazione. L'immagine di $i_\eta^* \rho$ è chiaramente $T^*\mathbb{R}^3$ e le sue fibre sono le orbite dell'azione generata da η . È inoltre immediato verificare che $i_\eta^* \rho$ è una sommersione e si ha che $\rho_y(x, y) d\rho_x(x, y) = y \cdot dx - y_4 dx_4 = y \cdot dx$ su $\eta^{-1}(0)$. Analogamente a quanto fatto per ψ questo permette di concludere. \square

A questo punto la riduzione di L su $T^*\mathbb{R}^3$ seguita dal cambiamento di coordinate canonico su $T^*\mathbb{R}^3$ $(q, p) = (-\vec{y}, \vec{x})$ da origine alla Hamiltoniana $\tilde{K} = \frac{1}{2} K_{-\frac{1}{2}}^2$ e quindi si conclude che esiste un diffeomorfismo canonico fra $T^*\mathbb{R}^3$ e $T\hat{\mathbb{S}}^3$ che coniuga canonicamente la Hamiltoniana \tilde{K} con \hat{F} . In particolare la superficie di energia $\tilde{K}^{-1}(\frac{1}{2}) = K_{-\frac{1}{2}}^{-1}(1)$ è coniugata a $T_+\hat{\mathbb{S}}^3$, il fibrato unitario di $\hat{\mathbb{S}}^3$, sul quale si originano i moti geodetici di velocità unitaria. Per concludere basta mostrare il seguente

Lemma A.0.6. *Sia J funzione Hamiltoniana, $\tilde{J} = \frac{1}{2}J^2$. Sulla superficie di energia comune $\tilde{J}^{-1}(\frac{1}{2}) = J^{-1}(1)$ vale $X_J = X_{\tilde{J}}$.*

Dimostrazione. Banalmente su $H^{-1}(1)$, detta f qualsiasi funzione sullo spazio delle fasi a valori in \mathbb{R} , vale $\{\tilde{H}, f\} = H\{H, f\} = \{H, f\}$. \square

In questo caso il flusso di \tilde{K} su $\tilde{K}^{-1}(\frac{1}{2})$ è quello Kepleriano riparametrizzato, concludendo la dimostrazione delle affermazioni fatte all'inizio della sezione.

Un calcolo immediato mostra che le geodetiche passanti per il polo nord sono proprio quelle coniugate ai moti di collisione del sistema originario. A questo punto lo spazio $T_+^*\mathbb{S}^3$ può essere compattificato tramite l'aggiunta di una fibra ottenendo $T_+^*\mathbb{S}^3$. Il flusso geodetico di velocità unitaria sulla sfera di raggio unitario \mathbb{S}^3 è definito su $T_+^*\mathbb{S}^3$ ancora dalla Hamiltoniana \hat{F} , si è così ottenuto che anche i moti di collisione vengano regolarizzati (ovvero che il flusso che li descrive sia completo).

Osservazione. Merita attenzione il fatto che per il flusso geodetico su \mathbb{S}^3 risulti esplicito il gruppo di invarianza $SO(4)$. Gli integrali primi indotti da quest'ultimo sono codificati nelle 6 componenti indipendenti che definiscono la 2-forma $\tilde{G} = x \wedge y$ ad essi corrispondono, nel problema di Kepler originario, le 6 componenti di \tilde{G} (\tilde{G}_{ij} con $i, j = 1 \dots 3, i < j$) ed A (\tilde{G}_{i4} con $i = 1 \dots 3$).

Osservazione. Va ribadito che il procedimento opera sulle *single* superficie di energia separatamente. Un procedimento di regolarizzazione che opera globalmente ed in maniera simplettica su $H^{-1}((-\infty, 0))$, dove H indica la Hamiltoniana di Keplero originaria, è, ad esempio, quello di Ligon-Schaaf (si veda [6] per i dettagli) il quale coniuga canonicamente il flusso di H , limitatamente allo spazio delle fasi ad energia negativa, con il flusso geodetico, di velocità ora non necessariamente unitaria, su $\mathbb{S}^3 \setminus \{(0, 0, 0, 1)\}$.

Bibliografia

- [1] Abraham R. e Marsden J. E., *Foundations of Mechanics*, 2nd. ed. Reading etc.: Benjamin/Cummings 1978.
- [2] Benettin G., Fassò F., Fast rotations of the rigid body: A study by Hamiltonian perturbation theory. Part I, *Nonlinearity* **9** (1996), 137-186.
- [3] Cordani B., *The Kepler problem*, Basel etc.: Birkhauser Verlag 2003.
- [4] Cushman R. H., Normal form for Hamiltonian vectorfields with periodic flow, in *Differential geometric methods in mathematical physics* Dordrecht etc.: D. Reider 1984.
- [5] Cushman R. H. e Bates L. M., *Global aspects of classical integrable systems*, Basel etc.: Birkhauser Verlag 1997.
- [6] Cushman R. H. e Duistermaat J. J., A characterization of the Ligon- Schaaf regularization map, *Commun. Pure Appl. Math.* **50** (1997), 773-787.
- [7] Cushman R. H. e Sadovskii D. A., Monodromy in the hydrogen atom in crossed fields, *Physica D* **142** (2000), 166-196.
- [8] Efstathiou K., Cushman R. H. e Sadovskii D. A., Hamiltonian Hopf bifurcation of the hydrogen atom in crossed fields, *Physica D* **194** (2004), 250-274.
- [9] Efstathiou K., Sadovskii D. A. e Zhilinskiĭ B. I., Classification of perturbations of the hydrogen atom by small static electric and magnetic fields, *Proc. R. Soc. A* **463** (2007), 1771-1790.
- [10] Meinrenken E., *Symplectic Geometry*, University of Toronto (2000). Note reperibili all'indirizzo web:
<http://www.math.toronto.edu/mein/teaching/lectures.html>
- [11] Fassò F., Lie series method for vector fields and Hamiltonian perturbation theory, *J. Appl. Math. Phys (ZAMP)* **41** (1990), 843-864.
- [12] Fassò F. e Benettin G. Classical “freezing” of plane rotations: a proof of the Boltzmann–Jeans conjecture. *J. Stat. Phys.* **63** (1991), 737-760.
- [13] Fassò F., Guzzo M., Benettin G., Nekhoroshev-stability of elliptic equilibria of Hamiltonian systems. *Comm. Math. Phys.* **197** (1998), 347-360.
- [14] Guzzo M., Fassò F., Benettin G., On the stability of elliptic equilibria, *Math. Phys. Electronic J.* **4** (1998), paper 1, 16 pp.

- [15] Moser J. K., Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold, *Commun. Pure Appl. Math.* **23** (1970), 609-636.
- [16] Sadovskii D. A. e Zhilinskiĭ B. I., Tuning the hydrogen atom in crossed fields between the Zeeman and Stark limits, *Phys. Rev. A* **57**(4) (1998), 2867-2884.

Padova, 14 luglio 2008

