

# Università degli studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

**Corso di Laurea in Matematica**

Stabilità spettrale di equilibri relativi e problema dei tre corpi.

**Relatore:**  
**Prof. Francesco Fassò**

**Laureando:**  
**Giorgio Franzon**  
**Matricola 1026604**

24 Aprile 2015  
Anno Accademico 2014/2015



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione.</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Equilibri relativi e splitting del problema.</b>	<b>7</b>
2.1	Configurazioni centrali ed equilibri relativi. . . . .	7
2.2	Invarianza per omotetie. . . . .	8
2.3	Coordinate rotanti e splitting del problema. . . . .	9
<b>3</b>	<b>Stabilità spettrale.</b>	<b>11</b>
3.1	Linearizzazione del problema e stabilità spettrale. . . . .	11
3.2	Stabilità spettrale normale. . . . .	14
3.3	Stabilità spettrale planare. . . . .	15
<b>4</b>	<b>Problema dei tre corpi.</b>	<b>19</b>
4.1	Configurazioni triangolari. . . . .	19
4.2	Stabilità spettrale del problema dei tre corpi. . . . .	21
	<b>Bibliografia</b>	<b>23</b>



# Capitolo 1

## Introduzione.

L'oggetto di questa tesi è lo studio della stabilità spettrale degli equilibri relativi del problema ad  $n$  corpi, uno tra i più celebri problemi della dinamica che recita:

$n$  masse puntiformi, libere di muoversi nello spazio, si attraggono reciprocamente secondo la Legge di gravitazione universale di Newton. Si chiede di determinarne il movimento per qualunque configurazione e velocità iniziale.

Gli equilibri relativi sono configurazioni centrali planari, ovvero in cui i corpi eseguono un moto circolare uniforme complanare e di uguale velocità angolare  $\omega$ . Sono dunque particolari soluzioni periodiche delle equazioni di Newton del problema degli  $n$  corpi.

La stabilità spettrale di queste configurazioni è utile come condizione necessaria per la stabilità alla Lyapunov di questi moti. La stabilità spettrale è stata studiata da moltissimi autori, tra cui, alla fine del Diciannovesimo secolo, Gascheau e Routh [9], che studiarono il caso  $n = 3$ , e poi, in tempi molto più recenti, da molti altri tra cui Elmabsout [10], che provò che perché ci sia stabilità spettrale nel caso  $n \geq 4$  le masse degli  $n$  corpi devono essere uguali, e R. Moeckel in [6].

Moeckel utilizza un approccio di tipo algebrico per trovare alcuni autovalori della linearizzazione del problema posto in coordinate rotanti. Dimostra infatti che il problema si può dividere in una parte planare e in una normale, e studia la stabilità spettrale delle due parti separatamente, dimostrando che un equilibrio relativo è sempre *normalmente non degenero*, ovvero gli autovalori relativi alla linearizzazione della parte normale sono una coppia di zeri e gli altri sono immaginari puri.

Per quanto riguarda la parte planare del problema, Moeckel dimostra che ci sono sempre otto autovalori indipendenti dalle masse e dal numero dei

corpi, per ogni equilibrio relativo, e sono una coppia di zeri e tre volte la coppia  $\pm i$ .

Questi risultati possono essere applicati ad ogni equilibrio relativo. In questa sede li applicheremo alle configurazioni triangolari del problema dei tre corpi, ovvero una classe di equilibri relativi la cui scoperta è attribuita da alcuni ([9]) a Laplace e da altri ([2], [6]) a Lagrange, che si ritrova anche quando si studiano restrizioni del problema come il problema circolare dei tre corpi ristretto [3]. La stabilità alla Lyapunov di queste configurazioni è ancora un problema aperto, mentre la stabilità spettrale è vincolata alla condizione di stabilità che Routh attribuisce a Gascheau [9],

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 \geq 27(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3),$$

alla quale si giunge anche in questa tesi tramite l'applicazione della tecnica di Moeckel.

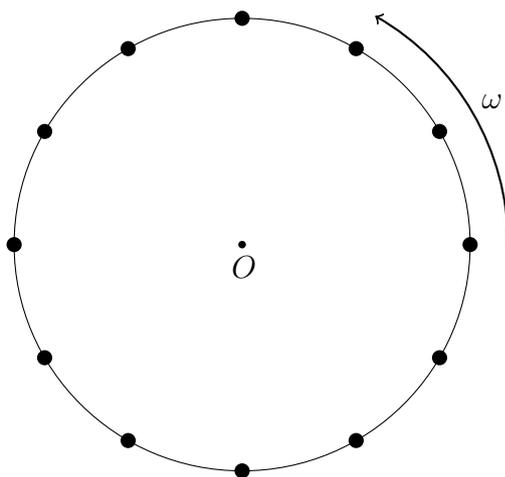


Figura 1.1: Configurazione centrale di  $n$  corpi.

# Capitolo 2

## Equilibri relativi e splitting del problema.

### 2.1 Configurazioni centrali ed equilibri relativi.

Com'è noto, la Lagrangiana del problema degli  $n$  corpi è

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \|M\dot{q}\|^2 - V(q),$$

con  $V(q)$  l'energia potenziale che vale, considerando la costante di gravitazione universale  $\mathcal{G} = 1$ ,

$$V(q) = - \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|},$$

con  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , ed  $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$  la matrice  $3n \times 3n$  delle masse.

Utilizzando poi le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

si ottengono le equazioni differenziali del moto

$$M\ddot{q} = -\nabla V(q), \tag{2.1}$$

con  $\nabla$  il gradiente euclideo. Introduciamo ora la nozione di configurazione centrale e di equilibrio relativo.

**Definizione 1.** *Dato il sistema in oggetto, si dice una configurazione centrale una soluzione periodica del sistema nella quale gli  $n$  corpi si muovono di moto circolare uniforme attorno al baricentro comune ad una stessa velocità angolare  $\omega$ .*

## 8CAPITOLO 2. EQUILIBRI RELATIVI E SPLITTING DEL PROBLEMA.

Si noti dunque che le *configurazioni centrali* sono moti periodici. Gli *equilibri relativi* sono configurazioni centrali particolari:

**Definizione 2.** *Si dice che una soluzione delle equazioni del moto  $q(t) = (q_{11}, q_{12}, q_{13}, \dots, q_{n1}, q_{n2}, q_{n3})^T \in \mathbb{R}^{3n}$  è un equilibrio relativo se è una configurazione centrale planare, ovvero se tutti i vettori  $q_i(t) = (q_{i1}, q_{i2}, q_{i3})^T \in \mathbb{R}^3$  appartengono ad uno stesso piano, indipendente da  $t$ .*

Per una prova dell'esistenza di equilibri relativi nel problema ad  $n$  corpi si veda il lavoro di B. Elmabsout [10] in cui si dimostra che per  $n \geq 4$  essa è sottoposta alla condizione che le  $n$  masse siano uguali, mentre per  $n = 3$  la loro esistenza non è condizionata dalle masse.

## 2.2 Invarianza per omotetie.

Si ha che le soluzioni delle equazioni di Lagrange di lagrangiana del tipo

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \|M\dot{q}\|^2 - V(q)$$

con  $q \in Q \subset \mathbb{R}^{3n}$  e  $V(q)$  una funzione omogenea di grado  $-1$ , sono *invarianti per omotetie*, ovvero vale la seguente:

**Proposizione 1.** *Se  $t \mapsto q(t)$  è soluzione delle equazioni di Lagrange di lagrangiana come qui sopra, con  $Q$  invariante per omotetie (ovvero se  $q \in Q$  anche  $\alpha q \in Q \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ), allora anche la funzione*

$$t \mapsto \alpha q(\alpha^{-3/2}t)$$

*è soluzione delle equazioni di Lagrange  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $t \mapsto q(t)$  soluzione delle equazioni di Lagrange, ovvero sia soluzione di

$$\ddot{q}(t) = -M^{-1}\nabla V(q(t)) \quad \forall t$$

Fissato  $\alpha$ , vogliamo vedere se esiste  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0$ , tale che anche

$$t \mapsto \tilde{q}(t) = \alpha q(st)$$

sia soluzione delle equazioni del moto. Derivando otteniamo che  $\ddot{\tilde{q}}(t) = \alpha s^2 \ddot{q}(st)$ , ma dato che  $q(t)$  è soluzione, allora  $\tilde{q}(t)$  soddisfa

$$\ddot{\tilde{q}}(t) = -\alpha s^2 M^{-1} \nabla V(q(st)).$$

Dato che  $V$  è omogeneo di grado  $-1$ ,  $\nabla V$  è omogeneo di grado  $-2$  e quindi  $\ddot{\tilde{q}}(t) = -\alpha^3 s^2 M^{-1} \nabla V(\tilde{q}(st))$ , e questo è vero se e solo se  $S = \alpha^{-3/2}$ , ed allora  $\tilde{q}(t)$  è soluzione delle equazioni del moto.  $\square$

Questa proprietà implica che le soluzioni che differiscono per un'omotetia abbiano le stesse proprietà di stabilità, e dunque studiare una soluzione significa studiare un'intera classe di soluzioni omotetiche. Per un'accurata dimostrazione di questo fatto si veda [4].

## 2.3 Coordinate rotanti e splitting del problema.

Consideriamo un equilibrio relativo  $\bar{q}(t)$ , fissando dunque il piano dove giace. Sia  $\omega$  la sua velocità angolare. Passiamo a coordinate rotanti

$$q(t) = R(\omega t)x(t),$$

con  $R(\theta)$  matrice  $3n \times 3n$  a blocchi di forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando questo cambio di coordinate si ottiene che le equazioni del moto diventano il sistema di equazioni differenziali

$$M\ddot{x} + 2\omega\hat{J}M\dot{x} = -\nabla V(x) + \omega^2 M\hat{I}x, \quad (2.2)$$

dove  $\hat{I} = R^{-1}(\theta)R''(\theta)$  e  $\hat{J} = R^{-1}(\theta)R'(\theta)$  sono matrici  $3n \times 3n$  costanti, diagonali a blocchi di forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

rispettivamente. Nel ricavare quest'equazione si è utilizzato il fatto che le matrici  $R$ ,  $\hat{I}$  e  $\hat{J}$  commutano con la matrice delle masse  $M$ .

Ora  $\bar{x} = R^{-1}(\omega t)\bar{q}(t)$  è l'equilibrio relativo e quindi è equilibrio per le equazioni del moto (2.2). Dunque, avendo  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ , si ottiene

$$-\nabla V(\bar{x}) = -\omega^2 M\hat{I}\bar{x}. \quad (2.3)$$

Si noti che un qualunque equilibrio  $\bar{y}$  delle equazioni (2.2) deve essere un equilibrio relativo. Vale infatti il seguente

**Lemma 1.** *Ogni equilibrio delle equazioni del moto (2.2)  $\bar{y}$  è una configurazione planare, e dunque è un equilibrio relativo per le equazioni (2.1).*

*Dimostrazione.* Infatti, se  $\bar{y}$  non fosse planare, sia il corpo di massa  $m_k$  quello più distante dal piano. Senza perdita di generalità possiamo fissare come piano quello generato dalle prime due componenti. Si ha che la terza componente dell'equazione relativa al  $k$ -esimo corpo in (2.3), date  $m_i$  ed  $m_j$  le masse degli altri due corpi, è

$$-\sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k (y_{k3} - y_{j3})}{d_{jk}^3} = 0,$$

ma per come abbiamo scelto  $m_k$  i termini della somma sono non negativi, e dunque devono essere entrambi nulli, e quindi i corpi sono planari.  $\square$

L'idea di Moeckel è che, per quanto riguarda la linearizzazione delle equazioni, si possa effettuare uno *splitting*, ovvero una divisione del problema in due parti, una planare e una normale, fissando come piano quello in cui giace la configurazione.

Considerando dunque una qualunque configurazione  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , possiamo scrivere ogni  $x_i$  come un vettore  $(r_i, s_i)^T$  con  $r_i \in \mathbb{R}^2$ , il piano della configurazione centrale, ed  $s_i \in \mathbb{R}$ , la normale al piano. Le equazioni del moto diventano della forma

$$\begin{cases} \tilde{M}\ddot{r} + 2\omega J\tilde{M}\dot{r} = -\nabla\tilde{V}(r, s) + \omega^2\tilde{M}r \\ \check{M}\ddot{s} = -\nabla\check{V}(r, s) \end{cases}, \quad (2.4)$$

con  $\tilde{M} = \text{diag}(m_1, m_1, \dots, m_n, m_n)$ ,  $\check{M} = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ ,  $J$  è una matrice  $2n \times 2n$  a blocchi  $2 \times 2$  simplettici,  $I_{2n}$  è l'identità  $2n \times 2n$  mentre  $\tilde{V}$  e  $\check{V}$  sono le restrizioni del potenziale al piano e alla normale.

Possiamo fare questo semplicemente riordinando le coordinate: una qualunque configurazione  $x$  sarà della forma  $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3})^T$ , dove  $x_{ij}$  sta ad indicare la  $j$ -esima coordinata dell' $i$ -esimo corpo. Cambiando l'ordine delle coordinate in modo che si abbia

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, x_{13}, \dots, x_{n3})^T,$$

$x$  si trova direttamente nella forma  $(r, s)^T$ , con  $r$  planare ed  $s$  normale. Con operazioni di scambio di righe e colonne, si possono scrivere anche le matrici  $M$ ,  $\hat{J}$  e  $\hat{I}$  ed il gradiente  $\nabla V(x)$  nella stessa forma.

# Capitolo 3

## Stabilità spettrale.

### 3.1 Linearizzazione del problema e stabilità spettrale.

Sia  $\bar{x} = (\bar{r}, \bar{s} = 0)^T$  equilibrio del sistema di equazioni differenziali (2.4). Linearizzando a questo equilibrio otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} \tilde{M}\ddot{\rho} + 2\omega J\tilde{M}\dot{\rho} = (-\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0) + \omega^2\tilde{M})\rho \\ \tilde{M}\ddot{\sigma} = -\mathcal{H}\check{V}(\bar{r}, 0)\sigma \end{cases},$$

dove  $\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0)$  e  $\mathcal{H}\check{V}(\bar{r}, 0)$  sono le restrizioni della matrice hessiana del potenziale al piano della configurazione e alla normale calcolate in  $(\bar{r}, 0)$ .

Usando il fatto che le matrici  $\tilde{M}^{-1}$  e  $\check{M}^{-1}$  siano invertibili e che  $\tilde{M}^{-1}$  commuti con  $J$ , si possono riscrivere nella forma più semplice:

$$\begin{cases} \ddot{\rho} + 2\omega J\dot{\rho} = (-\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0) + \omega^2 I_{2n})\rho \\ \ddot{\sigma} = -\check{M}^{-1}\mathcal{H}\check{V}(\bar{r}, 0)\sigma \end{cases}. \quad (3.1)$$

Inoltre vale il seguente lemma:

**Lemma 2.** *Il polinomio caratteristico del sistema di equazioni differenziali del secondo ordine (3.1) si fattorizza nel prodotto di  $\tilde{G}(\lambda)$  e  $\tilde{H}(\lambda)$ , con*

$$\tilde{G}(\lambda) = \det[-\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0) + (\omega^2 - \lambda^2)I_{2n} - 2\omega\lambda J]$$

e

$$\tilde{H}(\lambda) = \det[-\check{M}^{-1}\mathcal{H}\check{V}(\bar{r}, 0) - \lambda^2 I_n].$$

*Dimostrazione.* La linearizzazione (3.1) può essere scritta come un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\rho} = v \\ \dot{v} = (-\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0) + \omega^2 I_{2n})\rho - 2\omega Jv \\ \dot{\sigma} = u \\ \dot{u} = -\check{M}^{-1}\mathcal{H}\check{V}(\bar{r}, 0)\sigma \end{cases}.$$

La matrice di questa linearizzazione è

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O}_{2n} & I_{2n} & \mathbb{O}_{2n \times n} & \mathbb{O}_{2n \times n} \\ (-\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0) + \omega^2 I_{2n}) & -2\omega J & \mathbb{O}_{2n \times n} & \mathbb{O}_{2n \times n} \\ \mathbb{O}_{n \times 2n} & \mathbb{O}_{n \times 2n} & \mathbb{O}_n & I_n \\ \mathbb{O}_{n \times 2n} & \mathbb{O}_{n \times 2n} & -\check{M}^{-1}\mathcal{H}\check{V}(\bar{r}, 0) & \mathbb{O}_n \end{pmatrix},$$

che, essendo una matrice diagonale a blocchi, ha come polinomio caratteristico già fattorizzato proprio  $\tilde{G}(\mu)\check{H}(\mu) = 0$ , con  $\tilde{G}(\mu)$  il polinomio caratteristico del blocco relativo alla parte planare e  $\check{H}(\mu)$  quello del blocco relativo alla parte normale.  $\square$

Per semplificare la forma e i calcoli, consideriamo gli *autovalori normalizzati*  $\mu = \lambda/|\omega|$  e raccogliamo  $\omega^2$  ottenendo così l'equazione

$$G(\mu)H(\mu) = 0, \quad (3.2)$$

con  $G(\mu)$  dato da

$$G(\mu) = \det[-\omega^{-2}\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0) + (1 - \mu^2)I_{2n} - 2\mu J],$$

e con  $H(\mu)$  dato da

$$H(\mu) = \det[-\omega^{-2}\check{M}^{-1}\mathcal{H}\check{V}(\bar{r}, 0) - \mu^2 I_n].$$

Dimostriamo la seguente proposizione:

**Proposizione 2.**  $G(\mu)$  e  $H(\mu)$  definiti qui sopra sono funzioni pari di  $\mu$ .

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda il secondo fattore si vede banalmente che

$$\begin{aligned} H(-\mu) &= \det[-\omega^{-2}\check{M}^{-1}\mathcal{H}\check{V}(\bar{r}, 0) - (-\mu)^2 I_n] \\ &= \det[-\omega^{-2}\check{M}^{-1}\mathcal{H}\check{V}(\bar{r}, 0) - \mu^2 I_n] \\ &= H(\mu). \end{aligned}$$

### 3.1. LINEARIZZAZIONE DEL PROBLEMA E STABILITÀ SPETTRALE.13

Per quanto riguarda  $G(\mu)$ , consideriamo che la matrice  $J = -J^T$  è antisimmetrica per costruzione ed inoltre notiamo che  $(\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0))^T\tilde{M} = \mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0)^T = \mathcal{H}V(\bar{r}, 0) = \tilde{M}(\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}))$ , e ciò significa che  $\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0)$  è simmetrica rispetto al prodotto interno definito da  $\tilde{M}$ . Inoltre in una qualunque base  $\tilde{M}$ -ortonormale  $J$  rimane antisimmetrica e  $\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0)$  è proprio simmetrica. Ma allora, ponendoci in una tale base, e ricordando che  $\det[A] = \det[A^T]$  si ha la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} G(\mu) &= \det[-\omega^{-2}\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0) + (1 - \mu^2)I_{2n} - 2\mu J] \\ &= \det[(-\omega^{-2}\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0) + (1 - \mu^2)I_{2n} - 2\mu J)^T] \\ &= \det[-\omega^{-2}\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0) + (1 - \mu^2)I_{2n} + 2\mu J] = G(-\mu), \end{aligned}$$

e dunque anche il polinomio  $G(\mu)$  è pari. □

Definiamo ora la *stabilità spettrale*, ovvero l'oggetto di studio di questa tesi.

**Definizione 3.** *Si dice che un equilibrio è stabile spettralmente se le radici del polinomio caratteristico della linearizzazione delle equazioni del moto all'equilibrio, cioè i suoi autovalori, sono tutte numeri immaginari puri o nulli.*

Si noti che questa può essere solo una condizione necessaria (ma non sufficiente) per la stabilità alla Lyapunov, in quanto siamo in ambito conservativo, e la lagrangiana  $\mathcal{L}$  è indipendente dal tempo e quindi c'è conservazione dell'energia e dunque dei volumi, e non è possibile che ci sia stabilità asintotica.

Studiamo quindi lo spettro relativo ad un equilibrio relativo  $\bar{x} = (\bar{r}, 0)$  separando la parte planare da quella normale. Diamo quindi le seguenti definizioni di equilibrio *planarmente spettralmente stabile*, equilibrio *normalmente spettralmente stabile* ed equilibrio *normalmente non degenerare*:

**Definizione 4.** *Si dice che  $\bar{x} = (\bar{r}, 0)$  è planarmente spettralmente stabile se le radici di  $G(\mu)$ , detto polinomio di stabilità planare, sono zero o numeri immaginari puri.*

**Definizione 5.** *Si dice che  $\bar{x}$  è normalmente spettralmente stabile se le radici di  $H(\mu)$ , detto polinomio di stabilità normale, sono zero o numeri immaginari puri.*

**Definizione 6.** *Un equilibrio è normalmente non degenerare se è normalmente spettralmente stabile ed inoltre  $H(\mu)$  ha una sola coppia di radici nulle.*

### 3.2 Stabilità spettrale normale.

Studiamo innanzitutto la parte normale del problema, e quindi le soluzioni dell'equazione

$$H(\mu) = \det[-\omega^{-2}\check{M}^{-1}\check{\mathcal{H}}\check{V}(\bar{r}, 0) - \mu^2 I_n] = 0.$$

L'hessiano del potenziale  $\check{\mathcal{H}}\check{V}$  è una matrice  $n \times n$ ,

$$\begin{cases} \check{\mathcal{H}}\check{V}_{jk} = -\frac{m_j m_k}{d_{jk}^3} & \text{se } j \neq k, \\ \check{\mathcal{H}}\check{V}_{kk} = \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{d_{jk}^3} & \text{se } j = k. \end{cases}$$

che moltiplicato per  $\omega^{-2}\check{M}^{-1}$  restituisce la matrice  $C = \omega^{-2}\check{M}^{-1}\check{\mathcal{H}}\check{V}$  di dimensione  $n \times n$  che ha forma:

$$C = -\omega^{-2} \begin{pmatrix} -\sum_{i \neq 1} \frac{m_i}{d_{i1}^3} & \frac{m_2}{d_{12}^3} & \frac{m_3}{d_{13}^3} & \cdots & \frac{m_n}{d_{1n}^3} \\ \frac{m_1}{d_{21}^3} & -\sum_{i \neq 2} \frac{m_i}{d_{i2}^3} & \frac{m_3}{d_{23}^3} & \cdots & \frac{m_n}{d_{2n}^3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{m_1}{d_{n1}^3} & \cdots & \cdots & \cdots & -\sum_{i \neq n} \frac{m_i}{d_{in}^3} \end{pmatrix}.$$

Dimostriamo la seguente:

**Proposizione 3.** *Ogni equilibrio relativo  $x$  è spettralmente normalmente stabile e normalmente non degenere.*

*Dimostrazione.* Per semplicità consideriamo gli autovalori della matrice  $C$ . Infatti, se poniamo  $\mu^2 = \alpha$ , si ha che se  $\bar{\alpha}$  è radice di  $K(\alpha) = \det[C - \alpha I_n]$ , polinomio caratteristico di  $C$ , allora  $\lambda = \pm\sqrt{\bar{\alpha}}$  è autovalore relativo all'equilibrio  $\bar{x}$ . Perché  $\bar{x}$  sia spettralmente stabile e normalmente non degenere, serve che ci sia un solo autovalore nullo e gli altri negativi.

Per la struttura di  $C$ , si ha che

$$|C_{kk}| = \sum_{j \neq k} |C_{kj}|;$$

$C$  è simmetrica rispetto al prodotto interno definito da  $M$ , e quindi i suoi autovalori sono tutti reali. Sia  $\zeta$  un autovalore e sia  $v \in \mathbb{R}^n$  tale che  $Cv = \zeta v$ . Consideriamo la maggiore, in valore assoluto, tra le  $n$  componenti di  $v$ , e sia essa  $v_k$ . Possiamo, senza perdita di generalità, porre  $v_k \geq 0$ , ma allora:

$$\zeta v_k = \sum_j C_{kj} v_j \leq C_{kk} v_k + \sum_{j \neq k} |C_{kj} v_j| \leq \left( -|C_{kk}| + \sum_{j \neq k} |C_{kj}| \right) v_k = 0,$$

ma dato che si aveva  $v_k \geq 0$ , si deve avere  $\zeta \leq 0$ , e questo prova la stabilità spettrale normale.

Per provare che  $\bar{x}$  è anche normalmente non degenere, si noti che il vettore  $(1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$  è un autovettore relativo ad un autovalore nullo. Se un altro autovettore  $v$  appartenesse al nucleo della matrice  $C$ , scegliendo  $v_k$  come sopra tutte le disequazioni diventerebbero uguaglianze, ma questo è possibile solo se  $v_k = v_j$  per qualunque  $j \neq k$ , e questo è possibile solo se  $v$  è proporzionale  $(1, \dots, 1)^T$ .

□

Dunque ogni equilibrio relativo è stabile normalmente e, in più, è normalmente non degenere.

### 3.3 Stabilità spettrale planare.

La parte planare del problema si riduce allo studio del polinomio di stabilità planare che riscriviamo, per semplicità di notazione, così:

$$G(\mu) = \det[\omega^{-2}B + (1 - \mu^2)I_{2n} - 2\mu J], \quad (3.3)$$

dove  $B = -\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r}, 0)$ , matrice  $2n \times 2n$  a blocchi di dimensione  $2 \times 2$ , che possiamo definire per casi:

$$B_{jk} = \begin{cases} \frac{m_k}{d_{jk}^3} [I_2 - 3u_{jk}u_{jk}^T] & \text{se } j \neq k, \\ -\sum_{j \neq k} B_{jk} & \text{altrimenti.} \end{cases}, \quad (3.4)$$

dove  $u_{jk} \in \mathbb{R}^2$  è il versore direzione da  $m_j$  a  $m_k$ , definito da  $\frac{x_k - x_j}{d_{jk}}$ .

Cerchiamo ora una fattorizzazione del polinomio di stabilità planare  $G(\mu)$  in modo da studiare più comodamente gli autovalori. Dimostriamo che per trovare dei fattori del polinomio è sufficiente trovare dei sottospazi di  $\mathbb{R}^{2n}$  che siano invarianti sotto le trasformazioni lineari  $B$  e  $J$ . Vale infatti la seguente proposizione:

**Lemma 3.** *Sia  $S \subset \mathbb{R}^{2n}$  un sottospazio tale che si abbia  $JS, BS \subseteq S$  e sia  $S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{2n} : v^T M w = 0 \quad \forall w \in S\}$  il complemento ortogonale di  $S$  rispetto al prodotto interno definito da  $M$ . Si ricordi inoltre che  $M$  commuta con  $J$  ed inoltre che  $J = -J^T$  e che  $MB = B^T M$ . Allora  $JS^\perp, BS^\perp \subseteq S^\perp$  ed inoltre la somma diretta  $\mathbb{R}^{2n} = S \oplus S^\perp$  induce una fattorizzazione del polinomio  $G(\mu) = G_S(\mu)G_{S^\perp}(\mu)$  con  $G_S$  e  $G_{S^\perp}$  polinomi caratteristici delle matrici della linearizzazione delle equazioni del moto ottenuti tramite la restrizione a  $S$  e  $S^\perp$  degli operatori  $B, I$  e  $J$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che  $JS^\perp \subseteq S^\perp$  sapendo che  $JS \subseteq S$ .

Asserire che  $u \in S^\perp$  è del tutto equivalente a dire che  $\forall w \in S, u^T M w = 0$ .

Dimostriamo l'inclusione  $JS^\perp \subseteq S^\perp$ . Sia  $w \in S$  e  $u \in S^\perp$ . Allora

$$(Ju)^T M w = u^T J^T M w = -u^T M J w = 0$$

in quanto  $Jw \in S \quad \forall w \in S$ . Questo vale analogamente per  $B$ .

Ora, dato che  $S \oplus S^\perp$ , possiamo scrivere ogni vettore  $v = s + s^\perp$ . Ma allora la matrice  $L = \omega^{-2}B + (1 - \mu^2)I_{2n} - 2\mu J$ , che dà il polinomio caratteristico della linearizzazione della parte planare, rispetta questa divisione in quanto si ha che

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s^\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}s + L_{12}s^\perp \\ L_{21}s + L_{22}s^\perp \end{pmatrix},$$

e da  $JS \subseteq S$  e  $BS \subseteq S$  si ottiene la condizione per cui  $L_{12}$  e  $L_{21}$  sono nulli, in quanto si deve avere che  $L_{11}s + L_{12}s^\perp \in S$  e  $L_{21}s + L_{22}s^\perp \in S^\perp$ , e quindi la matrice diventa diagonale a blocchi, e questo induce direttamente la fattorizzazione.  $\square$

Dato che i fattori  $G_S(\mu)$  e  $G_S^\perp(\mu)$  sono funzioni pari, i sottospazi  $S$  ed  $S^\perp$  devono avere dimensione pari: il caso più semplice è prendere dunque  $S$  tale che  $\dim(S) = 2$ . Inoltre, dato che  $B$  è  $M$ -simmetrica, i suoi autovalori sono reali e gli autovettori possono essere scelti  $M$ -ortogonali. Con certezza, ogni sottospazio invariante  $S$  di dimensione due contiene almeno un autovettore  $v \in S$  ed inoltre, dato che  $S$  è anche  $J$ -invariante, esso contiene anche  $Jv = w \in S$  che, dato che  $w$  è  $M$ -ortogonale a  $v$ , è anch'esso autovettore di  $B$ . Vogliamo ora dimostrare che  $G(\mu)$  contiene un fattore di grado quattro in  $\mu$ ; vale il seguente:

**Lemma 4.** *Sia  $S \subset \mathbb{R}^{2n}$  sottospazio  $M$ -invariante per  $J$  e  $B$  con  $\dim(S) = 2$ . Allora, dopo esserci posti in una base  $M$ -ortonormale, e detti  $a$  e  $b$  gli autovalori della restrizione di  $\omega^{-2}B$  ad  $S$ ,  $G(\mu)$  è divisibile per un polinomio di grado*

$$G_S(\mu) = \mu^4 + \alpha\mu^2 + \beta,$$

dove  $\alpha = 2 - a - b$  e  $\beta = (1 + a)(1 + b)$ .

*Dimostrazione.* Per la proposizione precedente, esiste un fattore di grado 4 corrispondente al sottospazio  $S$  di dimensione 2. Per trovarlo, introduciamo una base di autovettori  $\{v, w\}$  per  $B$  con  $w = Jv$ . La matrice della restrizione di  $\omega^{-2}B$  e quella di  $J$  in questa base saranno semplicemente

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si avrà che

$$G_S(\mu) = \det \begin{pmatrix} a+1-\mu^2 & 2\mu \\ -2\mu & b+1-\mu^2 \end{pmatrix},$$

e quindi, infine:

$$\begin{aligned} G_S(\mu) &= (a+1-\mu^2)(b+1-\mu^2) + 4\mu^2 \\ &= \mu^4 + (2-a-b)\mu^2 + (a+1)(b+1) \\ &= \mu^4 + \alpha\mu^2 + \beta. \end{aligned}$$

□

Si noti che  $G_S$  avrà zeri nulli o immaginari puri se e solo se  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  e  $\alpha^2 - 4\beta \geq 0$ .

Questo lemma si può applicare almeno due volte per ogni equilibrio relativo, generando l'interessante risultato espresso dalla proposizione seguente:

**Proposizione 4.** *Ogni equilibrio relativo ha, indipendentemente dal numero dei corpi e dalle loro masse, 8 autovalori relativi alla parte planare del problema fissati, ed essi sono  $0, 0, \pm i, \pm i, \pm i$ .*

*Dimostrazione.* Applicheremo due volte il lemma precedente sfruttando, come sottospazi invarianti di dimensione 2, spazi generati da coppie di autovettori  $\{v, w\}$  legate dalla relazione  $Jv = w$ .

Per la prima applicazione, notiamo che, data la forma di  $B$  espressa in (3.4),  $v = (1, 0, \dots, 1, 0)^T$  appartiene al nucleo di  $B$ , come anche  $Jv = w = (0, 1, \dots, 0, 1)^T$ . I due autovalori relativi alla restrizione al sottospazio  $S_1 = \{v, w\}$  di  $A$  saranno  $a = b = 0$ , e dunque

$$G_{S_1}(\mu) = \mu^4 + 2\mu^2 + 1 = (\mu^2 + 1)^2$$

darà come autovalori relativi all'equilibrio relativo  $\pm i$ , ognuno ripetuto due volte.

Per la seconda, invece, consideriamo proprio  $v = \bar{r}$  e  $w = Jv = J\bar{r}$ , e quindi sia  $S_2 = \{v, w\}$ . Ricordiamo che il potenziale è una funzione omogenea grado  $-1$ , e quindi per il Teorema di Eulero sulle funzioni omogenee si ha  $\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r})v = -2\nabla\tilde{V}(\bar{r})$ ; inoltre, la formula (2.3) ristretta al piano diventa  $-\nabla\tilde{V}(\bar{r}) = -\omega^2 M\bar{r}$ , e dunque si ha che:

$$\begin{aligned} Bv &= -\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r})v = 2\tilde{M}^{-1}\nabla\tilde{V}(\bar{r}) = \\ &= 2\tilde{M}^{-1}\omega^2\tilde{M}\bar{r} = 2\omega^2\tilde{M}^{-1}\tilde{M}\bar{r} = -2\omega^2\bar{r} =, \\ &= 2\omega^2v \end{aligned}$$

che prova che  $2\omega^2$  è autovalore di  $B$  relativo all'autovettore  $v$ . Si è usato il fatto che  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{M}^{-1}$  e  $J$  commutano tra loro.

Per quanto riguarda  $w$ , invece, facciamo le seguenti considerazioni preliminari. Si ha  $J = R'(0)$ , con  $R(\theta)$  la restrizione al piano della matrice di rotazione utilizzata precedentemente. Inoltre, essendo il potenziale invariante sotto rotazioni, si ha che  $\nabla V(R(\theta)\bar{r}) = R(\theta)\nabla V(\bar{r})$ . Ma allora, differenziando questa formula in  $\theta = 0$  e moltiplicando da entrambe le parti per  $M^{-1}$  si ottiene, utilizzando sempre l'omogeneità del potenziale e la restrizione al piano di (2.3),

$$\begin{aligned} Bw &= -\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r})w = -\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r})R'(0)\bar{r} = -\tilde{M}^{-1}\mathcal{H}\tilde{V}(\bar{r})J\bar{r} = \\ &= -\tilde{M}^{-1}J\nabla\tilde{V}(\bar{r}) = -\tilde{M}^{-1}J\omega^2M\bar{r} = -\omega^2J\bar{r} = \\ &= -\omega^2w, \end{aligned}$$

e dunque  $-\omega^2$  è l'autovalore di  $B$  relativo a  $w$ , ma allora gli autovalori di  $\omega^{-2}B$  sono, rispettivamente  $a = 2$  e  $b = -1$ , da cui si avrà che

$$G_{S_2}(\mu) = \mu^2(\mu^2 + 1),$$

e dunque gli autovalori relativi all'equilibrio relativo sono uno zero doppio e  $\pm i$ . Anche qui si è utilizzato il fatto che le matrici  $M^{-1}$  e  $J$  commutino tra loro.  $\square$

Quindi ogni equilibrio relativo ha nello spettro dieci autovalori noti su  $6n$ , di cui uno zero doppio relativo alla parte normale e gli otto trovati nella proposizione appena dimostrata, tutti indipendenti dal numero di corpi e dalle masse.

# Capitolo 4

## Problema dei tre corpi.

### 4.1 Configurazioni triangolari.

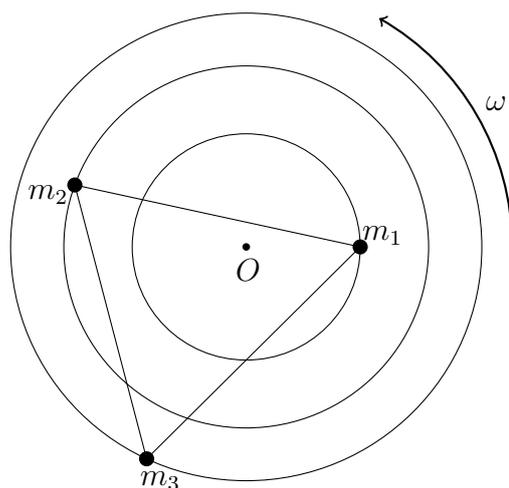


Figura 4.1: Una configurazione triangolare.

Nel problema dei tre corpi ci sono due equilibri relativi: la configurazione collineare scoperta da Eulero e le configurazioni triangolari la cui paternità è attribuita da alcuni a Laplace e da altri a Lagrange. Dimostriamo l'esistenza di queste configurazioni.

**Proposizione 5.** *Comunque si scelgano le tre masse  $m_1, m_2, m_3 > 0$  e comunque sia fissata  $d > 0$ , esiste una soluzione planare al sistema di equazioni*

differenziali  $M\ddot{q} = -\nabla V(q)$ , con  $q_1, q_2, q_3$  che formano un triangolo equilatero di lato  $d$  e rotante uniformemente con velocità angolare  $\pm|\omega|$  attorno al suo centro di massa, dove  $\omega^2 = (m_1 + m_2 + m_3)/d^3$ ,

*Dimostrazione.* Sia  $q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))^T$  una configurazione in cui le  $q_i(t)$  siano poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato  $d$ , in un sistema di riferimento dove il baricentro coincide con l'origine  $O$ . Vogliamo verificare che, dato  $q_i(t) = R(\omega t)\bar{x}_i$ ,  $q(t)$  sia la soluzione cercata.

Si ha che, ricordando che applicare a  $q_i$  il prodotto di matrici  $R'(\omega t)R^{-1}$  è equivalente a fare il prodotto vettore con la velocità angolare  $\omega$ ,

$$\dot{q}_i = R'(\omega t)\bar{x}_i = R'(\omega t)R^{-1}(\omega t)q_i = \omega \times q_i,$$

dato che  $R(\omega t)$  definisce una rotazione su di un piano ortogonale ad  $\omega$ , possiamo portarla fuori dal prodotto vettore, ottenendo dunque

$$\dot{q} = R(\omega t)(\omega \times \bar{x}_i)$$

Ma allora si ha che:

$$m_i\ddot{q}_i = \omega \times \dot{q}_i = \omega \times (\omega \times q_i) = R[\omega \times (\omega \times \bar{x}_i)],$$

e quindi le equazioni del moto sono, per ogni  $i$ ,

$$m_i\omega \times (\omega \times \bar{x}_i) = -m_i\omega^2\bar{x}_i = -\sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{d^3}$$

con  $d = |\bar{x}_i - \bar{x}_j|$  il lato del triangolo. Fattorizzando ora  $d$  e ricordando la definizione di baricentro, si ottiene l'uguaglianza

$$-m_i\omega^2\bar{x}_i = \frac{m_i}{d^3}\tilde{m}(-\bar{x}_i)$$

con  $\tilde{m} = m_1 + m_2 + m_3$ . Questa uguaglianza è soddisfatta per ogni  $t$  se  $\bar{x}_i = R^{-1}(\omega t)q_i(t)$  e se  $\omega^2 = \tilde{m}/d^3$ , e dunque la configurazione triangolare è un equilibrio relativo del problema dei tre corpi.  $\square$

Consideriamo quindi la configurazione triangolare  $\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)^T = (1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})^T$ . Allora si ha che  $d_{jk} = d = \sqrt{3}$ , il potenziale  $V(x) = -(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)/\sqrt{3}$  e  $\omega^2 = \tilde{m}/3\sqrt{3}$ .

La scelta di fissare una tale  $d$  non inficia la generalità dei risultati, in quanto la Proposizione 1 assicura che il problema è *invariante per omotetie*.

## 4.2 Stabilità spettrale del problema dei tre corpi.

Seguendo lo schema precedente, studiamo la stabilità spettrale normale. La matrice della restrizione alla normale dell'hessiano del potenziale calcolato nell'equilibrio  $\mathcal{H}\check{V}(\bar{r}, 0)$  è:

$$-\begin{pmatrix} -\frac{m_1(m_2+m_3)}{3\sqrt{3}} & \frac{m_1m_2}{3\sqrt{3}} & \frac{m_1m_3}{3\sqrt{3}} \\ \frac{m_1m_2}{3\sqrt{3}} & -\frac{m_2(m_1+m_3)}{3\sqrt{3}} & \frac{m_2m_3}{3\sqrt{3}} \\ \frac{m_1m_3}{3\sqrt{3}} & \frac{m_2m_3}{3\sqrt{3}} & -\frac{m_3(m_1+m_2)}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

che moltiplicata per  $\omega^{-2}\check{M}^{-1}$ , e dopo aver raccolto  $1/3\sqrt{3}$  restituisce:

$$-\frac{\omega^{-2}}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -(m_2+m_3) & m_2 & m_3 \\ m_1 & -(m_1+m_3) & m_3 \\ m_1 & m_2 & -(m_1+m_2) \end{pmatrix},$$

che ha come autovalori  $\{0, -1, -1\}$ , e dunque gli autovalori relativi all'equilibrio relativo sono  $\{0, 0, \pm i, \pm i\}$ , che conferma il fatto che la configurazione triangolare, essendo un equilibrio relativo, è normalmente non degenera.

Per quanto riguarda la parte planare, dobbiamo trovare le soluzioni dell'equazione

$$G(\mu) = \det[\omega^{-2}B + (1 - \mu^2)I_6 - 2\mu J], \quad (4.1)$$

dove la matrice  $B$  sarà data da

$$B = \frac{1}{4\tilde{m}}\tilde{B} \quad (4.2)$$

con  $\tilde{B}$  la matrice  $6 \times 6$

$$\begin{pmatrix} 5(m_2+m_3) & 3\sqrt{3}(m_3-m_2) & -5m_2 & 3\sqrt{3}m_2 & -5m_3 & -3\sqrt{3}m_3 \\ 3\sqrt{3}(m_3-m_2) & -(m_2+m_3) & 3\sqrt{3}m_2 & m_2 & -3\sqrt{3}m_3 & m_3 \\ -5m_1 & 3\sqrt{3}m_1 & 5m_1-4m_3 & -3\sqrt{3}m_1 & 4m_3 & 0 \\ 3\sqrt{3}m_1 & m_1 & -3\sqrt{3}m_1 & -m_1+8m_3 & 0 & -8m_3 \\ -5m_1 & -3\sqrt{3}m_1 & 4m_2 & 0 & 5m_1-4m_2 & 3\sqrt{3}m_1 \\ -3\sqrt{3}m_1 & m_1 & 0 & -8m_2 & 3\sqrt{3}m_1 & -m_1+8m_2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio  $G(\mu)$  ha dunque, oltre agli zeri trovati nel capitolo precedente, anche altre quattro radici. Infatti si ha, calcolando esplicitamente il polinomio,

$$\begin{aligned} G(\mu) = & \frac{1}{4\tilde{m}^2}\mu^2(1+\mu^2)^3(27m_1m_2+27m_1m_3+27m_2m_3+4m_1^2\mu^2 \\ & + 8m_1m_2\mu^2+4m_2^2\mu^2+8m_1m_3\mu^2+8m_2m_3\mu^2+4m_3^2\mu^2+4m_1^2\mu^4+ \\ & + 8m_1m_2\mu^4+4m_2^2\mu^4+8m_1m_3\mu^4+8m_2m_3\mu^4+4m_3^2\mu^4), \end{aligned}$$

in cui si riconoscono distintamente i polinomi  $G_{S_1}$  e  $G_{S_2}$  che hanno quattro radici ognuno. Rimangono da calcolare quindi le ultime quattro radici.

Effettuando la divisione tra i polinomi e raccogliendo otteniamo il polinomio di grado quattro

$$4\mu^2(1 + \mu^2)(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) + (8\mu^4 + 8\mu^2 + 27)(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3),$$

che può essere riscritta, raccogliendo e distribuendo nuovamente, come un polinomio di forma  $\mathcal{Q}(\mu) = \mu^4 + \alpha\mu^2 + \beta$ , e si avrà che gli autovalori sono le soluzioni di:

$$\mathcal{Q}(\mu) = \mu^4 + \mu^2 + \frac{27(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)}{4\tilde{m}^2} = 0,$$

Perché le soluzioni di questa equazione siano tutte immaginarie pure, devono valere le condizioni espresse dopo la dimostrazione del Lemma 4. Dunque si deve avere:

$$\begin{cases} \alpha = 1 \geq 0 \\ \beta = \frac{27(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)}{4\tilde{m}^2} \geq 0 \\ \alpha^2 - 4\beta \geq 0 \end{cases} ,$$

e mentre le prime due sono vere sempre, in quanto  $1 \geq 0$  e  $\beta$  è un rapporto tra due quantità positive, la terza è vera se e solo se

$$\tilde{m}^2 \geq 27(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3) \tag{4.3}$$

che è dunque la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità spettrale della configurazione a triangolo equilatero per il Problema dei Tre Corpi trovata da Routh.

# Bibliografia

- [1] F. Fassó; *Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica*, 2014-2015, Cleup.
- [2] F. Cardin; *Sistemi dinamici Meccanici*, Università di Padova, A.A. 2012/2013.
- [3] G. Benettin; *Appunti per il corso di Meccanica Analitica*, A.A. 2013/2014.
- [4] M. Ronzani; *Configurazioni centrali ad anello nel problema degli  $N$  corpi*, Tesi di Laurea, Università di Padova, A.A. 2009/2010.
- [5] M. Stoppato; *Stabilità alla Nekhoroshev delle configurazioni centrali del problema degli  $N$  corpi*, Tesi di Laurea, Università di Padova, A.A. 2013/2014.
- [6] R. Moeckel; *Linear stability analysis of some symmetrical classes of relative equilibria*. Hamiltonian Dynamical System. History, Theory, and Applications; ed. H.S.Dumas et al., IMA No. 63, Springer-Verlag, New York (1995).
- [7] K. R. Meyer, G. R. Hall, D. Offin; *Introduction to Hamiltonian Dynamical System and the  $N$ -Body Problem* (Seconda edizione); Applied mathematical science 90, ed. Springer.
- [8] R. Giorgilli; *Dispense di Meccanica Celeste*, capitolo 8; Università Federico Endrigues di Milano, Sito web: [www.mat.unimi.it/users/antonio/meccel/meccel.html](http://www.mat.unimi.it/users/antonio/meccel/meccel.html).
- [9] E. J. Routh; *On Laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady motion*, Proc. Lond. Math. Soc. 6, 86–97 (1875).
- [10] B. Elmabsout; *Sur l'existence de certaines configurations d'équilibre relatif dans le problème des  $N$  corps*; Dynamic and Stability of Systems 9, No. 4 (1988).