Mecc. Razionale -Matematici- Mod. A- Prova scritta del 7/5/ 2001

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome, Nome, data, Mod. A.

Un punto materiale P di massa m è vincolato su di una guida circolare liscia di raggio R con centro nell'origine di un riferimento (O, x, y, z) e posta nel piano verticale Oxy ($\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$). Si riferisca il sistema all'angolo ϑ, valutato in senso antiorario, tra la direzione negativa dell'asse y e il segmento OP.

Il punto P è soggetto alla sola forza peso e il riferimento (O, x, y, z) ruota rispetto agli spazi inerziali con velocità angolare ω=$\omega\hat{\mathbf{y}}$, $\omega > 0$, costante.

1) Verificare che la componente lagrangiana rispetto alla coordinata ϑ della forza di Coriolis, agente sul punto P nel moto rispetto al riferimento (O, x, y, z) è nulla.

2) Studiare la stabilità delle configurazioni di eqilibrio relativo al variare di ω nei reali positivi e tracciare il diagramma di biforcazione.

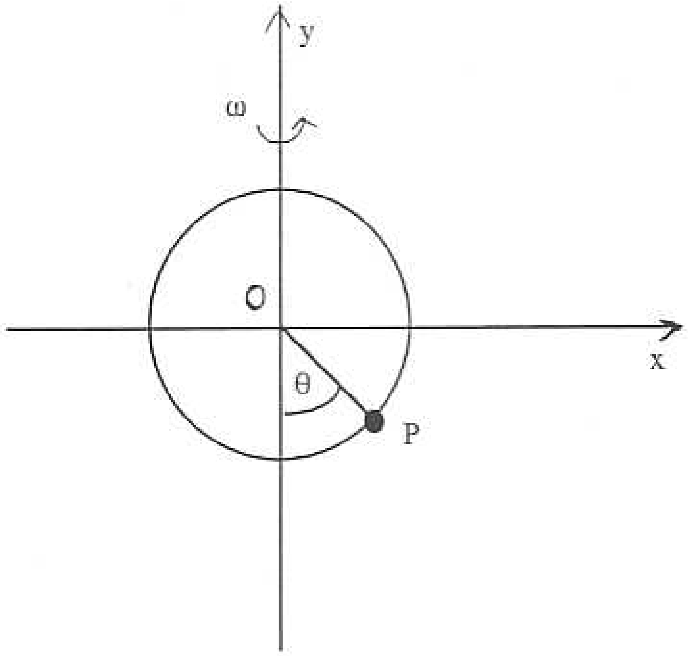
3) Dire con quali altre tecniche è possibile studiare la stabilità degli equilibri di questo sistema (1–dimensionale). Motivare brevemente la risposta.

Si supponga ora che il punto materiale P sia soggetto anche alla forza di attrito viscoso F=-kv.

4) Scrivere l'equazione del moto nel riferimento rotante e proiettarla sul versore $\mathbf{t}$ della terna di Frenet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ per ottenere l'equazione pura del moto.

5) Con riferimento alla equazione pura (la componente $\mathbf{t}$), studiare la stabilità asintotica dell'equilibrio $\vartheta = 0$ al variare del parametro ω nei reali positivi (primo metodo di Liapunov)

6) studiare la stabilità dell'equilibrio $\vartheta = 0$ con tecniche viste *diverse* dal primo metodo di Liapunov.



Correzione.

1). $h\,(O_{x,y,z})$ $\quad m\underline{a} = m\underline{g} + \underline{\phi} + \underline{F}^{cf} + \underline{F}^{cor}$

$\Rightarrow \delta L^{cor} = F^{cor}\cdot\delta P = -2m\,\underline{\omega}\wedge\underline{v}^{(r)}\cdot v^{(a)}dt = -2m\,\omega\wedge R\dot\theta\,\underline{t}\cdot R\dot\theta\,\underline{t}\,dt$

$= Q_\theta\, d\theta \equiv 0 \Rightarrow Q_\theta \equiv 0.$

2). Il sistema è soggetto a forze conservative e giroscopiche

$U = U^{(g)} + U^{cf} \simeq -mgR\cos\theta - \frac{m}{2}\omega^2R^2\sin^2\theta.$

Equilibri: $\frac{dU}{d\theta} = mgR\sin\theta - m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta = 0$

$\sin\theta = 0 \quad \theta = 0, \pi \qquad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2R} \le 1.$

$\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $\theta_3 = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2R}\right)$, $\theta_4 = -\theta_3$ se $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$.

$U''(\theta) = mgR\cos\theta - m\omega^2R^2[2\cos^2\theta - 1].$

Stabilità:

$U''(\theta_1) = mgR - m\omega^2R$

$U''(\theta_1) > 0$ per $\omega^2 < \frac{g}{R}$ $\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 \text{ è stabile (L.D.) per } \omega^2 < g/R \\ \theta_1 \text{ è instabile (T.HND) per } \omega^2 > g/R \end{cases}$

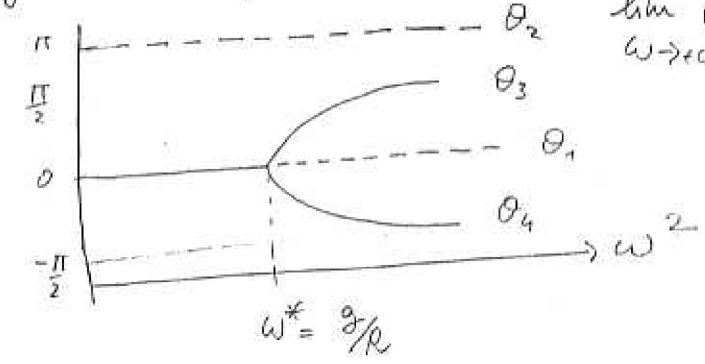
$U''(\theta_1) = 0$ per $\omega^2 = g/R$. Si trova $U'''(\theta_1) = 0$, $U^{IV}(\theta_1) > 0$ per $\omega^2 = g/R$ $\Rightarrow \theta_1$ è stabile (L.D.) per $\omega^2 = g/R$.

$U''(\theta_2) = -(mgR + m\omega^2R^2) < 0 \Rightarrow \theta_2$ è instabile $\overset{\text{THND}}{(\cancel{L.D.})}$ $\forall\,\omega$

$U''(\theta_3) = U''(\theta_4) > 0$ ove esiste $\Rightarrow \theta_4, \theta_3$ stabili per L.D.

Diagramma di biforcazione.

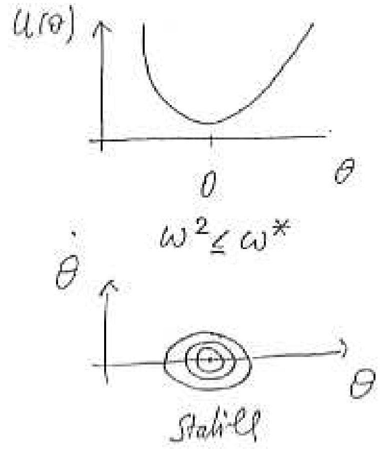
$\lim_{\omega\to+\infty} \theta_3(\omega^2) = \frac{\pi}{2}$

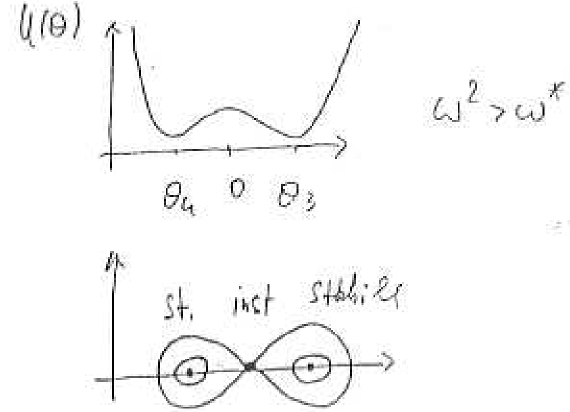


3. Il sistema è 1-dimensionale conservativo. Non possiamo aspettarci asintotica stabilità degli equilibri, quindi il 1° metodo non dà informazioni sulla stabilità. Possiamo usare il metodo qualitativo delle curve di fase:

$E = T + U = \frac{m}{2}R^2\dot\theta^2 + U(\theta)$, $U(\theta) = U^{g}(\theta) + U^{cf}(\theta)$.

Si trova





4). $m\underline{a} = m\underline{g} + \underline{\phi} - m\underline{\omega}\wedge(\underline{\omega}\wedge \underline{OP}) - 2m\underline{\omega}\wedge\underline{v}^{(r)}$

nella terna $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ $\quad \underline{a} = (R\ddot{\theta}\,\underline{t} + R\dot{\theta}^2\underline{n})$, $\phi_t = 0$

Proiettando su $\underline{t}$:

$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega^2 R\sin\theta\cos\theta - kR\dot{\theta}$$

equazione pura del moto. $(\theta, v) = (0,0)$ è equilibrio

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\frac{g}{R}\sin\theta + \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{k}{m}v \end{cases}$$

5). Sistema linearizzato attorno a $(\theta, v) = (0,0)$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = \left(-\frac{g}{R} + \omega^2\right)\theta - \frac{k}{m}v \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{R}+\omega^2 & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}$$

Autovalori : $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ ha soluzioni :

$$2\cdot\lambda_{1,2} = -\frac{k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + 4(\omega^2 - g/R)} \, .$$

1° metodo : $Re(\mathrm{Spect}\,A) < 0 \iff -\frac{k}{m} + \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + 4(\omega^2 - g/R)} < 0$

$\iff \omega^2 < g/R$

$$Re\left(-\frac{k}{m} + \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + 4(\omega^2 - g/R)}\right) > 0 \text{ se } \omega^2 > g/R$$

e

$$Re\left(-\frac{k}{m} - \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + 4(\omega^2 - g/R)}\right) < 0 \quad \forall\, \omega^2 .$$

quindi

$\theta = 0$ è asintoticamente stabile per $\omega^2 < g/R$

$\theta = 0$ è instabile per $\omega^2 > g/R$

il caso $Re(\mathrm{Spect}\,A) = 0$ non si presenta mai.

6) Il sistema è ora 1-dimensionale non conservativo

Non è possibile usare il metodo delle curve di fase, né applicare il T. HND.

Il teorema di L.D. ancora applicabile, dice che

$\theta = 0$ è un minimo di $U(\theta)$ per $\omega^2 \le g/R$

$\Rightarrow$ $\theta = 0$ è stabile per $\omega^2 \le g/R$

ma non dice nulla sulla stabilità asintotica.

Meccanica Razionale -Matematici- Mod. A- 9 Dicembre 2002

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome, Nome, Mod. A, data.

1. Una particella di massa $m = 1$ è vincolata senza attrito su un asse orizzontale x. Oltre alla forza peso, la particella è soggetta ad una forza di energia potenziale $U(x) = -Ax^4, A > 0$. Determinare i moti dinamicamente possibili per assegnazioni di dati iniziali $x_0, \dot{x}_0$ che rendono nulla l'energia totale.

2. Si consideri il sistema dinamico in $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = -\sin x - x^4 v.$$

Discutere la stabilità di $(x, v) = (0, 0)$.

3. Si consideri nel piano il sistema differenziale non lineare del primo ordine:

$$\dot{x} = -x^3 + y^3,$$
$$\dot{y} = -x^3 - y^3.$$

Usando una delle seguenti funzioni:

$$f(\dot{x},\dot{y},x,y)= \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \tfrac{1}{4}(x^4 + y^4),$$

$$g(x,y)= \tfrac{1}{4}(x^4 + y^4),$$

$$h(\dot{x},\dot{y},x,y)= \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)^2 + \tfrac{1}{4}(x^4 - y^4)^2,$$

dimostrare che $(x,y)=(0,0)$ è stabile.

ku core

Meccanica Razionale -Matematici - Mod. B - Prova Scritta del 9 dicembre 2002

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data, Mod. B

1. Nel sistema inerziale Oxy con y verticale ascendente si consideri una guida rettilinea liscia passante per i punti $A = (0, l)$ e $B = (l, 0)$, con $l > 0$ orientata nel verso positivo AB ed origine nel punto A. Si consideri inoltre il sistema costituito da un disco omogeneo di raggio R e massa m che rotola senza strisciare sulla guida e da un'asta omogenea di massa M e lunghezza a incernierata per un estremo nel baricentro G del disco. Inoltre, una molla di costante elastica h è tesa tra il punto A e il punto G.

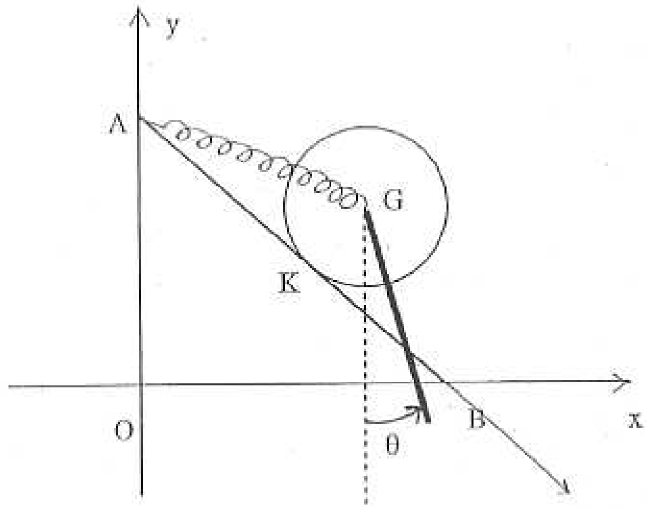
Si riferisca il sistema alle coordinate $s = AK$, ove K è il punto di contatto del disco con la guida, e ϑ, angolo formato dall'asta con il verso negativo dell'asse y, valutato in senso antiorario.

Determinare:
1) gli equilibri del sistema;
2) la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile;
3) l'equazione del moto del baricentro del sistema;
4) eventuali integrali primi del moto del sistema.

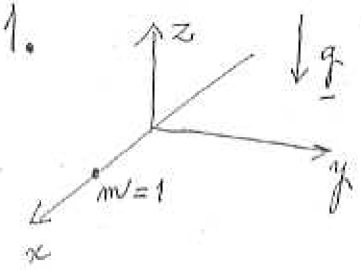
2. Si consideri la trasformazione di coordinate in R^2

$$(p, q) \longrightarrow (P(p, q), 2qe^{q^2}).$$

Determinare $P(p, q)$ in modo che la trasformazione di coordinate sia canonica univalente.



1.



$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ 0 = \Phi_y \\ 0 = \Phi_z - mg \end{cases} \qquad A>0$$

$\ddot{x} = 4Ax^3$ $\qquad E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - Ax^4,$

$E(x_0,\dot{x}_0) = 0, \qquad \frac{1}{2}\dot{x}^2 - Ax^4 = 0,$

$\dot{x}^2 = 2Ax^4. \qquad \dot{x} = \operatorname{sgn}\dot{x}_0 \sqrt{2A}\, x^2,$

$$\operatorname{sgn}\dot{x}_0 \cdot \sqrt{2A} \cdot t = \int_{x_0}^{x} \frac{d\bar{x}}{\bar{x}^2}$$

$$\operatorname{sgn}\dot{x}_0 \sqrt{2A}\, t = \frac{1}{1-2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)$$

$$\operatorname{sgn}\dot{x}_0 \sqrt{2A}\, t = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}, \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \operatorname{sgn}\dot{x}_0 \cdot \sqrt{2A}\, t,$$

$$x = \frac{x_0}{1 - x_0 \cdot \operatorname{sgn}\dot{x}_0 \cdot \sqrt{2A} \cdot t}.$$

2. $X: \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\sin x - x^4 v \end{cases}$

→ 1° Metodo di Liapunov: il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}^{\cdot} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

$0 = \det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1, \quad \lambda_{1,2} = \pm i$

$\operatorname{Re} \operatorname{Spect} A = 0$: il 1° Metodo non dice nulla.

→ Il sistema in studio è (forse) una perturbazione dissipativa del pendolo matematico, la cui f. di Liapunov in $(0,0)$ è:

$$W(x,v) = \frac{v^2}{2} - \cos x + 1$$

$$\mathcal{L}_X W = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot v + \frac{\partial W}{\partial v} \cdot (-\sin x - x^4 v) =$$

$$= \sin x \cdot v + v(-\sin x - x^4 v) = -x^4 v^2 \leq 0$$

Dunque mediante W si nota che $(0,0)$ è, almeno, semplicemente stabile.

3. La sola funzione che sensatamente è candidata a f. di Liapunov è $g(x,y)$:

$$L_X g = \frac{\partial g}{\partial x}(-x^3 + y^3) + \frac{\partial g}{\partial y}(-x^3 - y^3) =$$

$$= x^3(-x^3 + \cancel{y^3}) + y^3(-\cancel{x^3} - y^3) = -x^6 - y^6,$$

g è def. ps. $\quad L_X g$ è def neg $\Rightarrow (0,0)$ è asintoticamente stabile.

Modulo B. Correzione

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^g + \mathcal{U}^{el} = mg\, y_G + Mg\, y_{G'} + \frac{h}{2}(AG)^2 \qquad AG^2 = s^2 + R^2$$

ove

$$y_G = y_K + \text{const} \;; \quad y_{G'} = y_G + \frac{a}{2}\cos\theta \;, \; y_K = \ell - \frac{\sqrt{2}}{2}s$$

$$\mathcal{U} = -g\left[(m+M)\frac{\sqrt{2}}{2}s + \frac{M}{2}a\cos\theta\right] + \frac{h}{2}s^2$$

1) Equilibri e stabilità

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s} = hs - g(m+M)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^* = \frac{g}{h}\frac{\sqrt{2}}{2}(m+M)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = g\frac{M}{2}a\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0, \pi$$

$$H_u(\theta) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & \frac{M}{2}ga\cos\theta \end{pmatrix}$$

$H_u(0) \in Sym^+ \Rightarrow (s^*, 0)$ è stabile per L.D.

$H_u(\pi) \notin Sym^+ \Rightarrow (s^*, \pi)$ è instabile per THND.

$$T = T^D + T^A$$

$$T^D = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}(\omega_D, I_G\omega_D) \qquad \omega_D = \frac{\dot{s}}{R}\hat{z} \;, \; v_G = \dot{s}\,\text{vers}(AB)$$

$$= \frac{m}{2}\frac{3}{2}\dot{s}^2 \qquad I_G = \frac{mR^2}{2}$$

$$T^A = \frac{M}{2}v_{G'}^2 + \frac{1}{2}(\omega_A, I_{G'}\omega_A) \qquad \omega_A = \dot{\theta}\hat{z} \;, \; I_{G'} = \frac{Ma^2}{12}$$

$$x_{G'} = x_G + \frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}s + \frac{a}{2}\sin\theta$$

$$y_{G'} = y_G + \frac{a}{2}\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}s - \frac{a}{2}\cos\theta$$

$$v_{G'}^2 = \dot{x}_{G'}^2 + \dot{y}_{G'}^2 = \dot{s}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\theta}^2 + a\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - \sin\theta)\dot{s}\dot{\theta}$$

$$T^A = \frac{M}{2}v_{G'}^2 + \frac{1}{2}\frac{Ma^2}{12}\dot{\theta}^2.$$

da cui

$$T = T^A + T^D = \frac{1}{2}\left(\frac{3m+2M}{2}\right)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{Ma^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - \sin\theta)\dot{s}\dot{\theta}$$

$$A(s^*, 0) = \begin{pmatrix} \frac{3m+2M}{2} & \frac{Ma\sqrt{2}}{4} \\ \frac{Ma\sqrt{2}}{4} & \frac{Ma^2}{3} \end{pmatrix}.$$

2) piccole oscillazioni: $\det\left(H_u(s^*, 0) - \omega^2 A(s^*, 0)\right) = 0.$

$$\det\begin{bmatrix} h - \omega^2\left(\frac{3m+2M}{2}\right) & -\omega^2 \frac{Ma\sqrt{2}}{4} \\ -\omega^2 \frac{Ma\sqrt{2}}{4} & \frac{M}{2}ga - \omega^2\frac{Ma^2}{3} \end{bmatrix} = 0.$$

e le frequenze $\omega_{1,2}$ sono le radici dell'equazione

$$\omega^4 \frac{Ma^2}{24}(12m + 5M) - \omega^2 \frac{Ma}{\cancel{4}}\left[\frac{(3m+2M)}{4}g + \frac{ha}{3}\right] + \frac{Mag\,h}{2} = 0.$$

3) $\hat{OG} = \dfrac{m\, OG + M\, OG'}{m+M}$

le moto del baricentro $\hat{G}$ del sistema è piano:

$$M_{TOT}\, a_{\hat{G}} = R^{ext} = F^{el} + \phi_K + (m+M)g$$

con ϕ_K incognita raz. vincolare nel pto di contatto.

4) Poichè $R^{ext} \neq 0$, $M_0^{ext} \neq 0$ la quantità di moto totale (3

e il momento angolare totale non sono integrali primi.

Poichè il sistema è a vincoli lisci e forze esterne

conservative, $E_{TOT} = T + U =$ cost. è un integrale primo.

Ciò si deduce anche dalla Lagrangiana

$$L = L(\theta, \dot\theta, s, \dot s) = T(\theta, \dot s, \dot\theta) + U(\theta, s)$$

tramite il Teorema di Noether.

Ex. 2. La trasformazione è canonica univalente se vale

$$J E J^t = E \quad \text{ove} \quad J = \begin{pmatrix} P_p & P_q \\ Q_p & Q_q \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ 0 & 2(1+2q^2)e^{q^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial q} & 2(1+2q^2)e^{q^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce l'equazione

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{1}{2(1+2q^2)} e^{q^2}$$

che ha soluzione $P(p,q) = \frac{p}{2(1+2q^2)} e^{q^2} + \varphi(q)$.

Altro metodo: Sappiamo che

data $q \mapsto Q(q)$ trasf. di coordinate, la trasf. indotta

nello sp. delle fasi $(p,q) \mapsto \left(Q(q), \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^{-t} p\right)$ è

canonica univalente.

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = 2(1+2q^2)e^{q^2} \qquad \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^{-t} = \frac{1}{2(1+2q^2)e^{q^2}}.$$

Mecc. Razionale -Matematici- Mod. A- Prova scritta del 2 settembre 2002
Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome, Nome, data, Mod. A.

1. Nel piano orizzontale Oxy di un riferimento $Oxyz$ giace, solidale al piano Oxy, una guida liscia costituita da una curva γ chiusa e priva di auto-intersezioni. Sia $OP = OP(s)$ il vettore posizione di un punto P di massa m mobile lungo la guida, ove $s \in [0, L)$ è il parametro d'arco sulla curva (rispetto ad un punto fissato A su γ) e L è la lunghezza della curva γ.

Si supponga che il piano il riferimento $Oxyz$ ruoti con velocità angolare costante ω attorno all'asse z rispetto agli spazi inerziali.

1) Usando il Triedro di Frènet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, si scriva l'equazione pura (componente lungo $\mathbf{t}$) dell'equazione del moto nel riferimento rotante $Oxyz$;

2) Ricordando che $\mathbf{t} = \frac{dOP(s)}{ds}$, si mostri che l'equazione pura del moto ottenuta ammette almeno due posizioni di equilibrio;

3) Ricordando la tecnica di studio dei sistemi uno–dimensionali mediante l'integrale primo dell'energia, mostrare che la velocità di P ammette massimo e minimo.

2. Nel piano Oxy (y verticale ascendente) di un riferimento $Oxyz$ giace il sistema costituito da un disco di raggio R e massa M che rotola senza strisciare sull'asse x e da un'asta AB di massa m e lunghezza l i cui estremi A e B sono vincolati in modo liscio rispettivamente sull'asse y e nel centro del disco. Il riferimento $Oxyz$ ruota, rispetto ai sistemi inerziali, con velocità angolare costante ω attorno all'asse y.

Si riferisca il sistema all'angolo ψ tra la direzione negativa dell'asse delle y e il segmento AB, valutato in senso antiorario.

Determinare l' equazione di Lagrange del moto del sistema.

Mecc. Razionale -Matematici- Mod. B- Prova scritta del 2 settembre 2002
Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome, Nome, data, Mod. B.

1. Sia dato il riferimento cartesiano $Oxyz$ associato ad uno spazio inerziale, x verticale discendente. La sbarretta BC, omogenea di massa m, lunghezza $2l$ e di baricentro G, è vincolata nel piano Oxy. Il punto A, collegato rigidamente a BC mediante due sbarrette BA e CA di ugual lunghezza b e di massa trascurabile, è l'estremo di un'ulteriore sbarretta OA anch'essa di massa trascurabile. L'estremo O di OA è vincolato a cerniera nell'origine del sistema cartesiano $Oxyz$, lo stesso vincolo a cerniera sussiste pure in A tra la sbarretta OA e il sistema articolato rigido ABC. Tutti i vincoli sono supposti lisci. Si introducano gli angoli $\theta = (Ox, OA)$, $\varphi = (Ox, AG)$. Nell'ipotesi $(|OA| = a)$:

$$l = a\sqrt{3}, \qquad b = 2a,$$

determinare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.

$(|OA| = a, \quad |AG| = d, \quad |BC| = 2l, \quad |AB| = |AC| = b)$

2. Si consideri l'Hamiltoniana $H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2$. Determinare la funzione generatrice di tipo F_2 , $S = S(q, \bar{p}, t)$, che genera la trasformazione canonica che muta H in $K = 0$. Scrivere in dettaglio la trasformazione:

$$\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}$$

$$(\bar{q}, \bar{p}, t) \longmapsto \left(q(\bar{q}, \bar{p}, t), p(\bar{q}, \bar{p}, t), t\right)$$

2

Modulo A. Correzione. (1

Ex. 1. Eq. del moto nel riferimento rotante Oxyz:

$$m\underline{a}_P^{(r)} = \underline{\phi} + m\underline{g} + \underline{F}^{cf} + \underline{F}^{cor} =$$

$$= \underline{\phi} + mg(\underline{b}\cdot\underline{z})\underline{b} - 2m\underline{\omega}\wedge\dot{s}\underline{t} + m\omega^2 OP$$

ove $\underline{a}_P^{(r)} = \ddot{s}\underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho(s)}\underline{n}$. Proietto su $\underline{t}$:

$$m\ddot{s} = m\omega^2 OP(s)\cdot t(s) = m\omega^2 OP(s)\cdot\frac{dOP}{ds}(s) =$$

$$= \frac{m\omega^2}{2}\frac{d}{ds}(OP(s))^2 = -\frac{d}{ds}\,U(s)$$

ove $U(s) := -\frac{m}{2}\omega^2 OP^2(s)$, $s\in[0,L)$ (pot. centrifugo)

2) $U(\cdot)$ si può estendere a tutto $[0,L]$ ponendo $U(L) := U(0)$ ed è ivi derivabile ponendo $U'(0) = U'(0^+)$ e $U'(L) = U'(L^-)$. Inoltre $U(\cdot)$ ha max e min assoluti in $[0,L]$ compatto e in tali punti $U'(s^*) = \ddot{s}(s^*) = 0$. (equilibri)

3) $\ddot{s} = -\frac{d}{ds}U(s) \Rightarrow \ddot{s}\dot{s} = -\frac{d}{ds}U(s)\dot{s} \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{s}^2}{2} - U(s)\right) = 0 \rightarrow \frac{\dot{s}^2}{2} = U(s) + cost =: \tilde{s}(s)$$

pertanto $\tilde{s}(\cdot)$, definita in $[0,L]$, e ivi continua, ha max e min. assoluti.

Ex. 2. Nel riferimento rotante: (2.

$U = U^g + U^{cf}$ ove

$$U^g = mg\left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi + R\right)$$

$$U^{cf} = -\frac{\omega^2}{2}\left[I_y^{asta} + I_y^{disco}\right] =$$

$$= -\frac{\omega^2}{2}\Big[\underbrace{m\frac{\ell^2}{12}\sin^2\varphi + m\frac{\ell^2}{4}\sin^2\varphi}_{\text{(Steiner)}} + \underbrace{\frac{MR^2}{4} + M\ell^2\sin^2\varphi}_{\text{(Steiner)}}\Big]$$

Energia cinetica $T = T^{asta} + T^{disco}$

$$T^{asta} = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}I_G^{(a)}\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}\frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\dot{\varphi}^2$$

poiché $OG = \frac{\ell}{2}\sin\varphi\, e_1 + \left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi + R\right)e_2$.

$$T^{disco} = \frac{M}{2}v_B^2 + \frac{1}{2}I_G^{(d)}\dot{\theta}^2$$

ove $v_B = \dot{x}_B e_1$ e x_B, dalla condizione di puro rotolamento, verifica

$$x_B = R\theta = \ell\sin\varphi$$

Pertanto $v_B^2 = \ell^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2$, $I_G^{(d)} = \frac{MR^2}{4}$ e $\dot{\theta} = \frac{\ell}{R}\cos\varphi\,\dot{\varphi}$. Infine

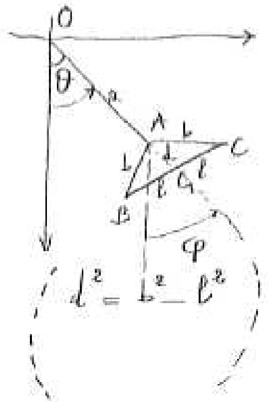
$$T^{disco} = \frac{M}{2}\ell^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{4}\frac{\ell^2}{R^2}\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2$$

e l'eq. di Lagrange segue da

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{ove } L(\varphi,\dot{\varphi}) = T(\varphi,\dot{\varphi}) - U(\varphi).$$

1.

$V \doteq -mg\,x_G$



$OG: \begin{cases} x = a\cos\theta + d\cos\varphi \\ y = a\sin\theta + d\sin\varphi \end{cases}$

$\vec{v}_G: \begin{cases} \dot{x} = -a\sin\theta\,\dot\theta - d\sin\varphi\,\dot\varphi \\ \dot{y} = a\cos\theta\,\dot\theta + d\cos\varphi\,\dot\varphi \end{cases}$

$V(\theta,\varphi) = -mg(a\cos\theta + d\cos\varphi)$

$$T = \frac{1}{2}m|v_G|^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{m(2\ell)^2}{12}\right)}_{I_G}\dot\varphi^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(a^2\dot\theta^2 + d^2\dot\varphi^2 + 2ad\cos(\theta-\varphi)\dot\theta\dot\varphi\right) + \frac{m}{6}\ell^2\dot\varphi^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left[a^2\dot\theta^2 + 2ad\cos(\theta-\varphi)\dot\theta\dot\varphi + \left(d^2 + \frac{\ell^2}{3}\right)\dot\varphi^2\right].$$

$\begin{cases} 0 = \frac{\partial V}{\partial\theta} = mga\sin\theta \\ 0 = \frac{\partial V}{\partial\varphi} = mgd\sin\varphi \end{cases}$ $\qquad \boxed{\ell = a\sqrt{3}, \quad b = 2a}$

$d^2 = b^2 - \ell^2 = 4a^2 - 3a^2 = a^2 \quad \Rightarrow \boxed{d = a}$

EQU : $\begin{cases} 0 = mga\sin\theta \\ 0 = mga\sin\varphi \end{cases}$ $\qquad \nabla^2 V(0,0) = \begin{pmatrix} mga & 0 \\ 0 & mga \end{pmatrix}$

$(\theta,\varphi) = (0,0)$ è EQU. STAB. $\Longleftarrow$ pos. def

$$T = \frac{1}{2}m\left[a^2\dot\theta^2 + 2a^2\cos(\theta-\varphi)\dot\theta\dot\varphi + 2a^2\dot\varphi^2\right] = T(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi)$$

$$T^{(0)}(\dot\theta,\dot\varphi) = T(0,0,\dot\theta,\dot\varphi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ma^2 & ma^2 \\ ma^2 & 2ma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta\\ \dot\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta\\ \dot\varphi\end{pmatrix} = \frac{1}{2}A\begin{pmatrix}\dot\theta\\ \dot\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta\\ \dot\varphi\end{pmatrix}$$

$\det\left(\nabla^2 V(0,0) - \omega^2 A\right) = 0$:

$$\det\begin{pmatrix} mga - \omega^2 ma^2 & -\omega^2 ma^2 \\ -\omega^2 ma^2 & mga - 2\omega^2 ma^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\sim \det\begin{pmatrix} \frac{g}{a} - \omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{a} - 2\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{a} - 2\omega^2\right) - \omega^4 = 0$$

$$-\omega^4 + 2\omega^4 - 3\frac{g}{a}\omega^2 + \left(\frac{g}{a}\right)^2 = 0, \quad \omega^4 - 3\frac{g}{a}\omega^2 + \left(\frac{g}{a}\right)^2 = 0$$

$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{3\frac{g}{a} \pm \sqrt{9\left(\frac{g}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{g}{a}\right)^2}}{2}, \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{g}{a}\,\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \omega_2^2 = \frac{g}{a}\,\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

(3) 2.

H-J : $\frac{\partial S}{\partial t}(q,\tilde{p},t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}(q,\tilde{p},t)\right)^2 = 0$

$S = -E(\tilde{p})t + W(q,\tilde{p})$

H-J $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}(q,\tilde{p})\right)^2 = E(\tilde{p})$

Salgo : $E(\tilde{p}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\tilde{p}_i^{\,2}$ $\quad W = \sum_i W_i(q_i,\tilde{p}_i)$

$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = \tilde{p}_i \Rightarrow W_i(q_i,\tilde{p}_i) = q_i\tilde{p}_i$

$S(q,\tilde{p},t) = -\frac{t}{2}\sum_{i=1}^{N}\tilde{p}_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{N} q_i\tilde{p}_i$

$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$; $\quad p_i = \tilde{p}_i$

$\tilde{q}_i = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_i}$; $\quad \tilde{q}_i = -t\tilde{p}_i + q_i$

$$\begin{cases} q_i(\tilde{q},\tilde{p},t) = \tilde{q}_i + t\tilde{p}_i \,, \\ p_i(\tilde{q},\tilde{p},t) = \tilde{p}_i \,. \end{cases}$$

(5)

Mecc. Razionale -Matematici- Mod. A- Prova scritta del 23 gennaio 2001

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome, Nome, data, Mod. A.

Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del Mod. B in fogli distinti da eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. A

1. Nel piano xy di un riferimento $Oxyz$, con y verticale ascendente, sono poste due guide rettilinee liscie con origine comune nel punto O e formanti ciascuna un angolo di $\pi/6$ con la direzione negativa dell'asse y. Il riferimento $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante $\underline{\omega} = \omega \bar{y}$ rispetto agli spazi inerziali.

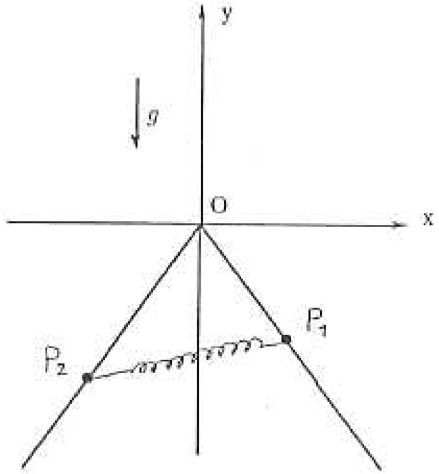
Si consideri il sistema formato da due punti materiali P_1 e P_2, di masse m_1 e m_2, vincolati a scorrere ognuno lungo una delle guide e uniti da una molla di costante elastica h lungo il segmento P_1P_2. Si descriva la posizione dei punti P_1 e P_2 mediante le lunghezze $s_1 = |0P_1|$ e $s_2 = |0P_2|$.

1) Determinare una condizione necessaria e sufficiente sui parametri h, m, ω affinchè esista un solo equilibrio stabile.

2) Nel caso in cui fosse presente una resistenza di attrito viscoso, la condizione trovata rimarrebbe ancora valida? Motivare dettagliatamente la risposta.

3) Determinare esplicitamente la configurazione (s_1^*, s_2^*) di equilibrio nel caso $\omega = 0$.

4) Sempre nel caso $\omega = 0$, si supponga ora che $s_2 \equiv a, a > 0$, costante e che il punto P_1 sia soggetto ad una forza di attrito viscoso $-k\dot{s}_1$. Usando il teorema delle forze vive, per il sistema unidimensionale risultante, si determini l'equazione del moto e si studi il carattere (stabile, instabile, asintoticamente stabile) delle configurazioni di equilibrio.



1) Nel rif. rotante agiscono $\phi^{(vinc)}, F^{el}, F^{cf}, F^{cor}, m\underline{g}$.

Si osservi che $Q_i^{cor} = -2m_i\, \omega \wedge v_i^{(r)} \cdot v_i^{(\omega)} dt \equiv 0, \; i = 1,2$.

La condizione di equilibrio è

$$Q_i = -\frac{\partial}{\partial s_i}\left(U^{el} + U^{cf} + U^{g}\right) = 0 \quad i = 1,2$$

ove $\quad \mathcal{U}(s_1, s_2) = \tilde{\mathcal{U}}(OP_1(s_1)) + \tilde{\mathcal{U}}(OP_2(s_2))$

è l'energia potenziale del sistema vincolato.

Si trova facilmente

$$U^{(g)} = -g\frac{\sqrt{3}}{2}(m_1 s_1 + m_2 s_2)$$

$$U^{el} = \frac{h}{2}|P_1P_2|^2 = \frac{h}{2}(s_1^2 + s_2^2 - s_1 s_2) \quad (\text{T. di Carnot})$$

$$U^{cf} = -\frac{\omega^2}{2}(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) = -\frac{\omega^2}{8}(m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2)$$

La condizione di equilibrio $\nabla \mathcal{U}(s_1, s_2) = 0$ si traduce nel sistema lineare non omogeneo

$$\begin{pmatrix} h - \frac{\omega^2}{4}m_1 & -\frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2} & h - \frac{\omega^2}{4}m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}g\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \qquad (S)$$

Si ha un'unica soluzione se il determinante della matrice è non nullo. Visto che tale matrice coincide con la matrice Hessiana, tale unica soluzione è stabile se e solo se $H_{\mathcal{U}} \in Sym^+$ per il Teorema HND. $(Q^{cor} = 0)$.

$$\begin{cases} h - \frac{\omega^2}{4} m_1 > 0 \\ \left(h - \frac{\omega^2}{4} m_1\right)\left(h - \frac{\omega^2}{4} m_2\right) - \frac{h^2}{4} > 0 . \end{cases}$$

2) Se abbiamo una $\underline{F}^{(visc)} = -k\underline{v}$, questa è nulla negli equilibri ($v=0$). La condizione precedente, $\det H_U \neq 0$ assicura ancora che esista un solo equilibrio. Per il Teorema di Lagrange-Dirichlet (avendo $\Phi^{visc} \leq 0$) la condizione $H_U \in Sym^+$ dice che l'equilibrio (s_1^*, s_2^*) è un minimo di U e quindi è sufficiente per la stabilità, ma non necessaria (controesempio di Painlevé). Concludendo, la condizione in 1) è solo sufficiente.

3) Per $\omega = 0$, il sistema (s) ammette la soluzione, unica,

$$s_1^* = \frac{g}{h\sqrt{3}}(m_2 + 2m_1) \qquad s_2^* = \frac{g}{h\sqrt{3}}(2m_2 + m_1)$$

4). Il sistema è ora 1-dim non conservativo. Il Teorema delle forze vive porge

$$\frac{d}{dt}(E_{CIN}) = P^{(a)} + P^{(v)} + P^{(i)} \quad \text{avremo} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{s}^2}{2} + U\right) = P^{visc} = -k\dot{s}^2$$

ove $U = U^{el} + U^{g} = \frac{h}{2}(s^2 + a^2 - as) - mg\frac{\sqrt{3}}{2}s = U(s)$.

L'equazione del moto è

$$m\ddot{s} = -k\dot{s} - hs + \frac{h}{2}a + mg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

equilibrio: $-hs + \frac{h}{2}a + mg\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow s^* = \frac{a}{2} + \frac{mg}{h}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Studio la stabilità con il 1° metodo di Liapunov:

$$\begin{cases} \dot{s} = v \\ \dot{v} = -\frac{h}{m}s - \frac{k}{m}v + \frac{h}{2m}a + g\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{h}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix}$$

è il sistema al 1° ordine. La matrice del sistema linearizzato ha autovalori

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{h}{m} & -\lambda - \frac{k}{m} \end{pmatrix} = \lambda\left(\lambda + \frac{k}{m}\right) + \frac{h}{m} = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \left[-\frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m^2} - 4\frac{h}{m}}\right]\frac{1}{2} \quad \text{e quindi Re Spect } X'(0) < 0.$$

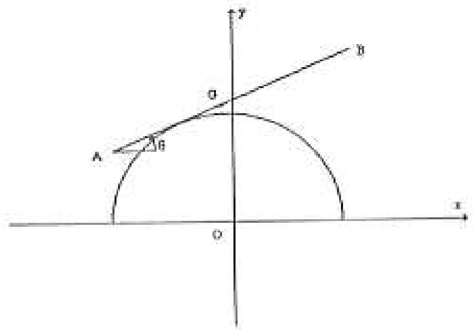
L'equilibrio è asintoticamente stabile.

Si osservi (vedi Dispense) che l'energia totale è una f. di Liapunov, in questo sistema, per la sola stabilità semplice e non per quella asintotica.

Meccanica Razionale Mod. B

Corso di Laurea in Matematica 23.1.2001

Esercizio 1. Nel piano verticale Oxy, solidale ad uno spazio inerziale, y verticale ascendente $\underline{g} = -g\hat{y}$, si consideri la guida $x^2 + y^2 = R^2$ su cui poggia, ruotando senza strisciare, un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $|AB| = l$. Si consideri l'angolo orientato θ dall'asse x all'asta. Per $\theta = 0$ l'asta, orizzontale, è tangente alla guida nel baricentro G. Dire se esiste un equilibrio stabile e, in caso affermativo, studiarne le piccole oscillazioni.

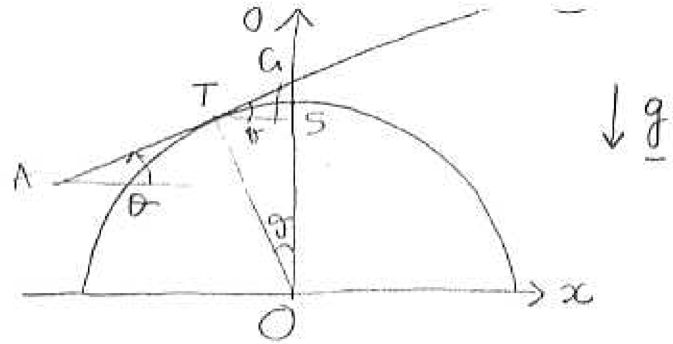


Esercizio 2. Si determini col metodo di Hamilton-Jacobi la soluzione del problema di Cauchy

$$q_i(0) = p_i(0) = 1, \quad i = 1, 2,$$

relativo alle equazioni canoniche associate all'Hamiltoniana

$$H = \frac{p_1 + q_1}{p_2 + q_2}.$$



puro rotolamento : $|\text{arco}(TS)| = |TG|$

$$\begin{cases} y_G(\theta) = R\cos\theta + |TG|\sin\theta = R\cos\theta + R\theta\sin\theta, \\ x_G(\theta) = -\left(R\sin\theta - R\theta\cos\theta\right). \end{cases}$$

$U(\theta) = mgR(\cos\theta + \theta\sin\theta),$

$U'(\theta) = mgR(\cancel{-\sin\theta} + \cancel{\sin\theta} + \theta\cos\theta),$

$U'(\theta_E) = 0 \quad : \quad \theta_E = 0$

$U''(0) = mgR(\cos\theta - \theta\sin\theta)\Big|_{\theta=0} = mgR > 0$ $\quad \theta = 0$ è $\underline{\text{stabile}}$.

$T(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}m|v_G|^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta^2 = \frac{1}{2}m(\dot x_G^2 + \dot y_G^2) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta^2 =$

$= \frac{1}{2}mR^2\left[(\theta\sin\theta)^2\dot\theta^2 + (\theta\cos\theta)^2\dot\theta^2\right] + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta^2 =$

$= \frac{1}{2}m\left(R^2\theta^2 + \frac{l^2}{12}\right)\dot\theta^2.$

$T^{(0)}(\dot\theta) = T(0,\dot\theta) = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta^2$

$U^{(0)}(\theta) = \frac{1}{2}U''(0)\theta^2 = \frac{1}{2}mgR\theta^2$

$0 = \det(U''(0) - \omega^2 a(0)) = \left(mgR - \omega^2\frac{ml^2}{12}\right), \quad \omega = \frac{\sqrt{12gR}}{l}.$

5

$H = \dfrac{q_1+p_1}{q_2+p_2} = \dfrac{H_1(q_1,p_1)}{H_2(q_2,p_2)}$: metodo della "separazione delle variabili".

H_1 e H_2 sono <u>integrali</u> <u>primi</u> per il sistema Hamiltoniano.

Equ. di H-J: $\dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \dfrac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$

Cerco $S(t, q_1, q_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2) := -t\dfrac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2} + \sum_{i=1}^{2} W_i(q_i, \tilde{p})$

$H_1\left(q_1, \dfrac{\partial W_1}{\partial q_1}\right) = \tilde{p}_1$: $q_1 + \dfrac{\partial W_1}{\partial q_1} = \tilde{p}_1$, $W_1 = \tilde{p}_1 q_1 - \dfrac{q_1^2}{2}$

$H_2\left(q_2, \dfrac{\partial W_2}{\partial q_2}\right) = \tilde{p}_2$: $q_2 + \dfrac{\partial W_2}{\partial q_2} = \tilde{p}_2$ $\quad W_2 = \tilde{p}_2 q_2 - \dfrac{q_2^2}{2}$

$S = -t\dfrac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2} + W_1 + W_2$

$\tilde{q} = \dfrac{\partial S}{\partial \tilde{p}} : \begin{cases} \tilde{q}_1 = -\dfrac{t}{\tilde{p}_2} + q_1 \\ \tilde{q}_2 = \dfrac{t\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2^2} + q_2 \end{cases} \qquad p = \dfrac{\partial S}{\partial q} : \begin{cases} p_1 = \tilde{p}_1 - q_1 \\ p_2 = \tilde{p}_2 - q_2 \end{cases}$

$q_i(0) = 1 = p_i(0) \quad i = 1,2 \quad \Longrightarrow$

$\tilde{p}_1 = 2 \qquad \tilde{q}_1 = 1$

$\tilde{p}_2 = 2 \qquad \tilde{q}_2 = 1$

infine: $\quad q_1(t) = 1 + \dfrac{t}{2} \qquad q_2(t) = 1 - \dfrac{t}{2}$

$\qquad p_1(t) = 1 - \dfrac{t}{2} \qquad p_2(t) = 1 + \dfrac{t}{2}$

(Verifica ulteriore: scrivere le equazioni di Hamilton per H e verificare che le funzioni sopra scritte le risolvono e passano per $t=0$ per il dato iniziale)

Mecc. Razionale -Matematici- Mod. A- Prova scritta del 17 settembre 2001

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome, Nome, data, Mod. A.

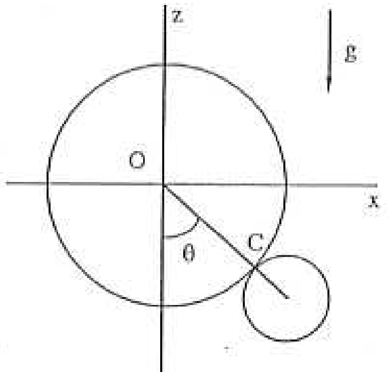
Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del Mod. B in fogli distinti da eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. A

1. Il sistema di riferimento $Oxyz$ ruoti rispetto al sistema inerziale $OXYZ$ (con $\hat{z} \equiv \hat{Z}$) con velocità angolare costante $\omega = \omega\hat{z}$. Il sistema meccanico costituito da una guida circolare fissa di raggio R, centrata nell'origine e da un disco di massa m e raggio r che rotola senza strisciare esternamente alla guida è vincolato in modo liscio a rimanere nel piano Oxz del riferimento rotante. Si riferisca il sistema all'angolo θ orientato come in figura.

a) Determinare le configurazioni di equilibrio relativo e studiarne la stabilità al variare di ω nei reali positivi. Tracciare il diagramma di biforcazione degli equilibri.

b) Determinare l'espressione della velocità angolare assoluta del disco nel moto generico $t \mapsto \theta(t)$

c) Usando la prima equazione cardinale, determinare la reazione vincolare *all'equilibrio* esercitata dalla guida sul disco in una configurazione con $\theta_{eq} \neq 0$ e all'istante in cui il sistema giace nel piano $0XZ$.



2. Sia $U : R^n \longrightarrow R$ funzione C^1. Ad essa è possibile associare l'equazione differenziale definita dal *campo gradiente*

$$\dot{x} = X(x) := -\nabla_x U(x).$$

Quali sono gli equilibri di X? Mostrare, usando una evidente candidata funzione di Liapunov, che i minimi stretti isolati di U sono equilibri *asintoticamente stabili*.

Meccanica Razionale mod. B — Matematici — 17.9.2001

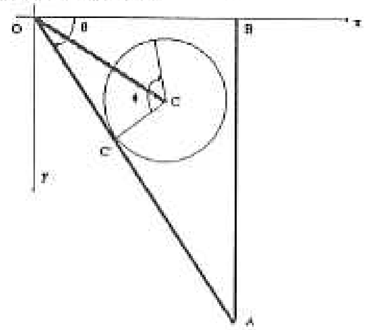
Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Mod. B, Cognome, Nome, data.

Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del Mod. B in fogli distinti da eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. A

1) In un piano verticale Oxy un'asta OA (massa m, lunghezza $4R$) può ruotare attorno al suo estremo fisso O. Un disco $\mathcal{D}$ (massa m, raggio R) è vincolato a rotolare senza strisciare su OA. Il sistema è soggetto oltre alla forza peso, con $\mathbf{g} = g\,\hat{y}$, $g > 0$, a due forze elastiche $\mathbf{F}_1 = k\,AB$, $k > 0$, $\mathbf{F}_1$ si mantiene ortogonale all'asse x, e $\mathbf{F}_2 = (\frac{mg}{R})\,CO$, agenti rispettivamente sull'estremo A dell'asta e sul centro C del disco. Supposti lisci i vincoli, si chiede, utilizzando le coordinate Lagrangiane $\theta \in (0,\pi)$, $\phi \geq 0$ ove $\phi = 0$ per $C' = ?$ (C' è il punto di contatto disco-asta),

1) di impostare lo studio delle configurazioni di equilibrio;

2) determinare la energia cinetica del sistema.



2) Scrivere le equazioni di Hamilton per il sistema di Lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(q)\,\dot{q}^i\dot{q}^j + \sum_{k=1}^{N} A_k(q)\,\dot{q}^k$$

5

a) Nel sistema $Oxyz$: il sistema è 1-dimensionale piano $\Rightarrow$ la f. di Coriolis ha componenti nulle.

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(g)} + \mathcal{U}^{(cf)} = -mg(R+r)\cos\theta - \frac{\omega^2}{2}\left(I_z + m d^2\right) =$$

$$\cong -mg(R+r)\cos\theta - m\frac{\omega^2}{2}(R+r)^2\sin^2\theta$$

Equilibri

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = m(R+r)\sin\theta\left(g - \omega^2(R+r)\cos\theta\right) = 0$$

$\sin\theta = 0 \qquad \theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = \pi$

$g - \omega^2(R+r)\cos\theta = 0 \qquad \theta_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2(R+r)}\right)$

se $\omega^2 \geq \frac{g}{R+r}$.

Usando il T. dell'Hessiano non degenere, si vede che

$\mathcal{U}''(\theta_1) > 0$ per $\omega^2 < \frac{g}{R+r} \Rightarrow \theta_1$ stabile

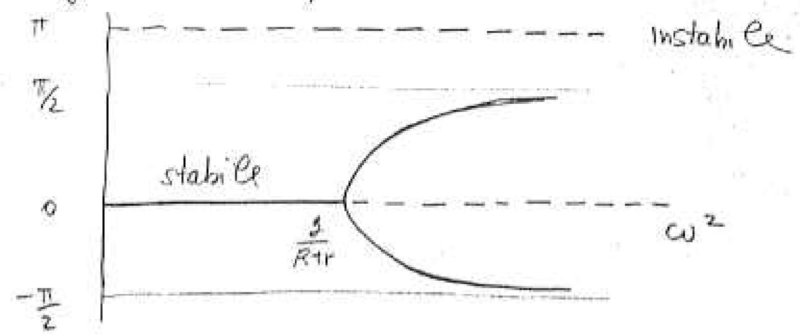
$\mathcal{U}''(\theta_1) < 0$ per $\omega^2 > \frac{g}{R+r} \Rightarrow \theta_1$ instabile

$\mathcal{U}''(\theta_1) = 0$, $\mathcal{U}'''(\theta_1) = 0$, $\mathcal{U}^{IV}(\theta_1) > 0 \Rightarrow \theta_1$ stabile per $\omega^2 = g/R+r$

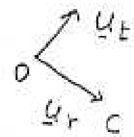
$\mathcal{U}''(\theta_2) < 0 \quad \forall \omega^2 \Rightarrow \theta_2$ instabile

$\mathcal{U}''(\theta_{3,4}) > 0$ per $\omega^2 \geq \frac{g}{R+r}$

Diagramma di biforcazione



b) sia $\underline{u}_r = \text{vers}(OC)$, $\underline{u}_t \wedge \underline{u}_r = \hat{y}$



Nel sistema relativo

$$\underline{v}_G = (R+r)\dot{\theta}\,\underline{u}_t = \underline{v}_C + \underline{\omega}_D \wedge \underline{CG} =$$

$$= 0 + \omega_D\,\hat{y} \wedge r\,\underline{u}_r = -r\omega_D\,\underline{u}_t \Rightarrow \underline{\omega}_D = -\left(\frac{R+r}{r}\right)\dot{\theta}\,\hat{y}$$

La velocità angolare assoluta è

$$\underline{\omega}^{(a)} = \underline{\omega}^{(\tau)} + \underline{\omega}^{(r)} = \omega\hat{z} - \left(\frac{R+r}{r}\right)\dot{\theta}\,\hat{y}$$

(espressa nel riferimento $Oxyz$)

c) Nel riferimento inerziale $OXYZ$:

$$m\underline{a}_G^{(a)} = \underline{R}^{ext} = m\underline{g} + \underline{\phi}$$

Il punto G si muove di moto circolare uniforme ($\dot{\theta} = 0$ all'equilibrio) su una circonferenza di raggio $\rho = (R+r)\sin\theta_{eq}$ perpendicolare all'asse $\hat{z}$

$$m\,a_G = -m\,\omega^2\rho\,\hat{X} = -mg\,\hat{Z} + \underline{\phi}$$

da cui

$$\phi_X = -m\omega^2\rho, \quad \phi_Y = 0, \quad \phi_Z = mg$$

Altro metodo: Nel riferimento rotante $Oxyz$ con $\hat{z} \equiv \hat{Z}$,

$$m\underline{a}_G^{(r)} = \underline{R}^{ext} = m\underline{g} + \underline{\phi} + \underline{F}^{cf}$$

perché $\underline{F}^{cor} = -2\int_D \rho\, \omega \wedge v^{(r)}(c)\, dc = -2m\omega \wedge v_G^{(r)} = 0$ all'equilibrio ($v_G^{(r)} = 0$)

Si ha (all'istante in cui $\hat{x} = \hat{X}$)

$$0 = m a_G^{(r)} = m\underline{g} + \underline{\phi} - m\,\omega \wedge (\omega \wedge OG) =$$

$$= -mg\,\hat{z} + \underline{\phi} + m\omega^2 \rho\, \hat{x}$$

da cui

$$\phi_x = -m\omega^2 \rho \;, \quad \phi_y = 0 \;, \quad \phi_z = mg$$

<u>Esercizio 2</u>.

Gli equilibri sono i pti x tali che $\nabla_x U(x) = 0$ (punti critici di U).

Prendo $W(x) = U(x) - U(x^*)$, ove $\nabla_x U(x^*) = 0$, come f. di Liapunov.

In un intorno B di x^*, $W \in C^1$,

$W(x^*) = 0$, $W(x) > 0 \quad \forall x \in B \setminus \{x^*\}$

perché x^* è <u>minimo</u> <u>stretto</u>. Inoltre

$$L_X W = \nabla_x U \cdot \dot{x} = -(\nabla_x U)^2 \le 0 \quad \text{e vale}$$

$L_X W(x^*) = 0$, $L_X W(x) < 0$ in $B \setminus \{x^*\}$

perché x^* è minimo <u>isolato</u> di U

$$U(\theta, \varphi) = -mg2R\sin\theta - mg\left(R\varphi \sin\theta - R\cos\theta\right) + \frac{1}{2}K(4R)^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2}\frac{mg}{R}\left((R\varphi)^2 + R^2\right).$$

$$\begin{cases} 0 = U_{,\theta} = -mg\,2R\cos\theta - mgR\varphi\cos\theta - mgR\sin\theta + K16R^2 \sin\theta\cos\theta, \\ 0 = U_{,\varphi} = -mgR\sin\theta + mgR\varphi \iff \varphi = \sin\theta, \end{cases}$$

$$0 = (-2mgR - mgR\varphi + 16KR^2\varphi)\cos\theta - mgR\varphi$$

$$\cos\theta = \frac{mgR\,\varphi}{(16KR^2 - mgR)\varphi - 2mgR}$$

$$\sin\theta = \varphi \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow)$$

$$\varphi^2 + \frac{(mgR)^2 \varphi^2}{[(16KR^2 - mgR)\varphi - 2mgR]^2} = 1$$

Formalmente, le soluzioni reali di questa equazione danno $\varphi_{equ.}$, quindi $\theta_E = \arcsin \varphi_{equ}$, ecc.

Energia Cinetica

$$T_{(asta)} = \frac{1}{2}\left(\frac{m(4R)^2}{3}\right)\dot\vartheta^2 = \frac{8}{3} m R^2 \dot\vartheta^2$$

$T_{(Disco)}$: prima, determinare la v. angolare del Disco. Un angolo per tale v. angolare è :

$$\alpha = \varphi - \left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right]$$

$$\Rightarrow \underline{\omega}_D = (\dot\varphi + \dot\vartheta)\,\hat{\underline{z}}$$

$$T_{CM} = \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}(\dot\varphi + \dot\vartheta)^2$$

$$T_{(Disco)} = T_{CM} + \frac{1}{2} m V_{CM}^2$$

$$\begin{cases} x_C = R\varphi\cos\vartheta + R\sin\vartheta \\ y_C = R\varphi\sin\vartheta - R\cos\vartheta \end{cases}$$

$$V_{CM}^2 = R^2\left[(\dot\varphi\cos\vartheta - \varphi\sin\vartheta\,\dot\vartheta + \cos\vartheta\,\dot\vartheta)^2 + (\dot\varphi\sin\vartheta + \varphi\cos\vartheta\,\dot\vartheta + \sin\vartheta\,\dot\vartheta)^2\right]$$

$$= R^2\left[\dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2 + \varphi^2\dot\vartheta^2 + 2\dot\varphi\dot\vartheta\right]$$

$$T_{(Disco)} = \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}(\dot\varphi + \dot\vartheta)^2 + \frac{1}{2} m R^2\left[\dot\varphi^2 + (1+\varphi^2)\dot\vartheta^2 + 2\dot\varphi\dot\vartheta\right]$$

2)

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(q)\dot q^i \dot q^j + A_k(q)\dot q^k$$

$$p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot q^l} = a_{li}(q)\dot q^i + A_l(q)$$

$$\dot q = S(q,p) = a^{-1}(p - A(q))$$

$$H = (p\cdot\dot q - L)\big|_{\dot q = S(q,p)} =$$

$$= p\cdot a^{-1}(p - A(q)) - \left[\frac{1}{2}\dot q\cdot a\dot q + A\dot q\right]\Big|_{\dot q = S(q,p)} =$$

$$= p\cdot a^{-1}(p - A(q)) - \frac{1}{2} a^{-1}(p-A)\cdot \underbrace{a a^{-1}}_{\mathbb{I}}(p-A) - A a^{-1}(p-A)$$

$$= \frac{1}{2}(p-A)\cdot a^{-1}(p-A) =$$

$$= \frac{1}{2}(a^{-1}_{(q)})^{ij}(p_i - A_i(q))(p_j - A_j(q)).$$

$$\begin{cases} \dot q^l = \dfrac{\partial H}{\partial p_l} = (a^{-1})^{lj}(p_j - A_j) \\ \dot p_l = -\dfrac{\partial H}{\partial q^l} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial q^l}(a^{-1})^{ij}(p_i - A_i)(p_j - A_j) - \\ \qquad - \dfrac{1}{2}(a^{-1})^{mj}(p_j - A_j)\dfrac{\partial A_m}{\partial q^l}. \end{cases}$$

Mecc. Razionale -Matematici- Mod. A -
Prova scritta del 23 settembre 2002
Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Mod.A, Cognome, Nome, data.

1. Nel riferimento inerziale $Oxyz$, con y verticale ascendente, si consideri vincolata nel piano Oxy in maniera liscia un'asta infinita, priva di massa, con un suo punto O incernierato nell'origine. Sia s l'ascissa (orientata) su tale asta; $s = 0$: l'origine O. In $s = a > 0$ è vincolato, bloccato, un punto materiale P_1 di massa m_1. Un secondo punto materiale P_2 di massa m_2 è vincolato a scorrere sull'asta in maniera liscia. E' tesa una molla tra P_1 e P_2 tale che su P_1 agisce la forza $\underline{F}_1 = kP_1P_2$, $k > 0$, e su P_2 agisce la forza $\underline{F}_2 = -\underline{F}_1$. Oltre a s, come parametro Lagrangiano s'introduca l'angolo θ, dal semiasse positivo x, in senso antiorario, al semiasse positivo s.

Determinare gli equilibri e discutere la stabilità di essi, al variare dei paramentri strutturali definenti il sistema: m_1, m_2, g, k, a nei reali positivi (sarà utile definire $\alpha := \frac{ka(m_1+m_2)}{m_2^2 g}$ e compiere l'analisi della stabilità al variare di α).

2. L'oscillatore armonico 1-dim. al primo ordine si scrive:

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x$$

esso ammette $(x, y) = (0, 0)$ come equilibrio,

1) la stabilità di tale punto può essere verificata con la (candidata, lo è?) funzione di Liapunov $W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$?

2) Il sistema

$$\dot{x} = y - x^5$$
$$\dot{y} = -x - y^5$$

ammette ancora $(x, y) = (0, 0)$ come equilibrio, la precedente (candidata) funzione di Liapunov W può essere ancora utile nell'analisi della stabilità di tale equilibrio per questo nuovo sistema?

Meccanica Razionale -Matematici - Mod. B - Prova Scritta del 23 settembre 2002

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data, Mod. B

1. Nel sistema inerziale Oxy con y verticale ascendente si consideri il sistema costituito da un anello di massa M e raggio R che rotola senza strisciare sull'asse orizzontale x e da un punto materiale P di massa m libero di scorrere all'interno di un diametro AB dell'anello. Sul sistema agiscono, oltre alla forza peso, due molle di costante elastica k tese tra gli estremi A, P e P, B. Si riferisca il sistema alle coordinate lagrangiane φ, angolo tra la direzione positiva dell'asse y e il diametro AB, valutato in senso orario, ed s, ascissa di P sulla retta orientata da A a B ed origine C, centro dell'anello.

Si supponga $mg/2k < R$.

Determinare:

1) gli equilibri del sistema;

2) la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile.

2. Si consideri il sistema 1–dimensionale autonomo di Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2a(q)} + U(q), \quad a(q) > 0, \quad q \in R.$$

Determinare:

1) L'integrale generale delle equazioni del moto con il metodo di Hamilton–Jacobi;

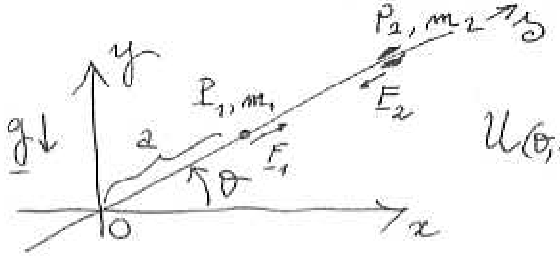
2) La soluzione particolare per fissate condizioni iniziali

$$q(0) = 0, \qquad p(0) = p_0 > 0$$

nell'ipotesi

$$U(q) \equiv 0, \quad a(q) = e^q.$$

2



$$\mathcal{U}(\vartheta,s) = m_1 g a \sin\vartheta + m_2 g s \sin\vartheta + \frac{k}{2}(s-a)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial s} = m_2 g \sin\vartheta + k(s-a) = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vartheta} = g(m_1 a + m_2 s)\cos\vartheta = 0. \end{cases}$$

$P_1 = \left(\frac{\pi}{2}, a - \frac{m_2 g}{k}\right)$

$P_2 = \left(\frac{3}{2}\pi, a + \frac{m_2 g}{k}\right)$, & $\alpha := \frac{k a (m_1 + m_2)}{m_2^2 g} \leq 1$:

$P_3 = \left(\arcsin\alpha, -\frac{m_1}{m_2} a\right)$

$P_4 = \left(\pi - \arcsin\alpha, -\frac{m_1}{m_2} a\right)$

$$H = \begin{pmatrix} k & m_2 g \cos\vartheta \\ m_2 g \cos\vartheta & -g(m_1 a + m_2 s)\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -g\left(m_1 a + m_2\left(a - \frac{m_2 g}{k}\right)\right) \end{pmatrix}$$

$k > 0$, $-g\left(m_1 a + m_2\left(a - \frac{m_2 g}{k}\right)\right) \overset{?}{>} 0 \iff (m_1+m_2) a k - m_2^2 g < 0$,

$\frac{k a (m_1+m_2)}{m_2^2 g} < 1$, P_1 è stabile se esistono P_3 & P_4

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & g\left(m_1 a + m_2\left(a + \frac{m_2 g}{k}\right)\right) \end{pmatrix}$$

è sempre def. pos. $\Rightarrow$ sempre stabile (per valori dei coeff. strutturali nei reali positivi)

In fine, se $\alpha \leq 1$: $(\vartheta_3 = \arcsin\alpha)$

$$H(P_3) = \begin{pmatrix} k & m_2 g \cos\vartheta_3 \\ m_2 g \cos\vartheta_3 & -g\left(m_1 a + m_2\left(-\frac{m_1}{m_2} a\right)\right)\sin\vartheta_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k & m_2 g \cos\vartheta_3 \\ m_2 g \cos\vartheta_3 & 0 \end{pmatrix}$$: non è def., $\det H(P_3) \neq 0$,

è sempre instabile.

(Analogo conto per P_4).

---

2. $W(x,y) = 1/2\,(x^2 + y^2)$

$\dot{W} = x(y - x^5) + y(-x - y^5) = -x^6 - y^6 \leq 0$

$\Rightarrow$ asint. stabilità.

Modello B, Correzione

Ex. 1. $U = U^g + U^{el} = mg\, s\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left[(R+s)^2 + (R-s)^2\right] =$

$\doteq mg\, s\cos\varphi + ks^2$

Equilibri.

$\nabla U(s,\varphi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ks + mg\cos\varphi = 0 \\ -mg\, s\sin\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -\frac{mg}{2k}\cos\varphi \\ \frac{(mg)^2}{2k}\sin\varphi\cos\varphi = 0 \end{cases}$

$P_1 = \left(0, -\frac{mg}{2k}\right)$ $P_2 = \left(\pi, \frac{mg}{2k}\right)$ $P_3 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ $P_4 = \left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$

$H_U(P_1) = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \frac{(mg)^2}{2k} \end{pmatrix} \in Sym^+ \Rightarrow P_1$ è stabile (T. L-D).

En. cinetica

$T = T^P + T^{an} = \frac{1}{2}m v_P^2 + \frac{1}{2}M v_C^2 + \frac{1}{2}(\omega, I_C\omega)$

$x_P = R\varphi + s\sin\varphi$ $\quad y_P = R + s\cos\varphi$

$v_P^2 = \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 = (R^2 + s^2 + 2Rs\cos\varphi)\dot\varphi^2 + 2R\sin\varphi\,\dot s\dot\varphi + \dot s^2$

$\frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}(\omega, I_C\omega) = \frac{M}{2}R^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot\varphi^2 = MR^2\dot\varphi^2$

$T = \frac{1}{2}\left\{\left[(M+m)R^2 + m(s^2 + 2Rs\cos\varphi)\right]\dot\varphi^2 + 2Rm\sin\varphi\,\dot s\dot\varphi + m\dot s^2\right\}$

$A(P_1) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & (M+m)R^2 + m\left(\frac{m^2g^2}{4k^2} - 2R\frac{mg}{2k}\right) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

Piccole oscillazioni.

$\det\left(H_U(P_1) - \omega^2 A(P_1)\right) = \det\begin{pmatrix} 2k - \omega^2 m & 0 \\ 0 & \frac{(mg)^2}{2k} - \omega^2\beta \end{pmatrix} = 0$

$\omega_1^2 = \frac{2k}{m}$; $\omega_2^2 = \frac{(mg)^2}{2k\beta}$.

Ex. 2 $\quad H(p,q) = \frac{p^2}{2a(q)} + U(q)$ sist. autonomo

$S(q,E,t) = -Et + W(q,E)$ $\quad (\tilde{p} = E)$

(H.J.) $\quad \frac{\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2}{2a(q)} + U(q) = E$

$W(q,E) = \pm\int\sqrt{2a(q)(E - U(q))}\,dq$

Tr. canonica

$\begin{cases} \tilde{q} = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int\frac{a(q)\,dq}{\sqrt{2a(q)(E-U(q))}} = -t \pm \int\frac{\sqrt{a(q)}}{\sqrt{2(E-U(q))}}\,dq \\ p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{2a(q)(E-U(q))} = p(q) \end{cases}$

Caso particolare: $a(q) = e^q$, $U(q) \equiv 0$, $q(0) = 0$, $p(0) = p_0 > 0$.

$\begin{cases} \tilde{q} = -t \pm \frac{1}{\sqrt{2E}}\int e^{q/2}\,dq = -t \pm \sqrt{\frac{2}{E}}\, e^{q/2} \\ p = \pm\sqrt{2E}\, e^{q/2} \end{cases}$

a $t = 0$: $\quad p_0 = \sqrt{2E} \Rightarrow$ scelgo $+$, $\quad E = \frac{p_0^2}{2}$

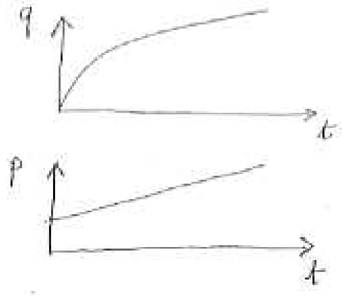
$\tilde{q} = \sqrt{\frac{4}{p_0^2}}\, e^0 = \frac{2}{p_0}$

$$\frac{2}{p_0} = -t + \frac{2}{p_0} e^{q/2}$$

e infine:

$$q(t) = 2 \ln\left(\frac{p_0}{2} t + 1 \right)$$

$$p(t) = p_0 + \frac{p_0^2}{2} t$$



Mecc. Razionale -Matematici- Mod. B- Prova scritta del 31 gennaio 2000

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome, Nome, data, Mod. B.

Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del Mod. B in fogli distinti da eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. A

1. Una guida circolare di raggio R e centro nell'origine O di un riferimento $Oxyz$ giace nel piano verticale xy, con y verticale ascendente. Un disco di massa M e raggio $r < R$ rotola senza strisciare all'interno della guida, mantenendosi nel piano verticale. Nel centro G del disco è vincolato un estremo di un'asta rigida GP di lunghezza l e massa trascurabile. Il punto materiale P posto in P ha massa m. Si riferisca il sistema ai parametri lagrangiani φ e ϑ come in figura.

Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile (verificarlo) $(\varphi, \vartheta) = (0, 0)$.

Si svolga il calcolo delle frequenze nelle ipotesi semplificative $\rho = R - r$, $M = m$, $l = \rho/4$ e a meno di estrazioni di radice quadrata.

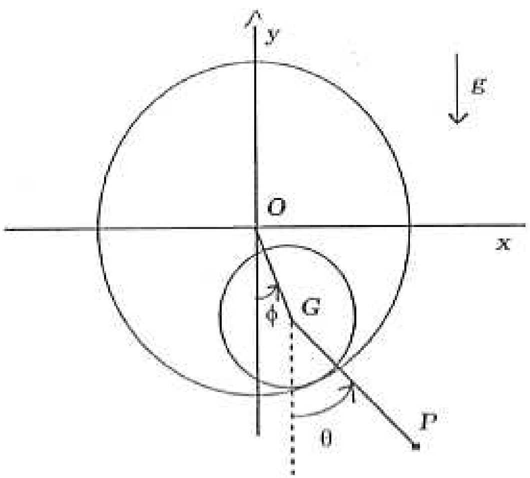
2. Si consideri il sistema unidimensionale costituito da due punti di egual massa m, mobili lungo l'asse x, orizzontale. Dette x_1 e x_2 le ascisse dei due punti, essi sono soggetti alla forza di mutua interazione di energia potenziale

$$U(x_1, x_2) = \varphi(x_1 - x_2) + x_1 x_2$$

ove φ è funzione reale C^∞. Introdotta la trasformazione di coordinate

$$q_1 = x_1 + x_2, \qquad q_2 = x_1 - x_2$$

si scriva la lagrangiana e l'hamiltoniana nelle nuove variabili e si determini (a meno di quadrature) il moto del sistema con il metodo di Hamilton-Jacobi.



Meccanica Razionale -Matematici - Mod. A - Prova Scritta del 31 gennaio 2000

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data, Mod. A

(Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi 1. 2. e 3. del mod. A in fogli distinti da ulteriori eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. B)

1. Un punto materiale di massa $m = 1$ è soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale

$$U(x, y, z) = (x^2 - x - y)^2(2y - x) + xyz.$$

Si introduce il vincolo olonomo liscio:

$$y = 1, \qquad z = 0.$$

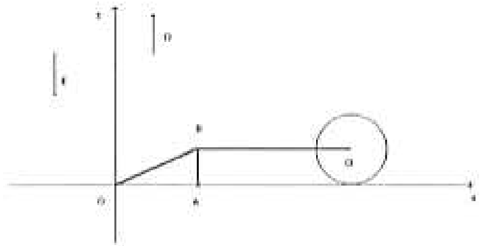
Per il sistema 1-dimensionale risultante determinare equilibri, stabilità, e disegnare un diagramma di fase nel piano $(x, \dot{x})$.

2. Un cubo materiale omogeneo rigido di massa m e spigolo L, è vincolato senza attrito col baricentro G fisso rispetto ad una terna $Oxyz$ associata ad una spazio cinematico inerziale. Oltre alla gravità, $\underline{g} = -g\hat{z}$, su tale corpo rigido agiscono delle forze di viscosità il cui momento risultante rispetto al baricentro G si può schematizzare con $\underline{N}_G = -k\underline{\omega}$, dove $k > 0$. Al tempo $t = 0$ sia $\underline{\omega}(0) = (\omega_1(0), \omega_2(0), \omega_3(0))$, ove con $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ si intendono le componenti della velocità angolare rispetto ad una terna principale d'inerzia solidale al cubo e centrata in G.

Determinare $\underline{\omega}(t)$.

3. Nel piano Oxz del sistema $Oxyz$, rotante uniformemente con velocità angolare di trascinamento $\underline{\Omega} = \Omega\hat{z}$ rispetto agli spazi inerziali, è vincolato un disco di raggio $r = 1$, e di massa $m = 1$ a rotolare senza strisciare sull'asse x. Una sbarretta AB omogenea di lunghezza $L = 1$ e di massa $M = 1$ è vincolata a scorrere con l'estremo A sull'asse x, ortogonalmente ad esso e senza attrito. Oltre alla gravità, $\underline{g} = -g\hat{z}$, tra il baricentro G del disco e l'estremo B è tesa una molla di costante elastica $h = 1$, così pure tra l'origine O e l'estremo B è tesa un' altra molla di costante elastica $h = 1$.

Determinare una condizione sufficiente affinché disco e sbarretta sovrapposti sull'origine O sia configurazione d'equilibrio stabile.



41

1. Si tratta di studiare il sistema meccanico:

$$\ddot{x} = -\frac{d}{dx}\mathcal{U}(x)\,, \qquad \mathcal{U}(x) := U(x,y,z)\Big|_{\substack{y=1\\ z=0}}$$

$$\mathcal{U}(x) = (x^2 - x - 1)^2(2-x)$$

$$\mathcal{U}'(x) = 2(x^2-x-1)(2x-1)(2-x) + (x^2-x-1)^2(-1) =$$

$$= (x^2-x-1)\left[2(2x-1)(2-x) - (x^2-x-1)\right] =$$

$$= (x^2-x-1)(-5x^2+11x-3)\,,$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad x_{3,4} = \frac{-11 \pm \sqrt{61}}{-10}$$

$$\left(\approx \begin{cases} -0{,}6 \\ +1{,}6 \end{cases}\right) \qquad \left(\approx \begin{cases} +1{,}9 \\ +0{,}3 \end{cases}\right)$$

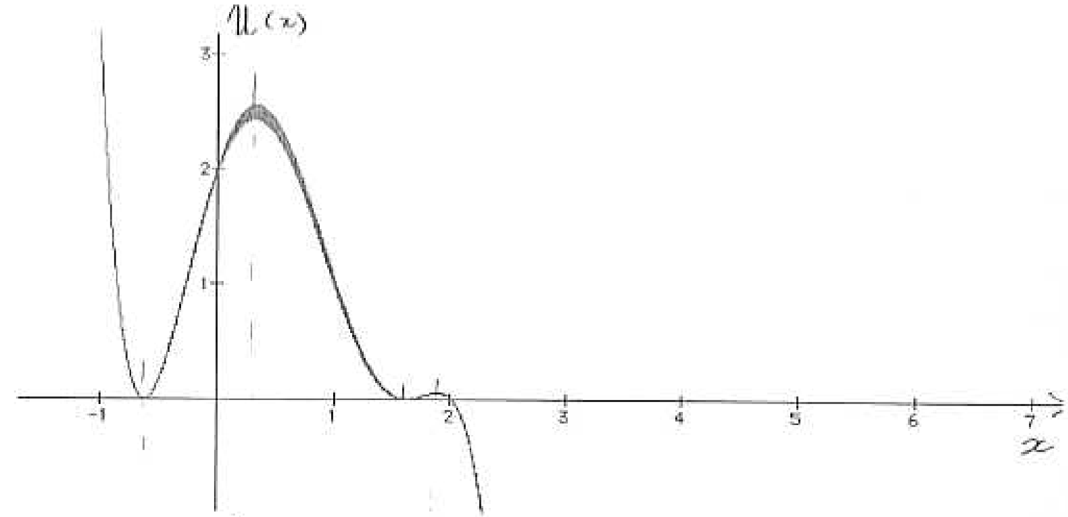
$$\mathcal{U}''(x) = -20x^3 + 48x^2 - 18x - 8$$

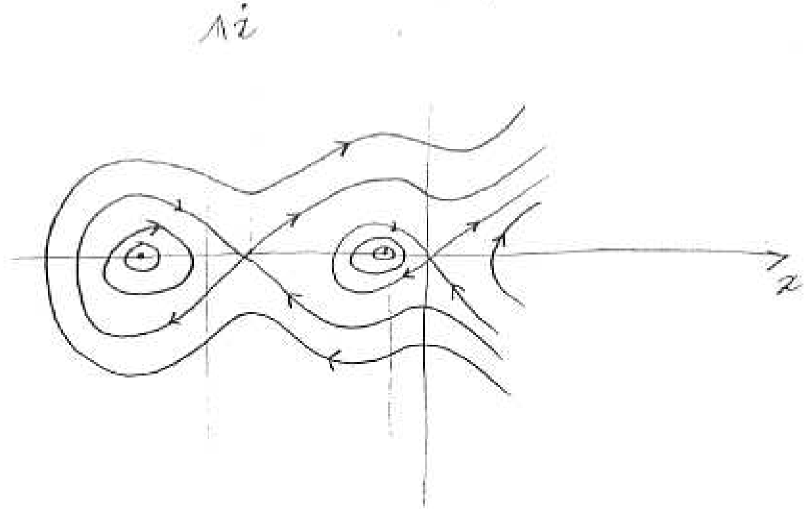
$\mathcal{U}''\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$, x_1 è minimo : stabile

$\mathcal{U}''\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) > 0$, x_2 è minimo : stabile

$\mathcal{U}''\left(\frac{-11+\sqrt{61}}{-10}\right) < 0$, x_3 è max (con Hess. non deg.) : instabile

$\mathcal{U}''\left(\frac{-11-\sqrt{61}}{-10}\right) < 0$ x_4 è max (con Hess. non deg.) : instabile





2.

Le equazioni di Euler sono

$$I_1\dot\omega_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=-K\omega_1$$
$$I_2\dot\omega_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=-K\omega_2$$
$$I_3\dot\omega_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=-K\omega_3$$

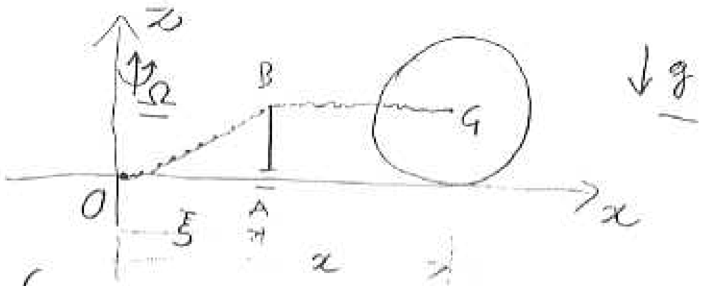
ove non compare a secondo membro la gravità poiché $\underline{N}_G^{(g)}=\underline{0}$.

Dato che è un CUBO, $I_1=I_2=I_3=\frac{mL^3}{12}$

$$\begin{cases}\dot\omega_i=-\frac{12K}{mL^3}\omega_i & (i=1,2,3)\\ \omega_i(0)=\omega_i^{(0)}\end{cases}$$

$$\omega_i(t)=\omega_i(0)e^{-\frac{12K}{mL^3}t}$$

3.



$$U(x,\xi)=\frac{h}{2}\left(\xi^2+(x-\xi)^2\right)-\frac{M\Omega^2}{2}\xi^2-\frac{m\Omega^2}{2}x^2$$

$$M=m=h=r=L=1$$

Le componenti Lagrang. della sollecitazione relative a Coriolis sono nulle: infatti $\underline{\Omega}$, velocità dei p.ti, e spost. virtuali sono, $\forall$ p.to di sbarretta e disco, COMPLANARI.

$$U(x,\xi)=\frac{1}{2}\left(\xi^2+(x-\xi)^2\right)-\frac{\Omega^2}{2}\xi^2-\frac{\Omega^2}{2}x^2.$$

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial\xi}=\xi-(x-\xi)-\Omega^2\xi=(2-\Omega^2)\xi-x\\ \frac{\partial U}{\partial x}=x-\xi-\Omega^2x=-\xi+(1-\Omega^2)x\end{cases}$$

siamo interessati a $(\xi_E,x_E)=(0$

$$H(\xi,x)=\begin{pmatrix}2-\Omega^2 & -1\\ -1 & 1-\Omega^2\end{pmatrix}$$ è definita positiva se

$$\begin{cases}2-\Omega^2>0,\\ \det H>0\ :\ (2-\Omega^2)(1-\Omega^2)-1=0,\end{cases}$$

$$\Omega^4-3\Omega^3+1=0,\quad (\Omega^2)_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt5}{2}$$

Si ha dunque stabilità per

$$\boxed{\Omega^2<\frac{3-\sqrt5}{2}}$$

Modulo B. Correzione. Esercizio 1.

Energia potenziale $U^{(g)} = -g\left[(M+m)(R-r)\cos\varphi + m\ell\cos\theta\right]$

Equilibri

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = g(M+m)(R-r)\sin\varphi = 0 \ \wedge \ \frac{\partial U}{\partial \theta} = gm\ell\sin\theta = 0$$

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$ $P_3 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ $P_4 = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$

Stabilità in P_1

$$H_U(P_1) = \begin{pmatrix} g(M+m)(R-r) & 0 \\ 0 & gm\ell \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}^+ \Rightarrow P_1 \text{ è stabile per L.D.}$$

Energia cinetica. $T = T^D + T^P = T^{\text{DISCO}} + T^{\text{PUNTO}}$

$T^D = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2}(\omega^D, I_G \omega^D)$ moto piano $\Rightarrow \underline{\omega} = \omega\hat{z}$

$\underline{v}_G = \underline{\omega} \wedge \underline{CG} = (R-r)\dot\varphi\,\hat{z}$ (moto rigido).

Calcolo ω^D. Sia C il punto di contatto disco-guida.

$v_G = \underline{\omega} \wedge \underline{OG} = v_C + \underline{\omega}^D \wedge \underline{CG} = \underline{\omega}^D \wedge \underline{CG}$

da cui:

$$\dot\varphi\,\hat{z} \wedge (R-r)\,\mathrm{vers}(OG) = \omega^D \hat{z} \wedge r\,\mathrm{vers}(CG)$$

essendo $\mathrm{vers}(OG) = -\mathrm{vers}(CG)$

$$\omega^D = -\frac{(R-r)}{r}\dot\varphi.$$

$$T^D = \frac{M}{2} v_G^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} \omega^{D2} = \frac{M}{2}(R-r)^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot\varphi^2$$
$$= \frac{3}{4} M (R-r)\dot\varphi^2$$

$T^P = \frac{m}{2} v_P^2$ $\quad \underline{v}_P = \underline{v}_G + \underline{\omega} \wedge \underline{GP} = \underline{v}_G + \dot\theta\hat{z} \wedge \underline{GP}$

con

$\underline{OG} = (R-r)(\sin\varphi\,\hat{x} - \cos\varphi\,\hat{y})$, $\underline{GP} = \ell(\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y})$

$$T^P = \frac{m}{2}\left[(R-r)^2\dot\varphi^2 + \ell^2\dot\theta^2 + 2(R-r)\ell\cos(\theta-\varphi)\dot\theta\dot\varphi\right]$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}M+m\right)(R-r)^2\dot\varphi^2 + m\ell^2\dot\theta^2 + 2(R-r)m\ell\cos(\theta-\varphi)\dot\theta\dot\varphi\right]$$

Frequenze caratteristiche. Matrice energia cinetica. Nelle ipotesi $R-r=\rho$, $m=M$, $\ell = \rho/4$

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\rho^2 m & m\rho^2/4 \\ m\rho^2/4 & \frac{m\rho^2}{16} \end{pmatrix}$$

$$\det\left(H_U(P_1) - \lambda^2 A(P_1)\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 2\rho g m - \lambda^2\frac{5}{2}\rho^2 m & -\lambda^2\frac{\rho^2}{4}m \\ -\lambda^2\frac{\rho^2}{4}m & \frac{gm\rho}{4} - \lambda^2\frac{m\rho^2}{16} \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_1^2 = \frac{g}{\rho}\left(\frac{12+4\sqrt{6}}{3}\right) \qquad \lambda_2^2 = \frac{g}{\rho}\left(\frac{12-4\sqrt{6}}{3}\right).$$

Esercizio 2.

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$ energia cinetica. $L = T + U$, e nelle nuove variabili,

$T = \frac{m}{4}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \qquad U = \varphi(q_2) + \frac{1}{4}(q_1^2 - q_2^2)$

$L = \frac{m}{4}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \varphi(q_2) - \frac{1}{4}(q_1^2 - q_2^2)$

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{m}{2}\dot{q}_i \qquad i = 1, 2$

$H = \frac{1}{m}(p_1^2 + p_2^2) + \varphi(q_2) + \frac{1}{4}(q_1^2 - q_2^2) = T + U.$

H è a variabili separabili, indipendente da t.

$$H = \underbrace{\frac{p_1^2}{m} + \frac{1}{4}q_1^2}_{H_1} + \underbrace{\frac{p_2^2}{m} + \varphi(q_2) - \frac{q_2^2}{4}}_{H_2}.$$

funzione generatrice

$$S = -(\beta_1 + \beta_2)t + W_1(q_1, \beta_1) + W_2(q_2, \beta_2)$$

eq. di Hamilton-Jacobi

$$\beta_i = H_i\left(\frac{\partial W_i}{\partial q_i}, q_i\right) \qquad i = 1, 2.$$

$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{4}q_1^2 = \beta_1 \qquad W_1 = \pm\int \sqrt{m\left(\beta_1 - \frac{\xi_1^2}{4}\right)}\, d\xi_1$

$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2}\right)^2 + \varphi(q_2) - \frac{q_2^2}{4} = \beta_2 \qquad W_2 = \pm\int \sqrt{m\left(\beta_2 + \frac{\xi_2^2}{4} - \varphi(\xi_2)\right)}\, d\xi_2$

Primo compitino - Meccanica Razionale - mod. A - 1 dicembre 2000

ATTENZIONE: Risolvere l'esercizio A su UN foglio, l'esercizio B su un altro foglio, DISTINTO dal precedente.

A.1 Sull'asse orizzontale x di un sistema inerziale $Oxyz$ si consideri vincolata in maniera liscia una particella P di massa $m = 1$. Oltre alla gravità, agisce su P la forza posizionale

$$\underline{F}(x,y,z) = (\frac{1}{x^3} + z^2y,\ -y^3 - zx^2,\ z^3).$$

Studiare la dinamica 1-dimensionale:

1) si determini la funzione 'energia totale' del sistema vincolato (facoltativo: se ne abbozzi un diagramma di fase, cioè, si disegni l'andamento delle curve di livello nel piano $\mathbf{R}^2 = \{(x,\dot{x})\}$);

2) si determini esplicitamente la soluzione al problema di Cauchy

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

A.2 Si consideri la particella libera P di massa m soggetta alla forza posizionale

$$\underline{F}(x,y,z) = (-x^3 + z^2y,\ -y^3 - zx^2,\ z^3)$$

1) La forma lavoro associata ad $\underline{F}$ è conservativa (chiusa)?

Si vincoli ora la particella P sul piano liscio orizzontale Oxy e si determini la forma lavoro ivi ristretta;

2) risulta quest'ultima conservativa (chiusa)?

3)Determinare per il sistema vincolato un equilibrio e studiarne la stabilità.

Meccanica Razionale mod. A

Corso di Laurea in Matematica- Primo compitino, 1/12/2000

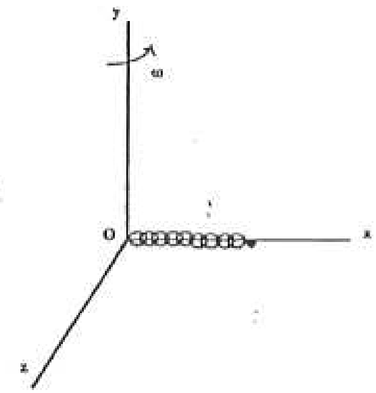
Attenzione: Consegnare due (soli) *distinti* fogli; un foglio, contrassegnato A-Cognome Nome, con la soluzione dell'esercizio A, un ulteriore foglio contrassegnato B-Cognome Nome, con la soluzione dell'esercizio B.

Esercizio B

Un punto materiale P di massa m è vincolato in modo liscio a scorrere lungo l'asse x di un riferimento (O,x,y,z) ed è collegato all'origine O da una molla di costante elastica $h > 0$. Il riferimento (O,x,y,z) ruota, mantenendo $O \equiv O^*$ e $\hat{y} \equiv \hat{Y}$, con velocità angolare costante $\underline{\omega}^{(\tau)} = \omega^{(\tau)}\hat{y}$, $\omega^\tau > 0$ rispetto al riferimento inerziale (O^*, X, Y, Z).

1) Determinare l'equazione del moto nel riferimento relativo (non inerziale) e determinare le posizioni di equilibrio relativo al variare di $\omega^{(\tau)}$ in $[0,+\infty)$.

2) Si supponga ora che la terna non inerziale sia animata dal moto di trascinamento $O^*O(t) = t\hat{y}$, $\hat{x}(0) = \hat{X}(0)$, e $\omega^\tau > 0$, costante. Determinare la velocità e l'accelerazione di trascinamento del punto P nel moto relativo di quiete in un punto di equilibrio relativo.



8

Soluzione di A.1. del primo compitino mod. A del 1/12/2000.
Il sistema è retto dalle equazioni, vincolo geometrico: $y = 0$, $z = 0$, l'asse x è liscio,

$$\ddot{x} = \frac{1}{x^3}$$
$$0 = \Phi_y$$
$$0 = -mg + \Phi_z$$

L'energia totale

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int^x \frac{1}{\lambda^3} d\lambda = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2x^2}$$

L'integrazione del problema $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ si fa per 'separazione': in tal caso $e = E(1, 0) = \frac{1}{2}$,

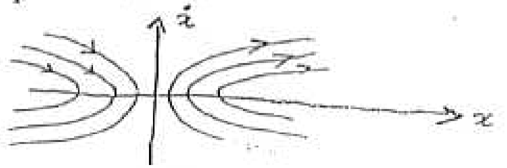
$$|\dot{x}| = \sqrt{2e - \frac{1}{x^2}}, \qquad \dot{x} = \mathrm{segn}(\dot{x}(0))\sqrt{2e - \frac{1}{x^2}},$$

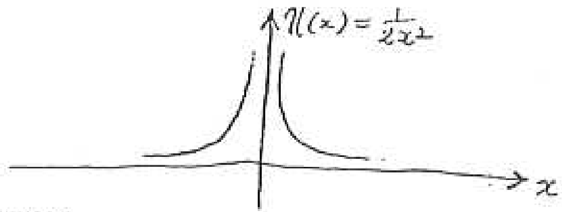
quale valutazione della radice prendere? Si noti che $\mathrm{segn}(\dot{x}(0))$ non è definito, da che parte evolve il sistema? Si ha lo sviluppo di Taylor con polo in $t = 0$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\ddot{x}(0)t^2 + O(t^3) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x^3}\Big|_{x=1} t^2 + O(t^3) = 1 + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3), \qquad \text{dunque} \qquad \dot{x}(t) = t + O(t^2),$$

si deve dunque prendere la valutazione positiva (questa discussione non era richiesta).

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = t, \qquad \int_1^x \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = t, \qquad \sqrt{x^2 - 1} = t, \qquad x(t) = \sqrt{t^2 + 1}.$$





Soluzione di A.2.
$\delta L^F = \underline{F} \cdot \delta P$, pensata come 1-forma in $\mathbb{R}^3$, non è chiusa: basta per esempio vedere che $\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$; ristretta sul piano $z = 0$, (O, x, y), diventa

$$\delta L^F\Big|_{z=0} = Q_x dx + Q_y dy = -x^3 dx - y^3 dy,$$

è immediato vedere che

$$\delta L^F\Big|_{z=0} = -d\left(\frac{1}{4}(x^4 + y^4)\right)$$

quindi esatta.
Si nota che $(x_E, y_E) = (0, 0)$ è un punto d'equilibrio e, dato che è un minimo stretto locale per l'energia potenziale $U(x, t) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$, per Lagrange-Dirichlet è un punto d'equilibrio *stabile*.

Esercizio B. Correzione.

1) Equazione del moto nel rif. (O, x, y, z): $(\underline{\omega} = \underline{\omega}^{(\tau)})$

$$m\underline{a}^{(\tau)} = m\underline{g} + \underline{\phi} - h\,\underline{OP} - 2m\underline{\omega} \wedge \underline{v}^{(\tau)} - \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{OP})$$

ove $\underline{v}^{(\tau)} = \dot{x}\hat{x}$, $\underline{OP} = x\hat{x}$, $\underline{\omega} = \omega\hat{y}$ da cui

$$\begin{cases} x: & m\ddot{x} = (m\omega^2 - h)x, \\ y: & 0 = \phi_y - mg, \\ z: & 0 = \phi_z + 2m\omega\dot{x}. \end{cases}$$

Posizioni di equilibrio: $m\omega^2 - h \neq 0 \Rightarrow x_{eq} = 0$

$m\omega^2 - h = 0 \Rightarrow x_{eq} \in \mathbb{R}$

poiché (sist. 1-dim) $m\ddot{x} = (m\omega^2 - h)x = -\frac{d}{dx}\left[(m\omega^2 - h)\frac{x^2}{2}\right]$

$h > m\omega^2 \Rightarrow U''(0) > 0$ $\quad x_{eq} = 0$ è stabile per T. Lagrange-Dir.

$h < m\omega^2 \Rightarrow U''(0) < 0$ $\quad x_{eq} = 0$ è instabile per T. H.n.D.

$h = m\omega^2 \Rightarrow x_{eq} \in \mathbb{R}$ è instabile (equilibrio indifferente)

2) Sia $OP = x\hat{x}$, $x \in \mathbb{R}$ fissato, di equilibrio relativo.

$$v_P^{(\tau)} = v_P^{(a)} - v_P^{(\tau)} = v_P^{(a)} = v_O^{(a)} + \omega \wedge OP^{(\tau)} = \frac{d}{dt} O^*O(t) + \omega\hat{y} \wedge x\hat{x} =$$

$$= 1\hat{Y} - \omega x\hat{z} = \hat{Y} + \omega x\left[\underset{\cos}{\cos(\omega t)}\hat{Z} + \underset{\sin}{\mathrm{sen}(\omega t)}\hat{X}\right]$$

$$a_P^{(\tau)} = a_O^{(a)} + \dot{\omega} \wedge OP + \omega \wedge (\omega \wedge OP) = -\omega^2 OP =$$

$$= -\omega^2 x\hat{x} = -\omega^2 x\left[\cos(\omega t)\hat{X} - \sin(\omega t)\hat{Z}\right]$$

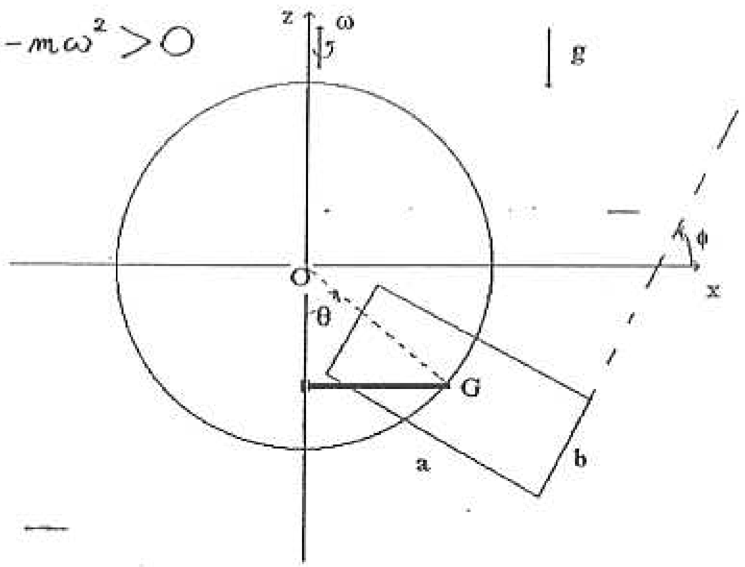
la velocità e accelerazione di trascinamento essendo, di norma, espresse nel riferimento inerziale

Secondo compitino - Meccanica Razionale - mod. A - 16 gennaio 2001

ATTENZIONE: Risolvere l'esercizio 1 su UN foglio, l'esercizio 2 su un altro foglio, DISTINTO dal precedente.

1. Sul piano verticale Oxz del riferimento non inerziale $Oxyz$ rotante con velocità angolare di trascinamento $\underline{\omega} = \omega\,\hat{z}$ rispetto agli spazi inerziali, z verticale ascendente: $\underline{g} = -g\,\hat{z}$, si consideri la guida $x^2 + z^2 = R^2$. Su di essa è vincolato il baricentro G di una lamina omogenea rettangolare di lati a e b, $a > b$, e di massa m. Tra il baricentro G e l'asse z è tesa una molla di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica $h > 0$ che si mantiene ortogonale all'asse z stesso. Al variare dei coefficienti strutturali $R > 0$, $a > b > 0$, $g > 0$, $h > 0$, $\omega > 0$, definenti il sistema meccanico, determinare equilibri e discuterne la stabilità. Riferirsi agli angoli ϕ e ϑ in figura.

$h - m\omega^2 > 0$



Secondo compitino - Meccanica Razionale - mod. A - 16 gennaio 2001

ATTENZIONE: Risolvere l'esercizio 1 su UN foglio, l'esercizio 2 su un altro foglio, DISTINTO dal precedente.

2. In un riferimento $Oxyz$ con y verticale ascendente: $\underline{g} = (0, -g, 0)$ un anello di massa m e raggio r è libero di ruotare attorno al punto O, mantenendosi nel piano Oxy. Detto A il punto dell'anello diametralmente opposto a O, si descriva la generica configurazione dell'anello mediante l'angolo θ, valutato in senso antiorario, tra la direzione negativa dell'asse y e il segmento OA.

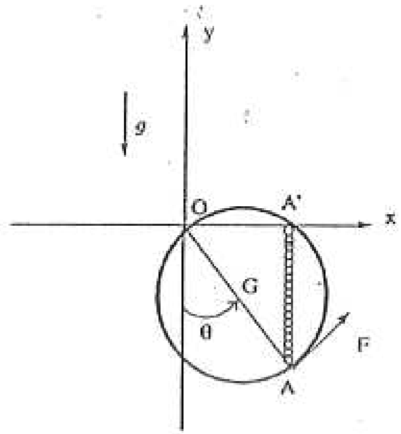
L'anello è soggetto, oltre al peso, alla forza di attrito viscoso applicata in A, $F = -kv_A$, e alla forza elastica dovuta ad una molla di costante elastica h tesa tra il punto A e la sua proiezione A' sull'asse x.

Determinare l'equazione del moto dell'anello (usare la seconda equazione cardinale con polo in O);

Determinare le configurazioni di equilibrio;

Determinare una condizione sufficiente su h affinchè la posizione $\theta = 0$ sia asintoticamente stabile.

Determinare la reazione vincolare nell'origine all'istante $t = 0$ nel moto di condizioni iniziali $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$.



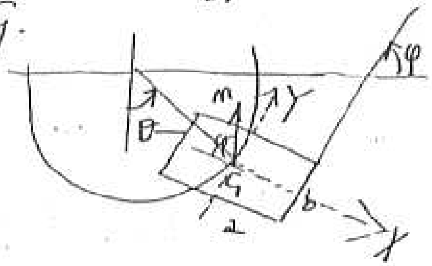
1. $a > b > 0, \qquad h - m\omega^2 > 0$

$$\mathcal{U}(\varphi,\theta) = -mgR\cos\theta + \frac{h}{2}R^2\sin^2\theta - \frac{\omega^2}{2}\mathcal{J}_L^z(\varphi,\theta)$$

dove $\mathcal{J}_L^z(\varphi,\theta)$ è il momento d'inerzia della Lamina, nella configurazione (φ,θ), rispetto all'asse z.

Huyghens-Steiner : $\mathcal{J}_L^z = m d^2 + \mathcal{J}_L^G$,

dove d è la distanza dell'asse z dal parallelo asse passante per G, il baricentro della Lamina, $\mathcal{J}_L^G$ è il mom. d'in. della Lamina rispetto al suddetto asse per G.



$$d^2 = R^2\sin^2\theta$$

$$\mathcal{J}_L^G = (\underset{\sim}{\mathcal{J}}_G\, n, n),$$

dove $\underset{\sim}{\mathcal{J}}_G$: è l'op. (matrice) d'inerzia in G

n : è il versore dell'asse per G e parallelo a z.

$$\underset{\sim}{\mathcal{J}}_G = \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & & 0 \\ & \frac{ma^2}{12} & \\ 0 & & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\underset{\sim}{\mathcal{J}}_G\, n, n) = \frac{m}{12}\left(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi\right)$$

1

$$\mathcal{U}(\varphi,\theta) = -mgR\cos\theta + \frac{(h-m\omega^2)}{2}R^2\sin^2\theta - \frac{m\omega^2}{2}\frac{1}{12}\left(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi\right)$$

$$\begin{cases} 0 = \mathcal{U}_{,\varphi} = \frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2)\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 = \mathcal{U}_{,\theta} = \left[mg + (h - m\omega^2)R\cos\theta\right]R\sin\theta \end{cases}$$

Le due equazioni sono indipendenti :

$$\varphi_E \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$$

$$\theta_E : \begin{cases} \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta_{1,2} = 0, \pi \\ mg + (h-m\omega^2)R\cos\theta_E = 0 \Rightarrow \cos\theta_{3,4} = -\frac{mg}{(h-m\omega^2)R} \end{cases}$$

per ipotesi, $\cos\theta_{3,4} < 0$; così, se $\boxed{\frac{mg}{(h-m\omega^2)R} \leq 1}$

$$\begin{cases} \theta_3 = \arccos\left(-\frac{mg}{(h-m\omega^2)R}\right) \\ \theta_4 = -\theta_3 \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} < \theta_3 \leq \pi$$

Gli equilibri sono dunque le 16 coppie ordinate (φ_i, θ_j) $i,j = 1,2,3,4$

Per quanto concerne la stabilità, basta studiare per $\varphi_E = 0, \frac{\pi}{2}$ e $\theta_E = 0, \pi, \theta_3 = \arccos\left[-\frac{mg}{(h-m\omega^2)R}\right]$

$$\nabla^2\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) & 0 \\ 0 & (m\omega^2-h)R^2\sin^2\theta + \left[mg + (h-m\omega^2)R\cos\theta\right]R\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2}(\theta_3) = (m\omega^2 - h)R^2\left(1 - \left[\frac{mg}{(h-m\omega^2)R}\right]^2\right) +$$

$$+ \left[mg + (h-m\omega^2)R\,\frac{mg}{(h-m\omega^2)R}\right] R\,\frac{mg}{(h-m\omega^2)R} =$$

$$= -(h-m\omega^2)R^2 + \frac{(mg)^2 R^2}{(h-m\omega^2)R} + \frac{R(mg)^2}{R(h-m\omega^2)R}$$

$$\nabla^2 \mathcal{U}\overset{(\varphi,\theta)}{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2) < 0 & 0 \\ 0 & [mg + (h-m\omega^2)R]R \end{pmatrix} \text{ è instabile}$$

$$\nabla^2 \mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2) > 0 & 0 \\ 0 & [mg + (h-m\omega^2)R]R \end{pmatrix}; \text{ è stabile.}$$

$$\nabla^2 \mathcal{U}(0,\pi) = \begin{pmatrix} \frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2) < 0 & 0 \\ 0 & -mg + (h-m\omega^2)R \end{pmatrix} \text{ indet.}$$

$$\nabla^2 \mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) = \begin{pmatrix} -\frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2) > 0 & 0 \\ 0 & -mg + (h-m\omega^2)R \end{pmatrix} \text{ è stabile se } (h-m\omega^2)R > mg$$

quest'ultima condizione di stabilità è però di non-esistenza per θ_3 e θ_4. Qualora invece $(h-m\omega^2)R \leq mg$ allora

$$\nabla^2 \mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2},\theta_3\right) = \begin{pmatrix} -\frac{m\omega^2}{12}(b^2-a^2) > 0 & 0 \\ 0 & \left.\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_3} \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_3} = -(h-m\omega^2)R^2\left(1-\frac{(mg)^2}{(h-m\omega^2)^2R^2}\right) +$$

$$+\left[mg + (h-m\omega^2)R\left(-\frac{mg}{(h-m\omega^2)R}\right)\right]R\left(-\frac{mg}{(h-m\omega^2)R}\right) =$$

$$= -(h-m\omega^2)R^2 + \cancel{\frac{(mg)^2}{h-m\omega^2}} - \cancel{\frac{(mg)^2}{h-m\omega^2}} + \frac{(mg)^2}{h-m\omega^2} \overset{?}{>} 0$$

la dis. è vera sse

$$R^2(h-m\omega^2)^2 \overset{?}{<} (mg)^2 \qquad (h-m\omega^2>0)$$

$$R(h-m\omega^2) \overset{?}{<} mg \quad , \quad \underline{NO},$$

perché la condizione di esistenza di θ_3 (e θ_4) è esattamente complementare ad essa.

Esercizio 2. Correzione.

2ª eq. cardinale con polo in O.

$$\dot{\underline{M}}_O = N_O^{ext} = \underline{OG}\wedge m\underline{g} + \underline{OA}\wedge \underline{F}^{(visc)} + \underline{OA}\wedge\underline{F}^{el}$$

Proietto sull'asse z: $\quad I_O^{(z)} = 2mr^2$

$$I_O^{(z)}\ddot\theta = -mgr\sin\theta - 2rkr\dot\theta + 2r\sin\theta\, h\, 2r\cos\theta$$

Eq. del moto

$$\ddot\theta = -\frac{g}{2r}\sin\theta - \frac{k}{m}\dot\theta + \frac{2h}{m}\sin\theta\cos\theta \qquad (1)$$

Equilibri.

$$\sin\theta\left(-\frac{g}{2r} + \frac{2h}{m}\cos\theta\right)$$

$\sin\theta = 0 \quad \theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi \qquad \cos\theta = \frac{gm}{4rh} < 1 \qquad \theta_{3,4} = \arccos\left(\frac{gm}{4rh}\right)$

$\theta_4 = -\theta_3$

1° metodo

$$\begin{cases}\dot\theta = v\\ \dot v = \sin\theta\left(-\frac{g}{2r} + 2\frac{h}{m}\cos\theta\right) - \frac{k}{m}v\end{cases} \qquad \dot x = \begin{pmatrix}\dot\theta\\ \dot v\end{pmatrix} = X(x)$$

$$X'(0) = \left.\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{2r}\cos\theta + \frac{2h}{m}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) & -\frac{k}{m}\end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{2r} + 2\frac{h}{m} & -\frac{k}{m}\end{pmatrix}$$

$$\det(X'(0) - \lambda \mathbb{1}) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} + \left(\frac{2h}{m} - \frac{g}{2r}\right)}$$

se $h < \frac{gm}{4r}$ $\quad \mathrm{Re}\,(\mathrm{Spect}\, X'(0)) < 0 \Rightarrow x = 0$ è asintoticamente stabile.

Reazione vincolare in O.

$m\underline{a}_G = -m\ddot\theta\,\underline{OG} = \underline{\phi}_0 + m\underline{g}$. Dalla (1) con le cond. iniziali,

$$\phi_0^{(x)} = -\frac{mg}{2}, \quad \phi_0^{(y)} = mg.$$

Meccanica Razionale -Matematici - Mod. A - Secondo compitino 14 gennaio 2002

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data

(Risolvere l' esercizio 2 in fogli *distinti* **da ulteriori eventuali fogli usati per la soluzione dell' esercizio 1)**

1. Consideriamo un riferimento inerziale $Oxyz$. Una particella di massa $m = 1$ è soggetta alle seguenti forze:

1) La forza di gravità: $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, $\mathbf{g} = -g\mathbf{z}$, $g > 0$.
2) Una forza conservativa di energia potenziale:

$$U(OP) = \frac{a}{2}\left(|OP|^2 - |OP|^4\right), \quad a > 0.$$

3) Una forza viscosa: $\mathbf{F}^{visc} = -\dot{OP}$ (costante di viscosità : $k = 1$).

La particella sia vincolata in maniera liscia sull'asse x.

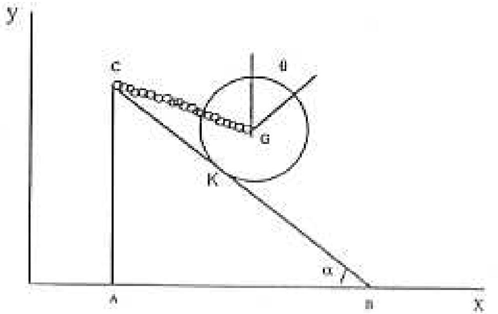
Determinare gli equilibri e indagare sul carattere di stabilità, instabilità, asintotica stabilità di essi per a nei reali strettamente positivi.

2. In un piano Oxy con y verticale ascendente, $\underline{g} = (0, -g)$, giace un sistema costituito da una lamina triangolare di altezza l e massa M e da un disco omogeneo di raggio $R << l$ e massa m, libero di rotolare senza strisciare sul lato CB dell lamina. Tra il punto C e il baricentro G del disco è tesa una molla di costante elastica k. Si riferisca il sistema alle coordinate lagrangiane $x = x_A$ e ϑ, angolo formato dall'asse y con una retta solidale al disco.

(Suggerimento utile: si noti che $x_G = x_K + cost.$, $y_G = y_K + cost.$)

Determinare:

i) la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange del sistema (si faccia attenzione ad eventuali integrali primi del moto);
ii) la soluzione delle equazioni di Lagrange per generici dati iniziali;
iii) (Facoltativo) la componente lungo l'asse x della quantità di moto totale.



... il lavoro ... , ... $(x) = 0$.

L' energia potenziale delle forze posizionali conservative è
$$\mathcal{U}(x) = \frac{a}{2}(x^2 - x^4), \qquad a > 0.$$

$$\delta L^{visc.}\Big|_{vincolo} = -\dot{OP}\cdot dP\Big|_{vincolo} = -\dot{x}\hat{x}\cdot dx\hat{x} = -\dot{x}dx$$

$$\Rightarrow Q^{visc.}(x,\dot{x}) = -\dot{x}.$$

Equilibri: $\mathcal{U}'(x) = 0$: $ax(1-2x^2) = 0$,

$x_1 = 0$ $\quad x_{2,3} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\mathcal{U}''(x) = a(1-6x^2)$.

$\mathcal{U}''(x_1) = a > 0$, min locale, per Lagrange-Dirichlet $x_1 = 0$ è stabile (semplicemente).

$\mathcal{U}''(x_{2,3}) = a(-2) < 0$ max locale non degenere, ciononostante non si può utilizzare direttamente il teorema THND per la presenza della viscosità. Usiamo il 1° metodo :

$NL : \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -a(x - 2x^3) - v \end{cases}$

L, attorno a $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -a(1-6x^2)\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - v \end{cases}$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2a & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x - \frac{1}{\sqrt{2}}\\ v\end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ 2a & -1-\lambda\end{pmatrix} = 0,$$

$\lambda^2 + \lambda - 2a = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8a}}{2} \Rightarrow$ c'è un autovalore con parte reale positiva (anzi, è positivo: $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2} > 0$) $\Rightarrow$ Instabilità.

• Controlliamo ora l'eventuale asintotica stabilità di $x_1 = 0$. 1° Metodo

L, attorno a $x_1 = 0$: $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -ax - v \end{cases}$, $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -a & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ 2a & -1-\lambda\end{pmatrix} = 0$

$\lambda^2 + \lambda + a = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$

i) $1 - 4a < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = -\frac{1}{2} < 0$.

ii) $1 - 4a \geq 0 \Rightarrow -1 + \sqrt{1-4a} < 0 \Leftrightarrow a > 0$

Dunque $x_1 = 0$ è asintoticamente stabile $\forall a > 0$.

σ

Esercizio 2. Soluzione.

i) $\mathcal{U} = \mathcal{U}^g + \mathcal{U}^{el} = mg\, y_K + \frac{1}{2} k\, CG^2 = mg(l - R\theta \sin\alpha) + \frac{1}{2}k(R^2 + R^2\theta^2) \cong -mgR\theta\sin\alpha + \frac{1}{2}kR^2\theta^2$

Energia cinetica

$$T = T^{DISCO} + T^{LAMINA} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} M v_G^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2) + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

ove $\dot{x}_K = \dot{x} + R\cos\alpha\,\dot{\theta}$ $\quad \dot{y}_K = R\sin\alpha\,\dot{\theta}$

si trova

$$L = T - \mathcal{U} = \frac{(M+m)}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\cos\alpha\,\dot{x}\,\dot{\theta} + mgR\sin\alpha\,\theta - \frac{1}{2}kR^2\theta^2 = L(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})$$

ii) Equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow (M+m)\ddot{x} + mR\cos\alpha\,\ddot{\theta} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + mR\cos\alpha\,\ddot{x} - mgR\sin\alpha + kR^2\theta = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $\ddot{x}$ dalla prima nella seconda equazione,

$$\left[\frac{3}{2}m - \frac{m^2\cos^2\alpha}{m+M}\right]R^2\ddot{\theta} + kR^2\theta - mgR\sin\alpha = 0$$

del tipo $a\ddot{\theta} + b\theta + \gamma = 0$, $a > 0$, $b > 0$ che ha soluzione

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,t + \varphi_0\right) - \frac{\gamma}{b}$$

con A, φ_0 determinati dalle condizioni iniziali.

L'integrale primo del moto

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + mR\cos\alpha\,\dot{\theta} = (M+m)\dot{x}_0 + mR\cos\alpha\,\dot{\theta}_0 = C_0$$

permette di calcolare facilmente $x(t)$.

iii) (Facoltativo)

$$P_x = P \cdot e_1 = (M\underline{v}_G + m\underline{v}_G) \cdot e_1 = M\dot{x} + m\dot{x}_G =$$

$$= M\dot{x} + m(\dot{x} + R\cos\alpha\,\dot{\theta}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{costante}.$$

Soluzione Primo compitino - Meccanica Razionale - mod. A - 23 novembre 2001

1 Sia $\{O, x, y, z\}$ un riferimento inerziale con z verticale ascendente: $\underline{g} = (0, 0, -g)$, $g > 0$. Sul vincolo liscio dato dall'equazione

$$x^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad y = 0, \qquad R: \text{ costante reale positiva,}$$

è vincolata una particella P di massa m. Oltre alla gravità, agisce su P la forza

$$\underline{F} = -k\,\dot{OP}, \qquad k > 0.$$

Determinare, esibendo tutti i dettagli necessari, un equilibrio *stabile* per tale sistema.

Soluzione.

Si tratta di un pendolo con ulteriore forza di viscosità. Considerando quale parametro Lagrangiano l'angolo θ che vale zero in $(0, 0, -R)$, cioè la candidata posizione stabile cercata, e valutato positivamente in senso antiorario, si ha la seguente immersione vincolare, dove (t, n, b) è la terna di Frenet:

$$S^1 \ni \theta \mapsto OP(\theta) = (R\sin\theta, 0, -R\cos\theta) = -R\,n \in R^3.$$

$$\dot{OP} = (R\cos\theta\,\dot\theta, 0, R\sin\theta\,\dot\theta) = R\dot\theta\,t$$

$$\begin{aligned}
t: &\qquad mR\ddot\theta = -\,mg\sin\theta - kR\dot\theta\\
n: &\qquad mR\dot\theta^2 = -\,mg\cos\theta + \Phi_n\\
b: &\qquad 0 = \Phi_b
\end{aligned}$$

Nel caso conservativo, per $k = 0$, la funzione energia totale è integrale primo e lavora come funzione di Liapunov per l'equilibrio $\theta = 0$,

$$E(\theta, \dot\theta) = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 - mgR(\cos\theta - 1)$$

cioè, vale zero in $(\theta, \dot\theta) = (0, 0)$ ed è ivi localmente definita positiva, inoltre (appena sopra detto) è costante lungo i moti din. possibili.

Nel caso di presenza di viscosità, $k > 0$, ancora $(\theta, \dot\theta) = (0, 0)$ è equilibrio: infatti la componente t mostra che per $\dot\theta = 0$ il secondo membro è nullo per $\theta = \mathbb{Z}\pi$; si tratta di accertare se la *stessa* funzione $E(\theta, \dot\theta)$ è ancora Liapunov: ora bisogna solamente verificare che sia non crescente lungo le soluzioni,

$$\dot E = \frac{\partial E}{\partial\theta}\dot\theta + \frac{\partial E}{\partial\dot\theta}\ddot\theta = mgR\sin\theta\,\dot\theta + mR^2\dot\theta\,\ddot\theta,$$

usando la componente t del moto,

$$\dot E = mgR\sin\theta\,\dot\theta - mgR\sin\theta\,\dot\theta - kR^2\dot\theta^2 = -kR^2\dot\theta^2 \le 0$$

Dunque, $\theta = 0$ è equilibrio stabile per ogni 'aggiunta' viscosa con $k > 0$.

c. Razionale -Matematici- Mod.A- Prova scritta del 31 agosto 2001

vere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome, Nome, data, Mod. A.

chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del Mod. A in fogli distinti da li fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. B

el piano Oxy del sistema $Oxyz$, y verticale ascendente ($g = -g\hat{y}$), undisco omoge- ssa M e raggio R è vincolato in maniera liscia a ruotare attorno al suo baricentro to nell'origine O. Un ulteriore disco di massa m, raggio r, baricentro A, è vinco- iano Oxy a rotolare senza strisciare *sia* su di una guida circolare fissa di centro io $R + 2r$ *sia* sul bordo del disco precedente. Il sistema è 1-dimensionale, e il o Lagrangiano da utilizzare nella descrizione del sistema sia l'angolo orientato to positivamente in senso antiorario dall'asse x alla semiretta orientata come il A.

'er arbitrari moti $t \mapsto \vartheta(t)$, determinare (vettorialmente) le velocità angolari dei i, ω_O e ω_A.

alla gravità su entrambi i dischi, sul disco incernierato nell'origine è applicata ia di momento:

$$M = \frac{mgR}{4}\hat{z}.$$

eterminare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

'na particella di massa $m = 1$ è vincolata nel piano liscio orizzontale Oxy ed è lla forza

$$F = -\frac{y^6 x}{3}\hat{x} - y^5 x^2 \hat{y}.$$

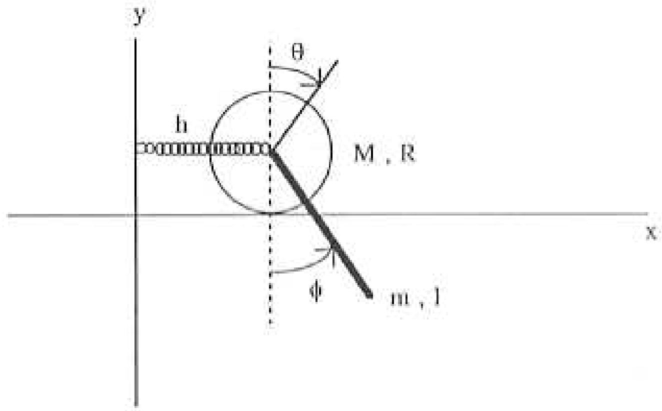
re se il sistema è conservativo.
re se esistono equilibri stabili.

Meccanica Razionale -Matematici - Mod. B - Prova Scritta del 31 agosto 2001

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data, Mod. B

(Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del mod. B in fogli *distinti* da ulteriori eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. A)

1. Un disco omogeneo D di massa M e raggio R è vincolato rotolare senza strisciare sull'asse orizzontale x di un sistema di riferimento $Oxyz$ con y verticale ascendente: $\underline{g} = (0, -g, 0)$. Una molla di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica $h > 0$ è tesa tra l'asse y e il centro C del disco, mantenendosi sempre orizzontale. Un'asta di massa m e lunghezza l è vincolata con un estremo nel centro C ed è libera di ruotare nel piano verticale Oyx. Considerare quali parametri Lagrangiani gli angoli θ e ϕ in figura.
Determinare *esplicitamente* l'equazione di secondo grado che fornisce le pulsazioni ω_1 e ω_2 delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile.



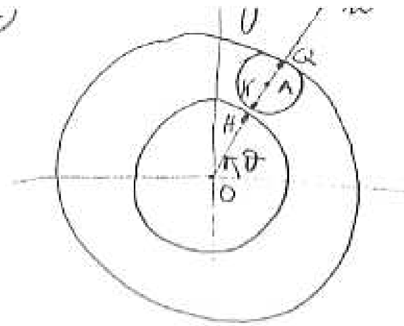
2. Sia $x \in R^n$, $A \in Sym^+(n), U \in Sym^+(n)$ e si consideri il sistema meccanico n–dimensionale

$$L = T - U = \frac{1}{2}A(\dot{x}, \dot{x}) - \frac{1}{2}U(x, x).$$

Mostrare, ricordando quanto fatto sulla teoria delle piccole oscillazioni, che esiste una trasformazione canonica che trasforma il sistema hamiltoniano associato a L in un sistema separabile. Determinare quindi l'integrale generale del moto a meno di quadrature con il metodo di Hamilton–Jacobi.

21

21 (1)



$\mathcal{D}_O$: disco di centro O

$\mathcal{D}_A$: disco di centro A

$H \in \mathcal{D}_O$, $K \in \mathcal{D}_A$

$Q \in \mathcal{D}_A$

zioni di puro rotolamento: 1) $\underline{v}_H = \underline{v}_K$

2) $\underline{v}_Q = \underline{0}$

$= \underline{v}_A + \underline{\omega}_A \wedge AQ = \underline{0}$, $\underline{v}_K = \underline{v}_A + \underline{\omega}_A \wedge AK = \underline{v}_H$,

e $AK = -AQ$, $\underline{v}_K = \underline{v}_H$ si scrive:

$\underline{\omega}_A \wedge AQ = \underline{\omega}_O \wedge R\hat{n}$, dove $\hat{n} = \cos\vartheta\,\hat{x} + \sin\vartheta\,\hat{y}$

$= \underline{\omega}_O \wedge R\hat{n}$, $2\dot{\vartheta}\hat{z} \wedge (R+r)\hat{n} = \underline{\omega}_O \wedge R\hat{n}$,

$R - 2\dot{\vartheta}(R+r)\hat{z}] \wedge \hat{n} = \underline{0}$,

è sia // sia $\perp$ a $\hat{n}$ $\Rightarrow [\cdots] = \underline{0}$, cioè:

$$\boxed{\underline{\omega}_O = \frac{2(R+r)\dot{\vartheta}}{R}\hat{z}}$$

ne, riscriviamo $\underline{v}_Q = \underline{0}$:

$\wedge (R+r)\hat{n} + \underline{\omega}_A \wedge r\hat{n} = \underline{0}$

$(R+r)\hat{z} + r\,\underline{\omega}_A] \wedge \hat{n} = \underline{0}$, come prima,

$$\boxed{\underline{\omega}_A = -\frac{R+r}{r}\dot{\vartheta}\hat{z}}$$

Sul disco $\mathcal{D}_O$ agisce coppia $\underline{M} = \frac{mgR}{4}\hat{z}$

$$dL^{\mathcal{M}} = \underline{M} \cdot d\underline{\omega}_O = \frac{mgR}{4}\hat{z} \cdot 2\frac{(R+r)d\vartheta}{R}\hat{z}$$

$$= \frac{1}{2}mg(R+r)d\vartheta = -d\underbrace{\left(-\frac{mg(R+r)}{2}\vartheta\right)}_{\mathcal{U}^{m}}$$

$$\mathcal{U}^{g} = mg(R+r)\sin\vartheta$$

$$0 = \mathcal{U}'_{tot.} = mg(R+r)\left(\cos\vartheta_{EQ} - \frac{1}{2}\right)$$

$\cos\vartheta_{EQ} = \frac{1}{2}$: $\vartheta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\vartheta_2 = -\frac{\pi}{3}$

$\mathcal{U}'' = -mg(R+r)\sin\vartheta$

$\mathcal{U}''(\vartheta_1) < 0$ inst.

$\mathcal{U}''(\vartheta_2) > 0$ stabile

2.

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -2y^5 x = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ su tutto $\mathbb{R}^2$: sist. conservativo

$\Rightarrow \mathcal{U}(x,y) = \frac{y^6 x^2}{6}$. $\mathcal{U} \geq 0$ è semi-definita positiva, sugli assi x e y, che sono tutti punti di equilibrio. Non sono stabili: sono infatti dinamicamente possibili moti lungo l'asse x e l'asse y con velocità costante piccola ad arbitrio. Per esempio dal generico p.to d'equilibrio $(x^*, 0)$, per x^* arbitraria, parte il moto $x(t) = x^* + \varepsilon t$, $y(t) \equiv$ che, per quanto piccolo sia ε, se ne va all'

$$\ldots g + U^{el} = mg\frac{\ell}{2}(1-\cos\phi) + \frac{1}{2}k(R\theta)^2$$

$$\ldots g\frac{\ell}{2}\sin\phi = 0 \qquad \phi = 0, \pi$$

$$\ldots R^2\theta = 0 \qquad \theta = 0$$

$$\ldots) = \begin{pmatrix} mg\frac{\ell}{2}\cos\phi & 0 \\ 0 & kR^2 \end{pmatrix} \qquad H_U(0,0) \in Sym^+$$

$\ldots = (0,0)$ è equilibrio stabile (T. di L.D)

$$\ldots + T^{(A)} = \frac{1}{2}\left(MR^2 + \frac{MR^2}{2}\right)\dot\theta^2 + \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\dot\phi^2$$

$$\ldots^2 + \dot y_G^2 = R^2\dot\theta^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot\phi^2 + R\ell\cos\phi\,\dot\phi\dot\theta$$

$$\ldots\left(\frac{3}{2}M+m\right)R^2\dot\theta^2 + \frac{m}{3}\ell^2\dot\phi^2 + mR\ell\cos\phi\,\dot\phi\dot\theta\Big] = \frac{1}{2}A(\dot q, \dot q)$$

…re:

$$\ldots(0,0) - \omega^2 A(0,0)\big) = \det\begin{pmatrix} mg\frac{\ell}{2} - \omega^2\frac{m\ell^2}{3} & -\omega^2\frac{mR\ell}{2} \\ -\omega^2\frac{mR\ell}{2} & kR^2 - \omega^2\frac{R^2}{2}(3M+2m) \end{pmatrix} = 0$$

$$\ldots+m)\omega^4 - \left[\frac{m\ell^2}{3}R^2k + mg\frac{\ell}{4}R^2(3M+2m)\right]\omega^2 + \frac{mg\ell kR^2}{2} = 0$$

2) Es. 10: $x \in \mathbb{R}$, $L = \frac{1}{2}A(\dot x, \dot x) - \frac{1}{2}U(x,x)$, $A, U \in Sym^+$

esiste $S = R_1 \Lambda R$ tale che, posto $X = Sx \in \mathbb{R}^n$, L diviene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot X, \dot X) + \frac{1}{2}\Omega(X,X) \quad \text{ove } \Omega = Diag[\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2]$$

Sia $S: \underset{\{x\}}{Q} \longrightarrow \underset{\{X\}}{\tilde Q}$; S induce in modo canonico una trasformazione canonica da $T^*Q \longrightarrow T^*\tilde Q$

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Sx = X \\ S^{-T}p = P \end{pmatrix} =: \psi\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

e il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} TQ & \xrightarrow{TS} & T\tilde Q \\ FL \downarrow & & \downarrow F\mathcal{L} \\ T^*Q & \xrightarrow{\psi} & T^*\tilde Q \\ \downarrow H & & \downarrow \tilde H \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

ove $H(x,p) = \frac{1}{2}A^{-1}(p,p) + \frac{1}{2}U(x,x)$

$$\tilde H(X,P) = \frac{1}{2}(P,P) + \frac{1}{2}\Omega(X,X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (P_i^2 + \omega_i^2 X_i^2)$$

Il sistema descritto da $\tilde H$ è Hamiltoniano separabile (sono n oscillatori armonici disaccoppiati)

$$S(t, \tilde P, X) = -\left(\sum_{i=1}^n \tilde P_i\right)t + W_i(\tilde P_i, X_i) \qquad \text{ove}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_i}{\partial X_i}\right)^2 + \omega_i^2 X_i^2 = \tilde P_i \qquad i = 1 \ldots n.$$

13

Meccanica Razionale -Matematici - Mod. A - Prova Scritta del 14 luglio 2000

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data, Mod. A

(Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del mod. A in fogli distinti da ulteriori eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. B)

1. Una particella P di massa m è soggetta alla forza posizionale di energia potenziale

$$U(x, y, z) = -A(x^4 + yx + z^7), \qquad A > 0,$$

ove x, y, z sono coordinate in un sistema di riferimento inerziale. Essa è vincolata in maniera liscia sull'asse orizzontale x ($\underline{g} = -g\hat{z}$). Determinare esplicitamente i moti di P per assegnazioni di dati iniziali x_0, $\dot{x}_0$ tali che l'energia totale del sistema valga $E(x_0, \dot{x}_0) = 0$.

2. Una particella P di massa $m = 1$ è soggetta alla forza

$$\mathbf{F}(OP, \mathbf{v}) = -(1 + |\mathbf{v}|^2)OP.$$

Essa è vincolata in maniera liscia sull'asse orizzontale x ($\underline{g} = -g\hat{z}$), ove x, y, z sono coordinate in un sistema di riferimento inerziale.

i) Determinare gli equilibri e, mediante il primo metodo di Liapunov, studiarne –se possibile– la stabilità;

ii) Dimostrare, o confutare, che la seguente funzione

$$f(x, v) = \frac{1}{2}\ln(1 + v^2) + \frac{x^2}{2}$$

sia di Liapunov per un equilibrio del sistema vincolato;

iii) abbozzare nel piano (x, v) le orbite vicine all'equilibrio del punto ii).

3. Nel piano Oxy, y verticale ascendente, due aste AB e CD di massa trascurabile e di ugual lunghezza l sono vincolate nel seguente modo: l'estremo A è incernierato nell'origine O del sistema cartesiano, il punto estremo B è incernierato col punto C, l'estremo D è vincolato a scorrere sull'asse y. C'è una guida di raggio l centrata nell'origine su cui, dati i vincoli appena descritti, scorre $B \equiv C$. Una molla di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica $h > 0$ ha un estremo vincolato in $E = (0, l)$, inoltre è vincolata sulla guida (cioè, ad assumere la forma dell'arco $\hat{EB}$), e ha l'altro estremo vincolato nello snodo in B. In D è vincolata una particella di massa m. Tutti i vincoli sono lisci. Si consideri quale parametro Lagrangiano l'angolo orientato positivamente in senso orario $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, dal semi-asse positivo delle y all'asta AB.

Al variare del parametro m nei reali positivi, studiare equilibri e stabilità.

1

Meccanica Razionale -Matematici - Mod. A - Primo compitino 23 novembre 2001

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data

(Risolvere l' esercizio 2 in fogli *distinti* **da ulteriori eventuali fogli usati per la soluzione dell' esercizio 1)**

1 Sia $\{O, x, y, z\}$ un riferimento inerziale con z verticale ascendente: $\underline{g} = (0, 0, -g)$, $g > 0$. Sul vincolo liscio dato dall'equazione

$$x^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad R: \text{ costante reale positiva,}$$

è vincolata una particella P di massa m. Oltre alla gravità, agisce su P la forza

$$\underline{F} = -k\,\dot{OP}, \qquad k > 0.$$

Determinare, esibendo tutti i dettagli necessari, un equilibrio *stabile* per tale sistema.

2. Una guida circolare di raggio R giace, con centro nell' origine, nel piano (e_2, e_3) di un riferimento (O, e_1, e_2, e_3), con e_3 verticale ascendente ($\underline{g} = (0, 0, -g)$). Il riferimento (O, e_1, e_2, e_3) ruota con velocità angolare costante $\Omega = \Omega e_3 = \Omega e_3^*$ rispetto ad un riferimento inerziale (O, e_1^*, e_2^*, e_3^*). Un punto P di massa m scorre sulla guida liscia ed è soggetto, oltre al peso, ad una forza elastica dovuta ad una molla di costante elastica $k > 0$ tesa tra il punto P e l'origine O. Si riferisca la posizione del punto all'angolo θ tra $-e_3$ e OP, valutato in senso antiorario. Determinare:

1) l'equazione pura (cioè priva della reazione vincolare) del moto nel riferimento relativo

2) le configurazioni di equilibrio al variare di Ω nei reali positivi

3) le componenti lagrangiane della sollecitazione Q^{el} e Q^{cor} della forza elastica e della forza di Coriolis agenti sul punto.

2

Soluzione Primo compitino - Meccanica Razionale - mod. A - 23 novembre 2001

1 Sia $\{O, x, y, z\}$ un riferimento inerziale con z verticale ascendente: $\underline{g} = (0, 0, -g)$, $g > 0$. Sul vincolo liscio dato dall'equazione

$$x^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad y = 0, \qquad R: \text{ costante reale positiva,}$$

è vincolata una particella P di massa m. Oltre alla gravità, agisce su P la forza

$$\underline{F} = -k\,\dot{OP}, \qquad k > 0.$$

Determinare, esibendo tutti i dettagli necessari, un equilibrio *stabile* per tale sistema.

Soluzione.

Si tratta di un pendolo con ulteriore forza di viscosità. Considerando quale parametro Lagrangiano l'angolo θ che vale zero in $(0, 0, -R)$, cioè la candidata posizione stabile cercata, e valutato positivamente in senso antiorario, si ha la seguente immersione vincolare, dove (t, n, b) è la terna di Frenet:

$$S^1 \ni \theta \mapsto OP(\theta) = (R\sin\theta, 0, -R\cos\theta) = -R\, n \in R^3.$$

$$\dot{OP} = (R\cos\theta\,\dot\theta, 0, R\sin\theta\,\dot\theta) = R\dot\theta\, t$$

$$\begin{aligned} t: &\quad mR\ddot\theta = -mg\sin\theta - kR\dot\theta \\ n: &\quad mR\dot\theta^2 = -mg\cos\theta + \Phi_n \\ b: &\quad 0 = \Phi_b \end{aligned}$$

Nel caso conservativo, per $k = 0$, la funzione energia totale è integrale primo e lavora come funzione di Liapunov per l'equilibrio $\theta = 0$,

$$E(\theta, \dot\theta) = \frac{1}{2} mR^2\dot\theta^2 - mgR(\cos\theta - 1)$$

cioè, vale zero in $(\theta, \dot\theta) = (0, 0)$ ed è ivi localmente definita positiva, inoltre (appena sopra detto) è costante lungo i moti din. possibili.

Nel caso di presenza di viscosità, $k > 0$, ancora $(\theta, \dot\theta) = (0, 0)$ è equilibrio: infatti la componente t mostra che per $\dot\theta = 0$ il secondo membro è nullo per $\theta = \mathbb{Z}\pi$; si tratta di accertare se la *stessa* funzione $E(\theta, \dot\theta)$ è ancora Liapunov: ora bisogna solamente verificare che sia non crescente lungo le soluzioni,

$$\dot E = \frac{\partial E}{\partial\theta}\dot\theta + \frac{\partial E}{\partial\dot\theta}\ddot\theta = mgR\sin\theta\,\dot\theta + mR^2\dot\theta\,\ddot\theta,$$

usando la componente t del moto,

$$\dot E = mgR\sin\theta\,\dot\theta - mgR\sin\theta\,\dot\theta - kR^2\dot\theta^2 = -kR^2\dot\theta^2 \le 0$$

Dunque, $\theta = 0$ è equilibrio stabile per ogni 'aggiunta' viscosa con $k > 0$.

19

Esercizio 2. Correzione.

nel riferimento relativo:

(1) $m a_p^{(r)} = m g + F^{el} + \phi - 2m\,\Omega \wedge v_p^{(r)} - m\,\Omega \wedge (\Omega \wedge OP)$

vincolo liscio: uso la terna di Frénet (t, n, b)

$\phi = \phi_n \underline{n} + \phi_b \underline{b}$ $\qquad a_p^{(r)} = R\ddot\theta \underline{t} + R\dot\theta^2 \underline{n}$

$mg = -mg(\cos\theta \underline{n} + \sin\theta \underline{t})$ $\qquad F^{el} = KR\underline{n}$

$-2m\,\Omega \wedge v_p^{(r)} = -2m\,\Omega\, \underline{e}_3 \wedge R\dot\theta \underline{t} = \Omega R\dot\theta 2m\, \underline{b}$

$-m\,\Omega \wedge (\Omega \wedge OP) = -mR\Omega^2 \sin^2\theta\, \underline{n} + mR\Omega^2 \cos\theta \sin\theta\, \underline{t}$

proietto la (1) sulla terna di Frénet:

$$
\begin{aligned}
t &: \left\{ \begin{array}{l} mR\ddot\theta = -mg\sin\theta + mR\Omega^2\cos\theta\sin\theta \\ mR\dot\theta^2 = KR - mg\cos\theta - mR\Omega^2\sin^2\theta + \phi_n \\ 0 = 2m\Omega R\dot\theta\cos\theta + \phi_b \end{array} \right. \\
n &: \\
b &:
\end{aligned}
$$

la prima è l'eq. pura del moto.

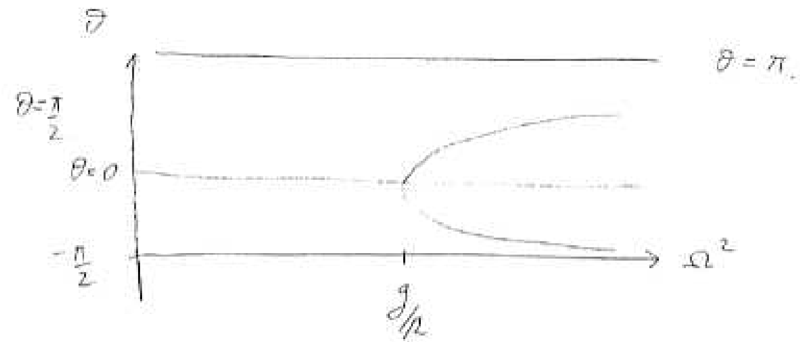
<u>Equilibri</u>:

$$\sin\theta\,(-g + R\Omega^2\cos\theta) = 0$$

$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ sempre presenti.

$\cos\theta = \dfrac{g}{R\Omega^2} \leq 1$ $\qquad \theta_{3,4} = \pm \arccos\left(\dfrac{g}{R\Omega^2}\right)$

se $\Omega^2 \geq g/R$.



3) componenti lagrangiane delle sollecitazione

$Q^{cor} = F^{cor} \cdot \delta P = F^{cor} \cdot v_p^{(r)} dt = -2m\,\Omega \wedge v_p^{(r)} \cdot v_p^{(r)} dt \equiv 0$

$Q^{el} = F^{el} \cdot \delta P = KR\underline{n} \cdot R\dot\theta \underline{t} \equiv 0.$

Meccanica Razionale -Matematici - Mod. A - Prova Scritta del 14 luglio 2000

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data, Mod. A

(Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del mod. A in fogli distinti da ulteriori eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. B)

1. Una particella P di massa m è soggetta alla forza posizionale di energia potenziale

$$\underline{U}(x,y,z) = -A(x^4 + yx + z^7), \qquad A > 0,$$

ove x, y, z sono coordinate in un sistema di riferimento inerziale. Essa è vincolata in maniera liscia sull'asse orizzontale x ($\underline{g} = -g\hat{z}$). Determinare esplicitamente i moti di P per assegnazioni di dati iniziali x_0, $\dot{x}_0$ tali che l'energia totale del sistema valga $E(x_0, \dot{x}_0) = 0$.

2. Una particella P di massa $m = 1$ è soggetta alla forza

$$\mathbf{F}(OP, \mathbf{v}) = -(1 + |\mathbf{v}|^2)OP.$$

Essa è vincolata in maniera liscia sull'asse orizzontale x ($\underline{g} = -g\hat{z}$), ove x, y, z sono coordinate in un sistema di riferimento inerziale.

i) Determinare gli equilibri e, mediante il primo metodo di Liapunov, studiarne -se possibile- la stabilità;

ii) Dimostrare, o confutare, che la seguente funzione

$$f(x, v) = \frac{1}{2}\ln(1 + v^2) + \frac{x^2}{2}$$

sia di Liapunov per un equilibrio del sistema vincolato;

iii) abbozzare nel piano (x, v) le orbite vicine all'equilibrio del punto ii).

3. Nel piano Oxy, y verticale ascendente, due aste AB e CD di massa trascurabile e di ugual lunghezza l sono vincolate nel seguente modo: l'estremo A è incernierato nell'origine O del sistema cartesiano, il punto estremo B è incernierato col punto C, l'estremo D è vincolato a scorrere sull'asse y. C'è una guida di raggio l centrata nell'origine su cui, dati i vincoli appena descritti, scorre $B \equiv C$. Una molla di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica $h > 0$ ha un estremo vincolato in $E = (0, l)$, inoltre è vincolata sulla guida (cioè, ad assumere la forma dell'arco $\hat{EB}$), e ha l'altro estremo vincolato nello snodo in B. In D è vincolata una particella di massa m. Tutti i vincoli sono lisci. Si consideri quale parametro Lagrangiano l'angolo orientato positivamente in senso orario $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, dal semi-asse positivo delle y all'asta AB.

Al variare del parametro m nei reali positivi, studiare equilibri e stabilità.

Mecc. Razionale -Matematici – Mod. B– Prova scritta del 14 luglio 2000

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome, Nome, data, Mod. B

Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del Mod. A in fogli distinti da eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. B

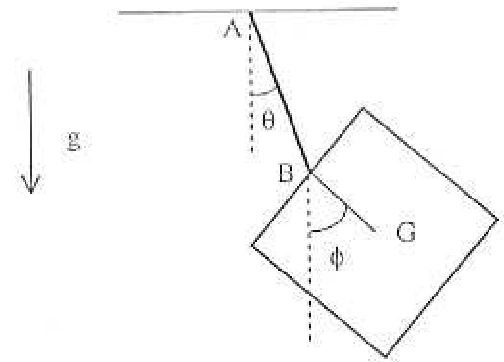
Esercizio 1. Un bipendolo è costituito da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza l, libera di ruotare in un piano verticale attorno al punto fisso A, e da una lamina omogenea quadrata di lato 2a e massa M, vincolata all'asta in modo liscio nel punto B, punto medio del lato, anch'essa libera di ruotare nel piano verticale attorno al punto B. Si riferisca il sistema agli angoli orientati θ e ϕ formati dalla retta di versore g con i segmenti AB e BG, rispettivamente.

1) Determinare l'energia potenziale e l'energia cinetica del sistema;

2) Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni del sistema attorno ad una posizione di equilibrio stabile nel caso particolare $m = M$ e $l = a$;

3) Sempre nel caso $m = M$ e $l = a$, scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Hamilton del sistema linearizzato. Dire se esiste una trasformazione di variabili che trasforma l'Hamiltoniana del sistema linearizzato in un sistema Hamiltoniano separabile.

Esercizio 2. Data la trasformazione di coordinate nel piano delle fasi $P = P(p, q)$, $Q = Q(q)$, ove $Q(q) = qe^q$, determinare $P(p, q)$ in modo che la trasformazione di coordinate sia canonica univalente.



15

1. Energia cinetica del sistema vincolato: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Energia potenziale del sist. vinc.: $\mathcal{U}(x) = -A x^4$

Determinare $x(t)$ risolvente $m\ddot{x} = 4Ax^3$

15

con dati iniziali $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ soddisfacenti

$$E(x_0, \dot{x}_0) = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 - A x_0^4 = 0.$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2A}{m} x^4, \quad |\dot{x}| = \sqrt{\frac{2A}{m}}\, x^2, \quad \dot{x} = \operatorname{sgn}\dot{x}_0 \sqrt{\frac{2A}{m}}\, x^2,$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\bar{x}}{\operatorname{sgn}\dot{x}_0 \sqrt{\frac{2A}{m}}\, \bar{x}^2} = \int_0^t d\bar{t}, \quad -\frac{1}{\operatorname{sgn}\dot{x}_0 \sqrt{\frac{2A}{m}}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right) = t,$$

$$x = \frac{x_0}{1 - t(\operatorname{sgn}\dot{x}_0)\, x_0 \sqrt{\frac{2A}{m}}}.$$

2. L'equazione della dinamica del sistema vincolato è $\ddot{x} = -(1+\dot{x}^2)x$,

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -(1+v^2)x \end{cases} \qquad (0,0) \text{ è EQU.}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + (\text{termine d'ordine} \geq 2)$$

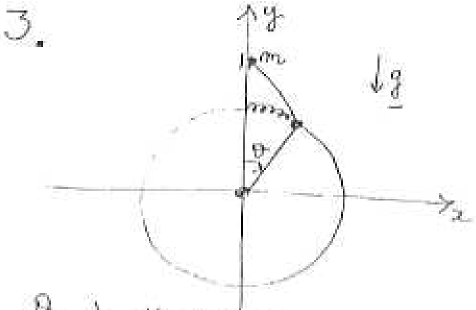
Sistema linearizzato attorno all'equ. $(x, v) = (0,0)$.

Autovalori di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: $\lambda_{1,2} = \pm i$: il 1° Metodo non dice nulla. Verifichiamo che $f(x,v) = \frac{1}{2}\ln(1+v^2) + \frac{x^2}{2}$ è una f di Liapunov. In particolare, f è integrale primo:

$$L_X f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,v)v + \frac{\partial f}{\partial v}\left(-(1+v^2)x\right) = xv + \frac{v}{1+v^2}(1+v^2)x = 0.$$

Infine f è evidentemente definita positiva attorno a $(0,0)$.

3.

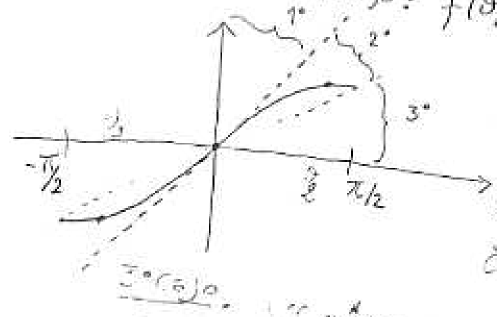


$$\mathcal{U}(\theta) = 2mgl\cos\theta + \frac{1}{2} h l^2 \theta^2$$

$$0 = \mathcal{U}'(\theta_E) = -2mgl\sin\theta_E + h l^2 \theta_E$$

$$f(\theta) := \frac{hl}{2mg}\theta \qquad g(\theta) := \sin\theta$$

θ_E è d'EQU se e solo se: $f(\theta_E) = g(\theta_E)$.



1° caso. $0 < m < \frac{hl}{2g}$ la retta $f(\theta)$ ha grafico nel settore 1°: $\exists!\, \theta_E$.

2° caso. $\frac{hl}{2g} < m < m^*$, $\frac{hl}{2m^*g} = \frac{2}{\pi}$

Esistono 3 equilibri, $\theta_1 = 0$, θ_2, $\theta_3 = -\theta_2$

3° caso. $m^* < m < +\infty$ si ha $\theta = 0$ (si ricordi che il sistema è definito $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; si deve considerare solo l'EQU.

Analisi della STABILITÀ. $\mathcal{U}''(\theta) = -2mgl\cos\theta + hl^2 = 2gl\left(-m\cos\theta + \frac{hl}{2g}\right)$

1° Caso: $\mathcal{U}''(0) = 2gl\left(-m + \frac{hl}{2g}\right) > 0$ STABILE.

2° Caso: $\mathcal{U}''(0) = 2gl\left(-m + \frac{hl}{2g}\right) < 0$: INSTABILE;

$$\mathcal{U}''(\theta_2) = 2gl\left(-m\cos\theta_2 + \frac{hl}{2g}\right) = 2gl\left(-m\cos\theta_2 + m\frac{\sin\theta_2}{\theta_2}\right) =$$

[qui abbiamo usato l'equazione degli equilibri]

$$= 2mgl\cos\theta_2\left(-1 + \frac{\operatorname{tg}\theta_2}{\theta_2}\right) > 0 \text{ perché } \operatorname{tg}\theta_2 > \theta_2 \text{ in } \theta_2 \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

dunque θ_2 è STABILE e così pure si vede che lo è $\theta_3 = -\theta_2$.

3° Caso: Ovviamente $\theta = 0$ è (continua ad essere) INSTABILE.

Andiamo infine a vedere cosa succede per la stabilità di $\theta = 0$ tra il 1° e il 2° settore, cioè per $m = \frac{hl}{2g}$.

$\mathcal{U}''(0) = 0$, $\mathcal{U}'''(\theta) = 2gl(m\sin\theta)$, $\mathcal{U}'''(0) = 0$,

$\mathcal{U}^{(IV)}(\theta) = 2mgl\cos\theta$, $\mathcal{U}^{(IV)}(0) > 0$: STABILE.

Modulo B. Correzione.

1) $U = U^{(g)} = -m\frac{\ell}{2}g\cos\theta - Mg(\ell\cos\theta + a\cos\varphi)$

$T^{asta} = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m\ell^2}{3}\dot\theta^2$

$T^{lam.} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2}(\omega, I_G\omega)$ $\qquad I_G = \frac{M}{12}(4a^2+4a^2) = \frac{2}{3}Ma^2$

$v_G^2 = (v_B + \omega\wedge BG)^2 = v_B^2 + 2v_B\cdot\omega\wedge BG + (\omega\wedge BG)^2 =$

$= \ell^2\dot\theta^2 + 2a\ell\cos(\theta-\varphi)\dot\varphi\dot\theta + a^2\dot\varphi^2$

$T = T^{asta} + T^{lam} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m+3M}{3}\right)\ell^2\dot\theta^2 + \frac{5}{3}Ma^2\dot\varphi^2 + 2Ma\ell\cos(\theta-\varphi)\dot\varphi\dot\theta\right]$

2) Il punto $\theta=\varphi=0$ è minimo di U e quindi è di equilibrio stabile per il T. di Lagrange-Dirichlet.

Nell'ipotesi $m=M$ e $\ell=a$, posto $q=\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}$

$T = \frac{1}{2}\, A(0,0)(\dot q,\dot q)$ $\quad$ ove $\quad A(0,0) = \frac{m\ell^2}{3}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

$\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{3}{2}g\ell m\sin\theta \; ; \; \frac{\partial U}{\partial\varphi} = mg\ell\sin\varphi$.

$H_U(0,0) = \frac{gm\ell}{2}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

frequenze caratteristiche: $\quad \det\left(H_U(0,0) - \omega^2 A(0,0)\right) = 0$

$\det\left[\frac{gm\ell}{2}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} - \frac{m\ell^2}{3}\omega^2\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}\right] = 0$ $\qquad$ ovvero

$\frac{11}{9}\ell^2\omega^4 - \frac{23}{6}g\ell\omega^2 + \frac{3}{2}g^2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \frac{g}{\ell}\cdot\frac{2}{66}\left(23 \pm \sqrt{265}\right)$

3). Il lagrangiano del sistema linearizzato è $\quad q=\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A(0,0)(\dot q,\dot q) - \frac{1}{2}H_U(0,0)(q,q) = T - U$

l'Hamiltoniano associato è

$H = \frac{1}{2}A^{-1}(0,0)(p,p) + \frac{1}{2}H_U(0,0)(q,q)$

ove $A^{-1}(0,0) = \frac{3}{11m\ell^2}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$. Quindi:

$H = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{11m\ell^2}\left(5p_\theta^2 - 6p_\theta p_\varphi + 4p_\varphi^2\right) + \frac{1}{2}\frac{gm\ell}{2}\left(3\theta^2 + 2\varphi^2\right)$

da cui seguono immediatamente le equazioni di Hamilton.

La trasformazione di coordinate $(\theta,\varphi) \longrightarrow (\Theta,\Phi)$ che porta il sistema Lagrangiano $\mathcal{L}$ in forma normale

$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\left(\dot\Theta^2 - \omega_1^2\Theta^2\right) + \frac{1}{2}\left(\dot\Phi^2 - \omega_2^2\Phi^2\right)$

ove ω_1^2 e ω_2^2 sono le frequenze caratteristiche, (con equazioni $\ddot\Theta + \omega_1^2\Theta = 0$, $\ddot\Phi + \omega_2^2\Phi = 0$) conduce ad un sistema Hamiltoniano associato

$\tilde H = \frac{1}{2}\left(P_\Theta^2 + \omega_1^2\Theta^2\right) + \frac{1}{2}\left(P_\Phi^2 + \omega_2^2\Phi^2\right)$

che è, ovviamente, separabile.

Esercizio 2. 1° metodo: Ricordando che $Q(q)$, traf. nello spazio delle configurazioni, induce una trasformazione canonica $\mathcal{T}$ univalente nello spazio delle fasi tramite: /3

$$J : TQ \to TQ \qquad (q,v) \mapsto \left(Q(q), \frac{\partial Q}{\partial q}(q)\, v\right) \qquad \mathcal{T} : T^*Q \to T^*Q \qquad (q,p) \mapsto \left(Q(q), J^{-t}(q)\, p\right)$$

Si ha

$$Q(q) = q e^q \qquad J(q) = e^q (q+1) \in \mathbb{R}$$

$$J^{-t}(q) = \frac{1}{e^q (q+1)} \quad (q \neq -1)$$

. Allora la tr. canonica è

$$Q(q) = q e^q \qquad P(q) = J^{-1}(q)\, p = \frac{p}{e^q (q+1)}$$

2° metodo: Dalla condizione $J E J^t = E$ caratterizzante le trasformazioni canoniche,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ 0 & (q+1)e^q \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si trova che $J E J^t = E \iff \frac{\partial P}{\partial p} (1+q) e^q = 1$

cioè

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{1}{e^q (q+1)} \qquad P(p,q) = \frac{p}{e^q (1+q)} + \varphi(q).$$

con $\varphi(q)$ funzione arbitraria.

Meccanica Razionale -Matematici - Mod. B - Prova Scritta del 9 luglio 2001

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data, Mod. B

(Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del mod. B in fogli *distinti* da ulteriori eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. A)

1. Una guida rettilinea, di massa trascurabile e orientata come in figura, è libera di ruotare attorno ad un suo punto fisso coincidente con l'origine di un riferimento inerziale $Oxyz$, mantenendosi nel piano verticale Oxy.

Un punto materiale P di massa m è libero di scorrere sulla guida ed è collegato all'origine da una molla di costante elastica h e lunghezza a riposo nulla. Si riferisca il sistema alle coordinate (r, ϑ) di $\mathbb{R} \times S^1$, rispettivamente ascissa del punto P e angolo formato dalla direzione positiva della guida con la direzione positiva dell'asse x, valutato in senso antiorario.

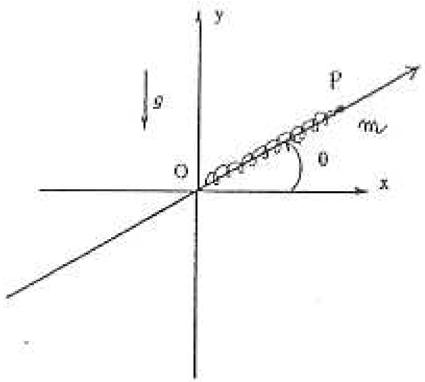
1) Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema

2) Determinare le pulsazioni ω_1 e ω_2 delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile.

3) Si supponga ora che l'accelerazione di gravità sia nulla, $g = 0$; Scrivere la nuova Lagrangiana, l'Hamiltoniana associata e scrivere l'integrale generale delle equazioni del moto con il metodo di Hamilton–Jacobi.

4) Sempre nel caso $g = 0$, scrivere le equazioni di Hamilton e dire se sono possibili moti del tipo $r(t) = r^* \neq 0$ e $\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t$. Determinare r^* e ω.

5) Sempre nel caso $g = 0$, scrivere il Routhiano del sistema e mostrare che i moti del punto 4) corrispondono a equilibri relativi.



Meccanica Razionale - mod. A - 9 luglio 2001

ATTENZIONE: Per chi svolge A+B: Risolvere gli esercizi del modulo A su UN foglio, gli esercizi del modulo B su un altro foglio, DISTINTO dal precedente.

1. Sulla parte esterna di una guida circolare di raggio R centrata nell'origine del piano Oxy di un sistema cartesiano $Oxyz$, di versori $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, un disco d di raggio $r < R$ può rotolare senza strisciare; un ulteriore disco D di raggio R rotola senza strisciare sul disco d. Una sbarretta di lunghezza $2(R + r)$ incernierata nei centri della guida e dei due dischi mantiene allineati i tre centri. Il sistema è ad un grado di libertà, si consideri l'angolo orientato ϑ dal semi-asse positivo delle x alla sbarretta.

Data la funzione del tempo $\vartheta = \vartheta(t)$, determinare, vettorialmente, le corrispondenti velocità angolari dei due dischi, $\underline{\omega}_d(t)$, $\underline{\omega}_D(t)$.

2. Determinare equilibri e discuterne l'eventuale asintotica stabilità per i sistemi differenziali:

(a_1) $$\dot{x} = -x$$

(a_2) $$\dot{x} = -x^2$$

(a_3) $$\dot{x} = -x^3$$

(b_1) $$\ddot{x} = -x$$

(b_2) $$\ddot{x} = -x^3$$

Si ricordi che le tecniche da usare sono primo e secondo metodo di Liapunov, eventualmente risolvere esplicitamente i generici problemi di Cauchy. Per le equazioni di secondo ordine aiutarsi eventualmente con il ritratto di fase nel piano $(x, \dot{x})$.

Modulo B. Correzione. (1

) $L = T - U = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - \frac{k}{2}r^2 - mgr\sin\theta$

Equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 & : \quad m\ddot r - m\dot\theta^2 r + kr + mg\sin\theta = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 & : \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot\theta) + mgr\cos\theta = 0 \end{cases}$$

2) Equilibri

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} kr + mg\sin\theta = 0 \\ mgr\cos\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r = -\frac{mg}{k}\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$P_1(\theta, r) = (0,0)$ $\quad P_2(\theta, r) = (\pi, 0)$

$P_3(\theta, r) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{mg}{k}\right)$ $\quad P_4(\theta, r) = \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{mg}{k}\right)$

$$H_U(P_3) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{m^2g^2}{k} \end{pmatrix} \in Sym^+ \Rightarrow P_3 \text{ è stabile.}$$

$$A(P_3) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{r = -\frac{mg}{k}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m^3g^2}{k^2} \end{pmatrix}$$

(16) Piccole oscillazioni

$$0 = \det\left(H_U(P_3) - A(P_3)\omega^2\right) = \det\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{m^2g^2}{k} - \omega^2\frac{m^3g^2}{k^2} \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}.$

3) $L = T - U = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - \frac{k}{2}r^2$ (2

$$H = T + U = \frac{1}{2}a^{-1}(p,p) + U = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \frac{k}{2}r^2$$

$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \ \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ pongo $\tilde p_r = E$ e sia

$$S(E, \tilde p_\theta, r, \theta, t) = -Et + \tilde p_\theta\theta + W(E, \tilde p_\theta, r)$$

eq. di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{\tilde p_\theta^2}{r^2}\right) = -\frac{k}{2}r^2 + E$$

$$W(r, \tilde p_\theta, E) = \pm\int\sqrt{2mE - kr^2 - \frac{\tilde p_\theta^2}{r^2}}\,dr$$

Tr. canonica:

$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \tilde p_\theta$ $\qquad p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r} = \pm\sqrt{2mE - kr^2 - \frac{\tilde p_\theta^2}{r^2}}$

$$\tilde\theta = \frac{\partial S}{\partial \tilde p_\theta} = \theta + \frac{\partial W}{\partial \tilde p_\theta} = \theta \pm \int \frac{\tilde p_\theta\,dr}{r^2\sqrt{2mE - kr^2 - \frac{\tilde p_\theta^2}{r^2}}}.$$

$$\tilde r = \frac{\partial S}{\partial \tilde p_r} = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W}{\partial E} = -t \pm \int \frac{2m\,dr}{\sqrt{2mE - kr^2 - \frac{\tilde p_\theta^2}{r^2}}}$$

4) Equazioni di Hamilton.

$$\begin{cases} \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = -hr + \dfrac{1}{m} p_\theta^2 \dfrac{1}{r^3} \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \\ \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{2m} \\ \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \end{cases}$$

Per $p_r(0)=0$ e $p_\theta(0)\in\mathbb{R}$, sono possibili moti del tipo $r(t) = r^* \neq 0$ e da $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ con

$\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\omega = \sqrt{\frac{h}{m}}$, $r^* = \sqrt[4]{\frac{p_\theta^2}{hm}}$

5) $L(r,\dot\theta,\dot r) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - \frac{h}{2}r^2$

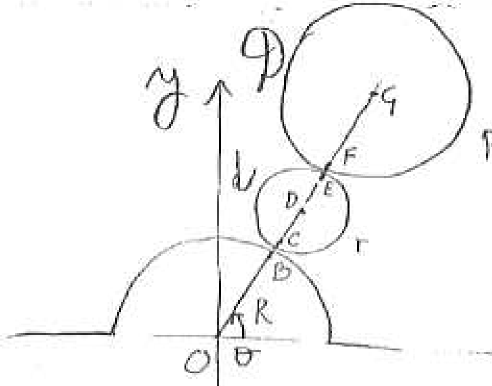
$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ $\qquad R^c(r,\dot r) = L(r,\dot r,\hat{\dot\theta}) - c\,\hat{\dot\theta}(c,r^2)$

$$= \frac{m}{2}\dot r^2 - \frac{h}{2}r^2 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{mr^2} =$$

$$= \frac{m}{2}\dot r^2 - U^{eff}(r)$$

Equilibri relativi: $\frac{dU^{eff}(r)}{dr} = hr - \frac{c^2}{mr^3} = 0$

$r_{eq} = \sqrt[4]{\frac{c^2}{mh}}$ $\qquad \dot\theta = \frac{c}{mr^2} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \sqrt{\frac{h}{m}}\,t.$



Puro rotolamento:

1) $\underline{v}_C = \underline{v}_B = \underline{0}$

2) $\underline{v}_F = \underline{v}_E \quad (\neq \underline{0})$

Pensando D sulla sbarretta:

$\underline{V}_D = OD \wedge \dot\theta\hat{z} = (R+r)\,\underline{u} \wedge \dot\theta\hat{z}$, $\quad \underline{u} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

Pensando D sul disco d: $\qquad \underline{V}_D = \overset{=0}{\underline{V}_C} + CD \wedge \underline{\omega}_d$,

$\underline{V}_D = CD \wedge \underline{\omega}_d = r\,\underline{u} \wedge \underline{\omega}_d$, $\quad \underline{\omega}_d = \omega_d \hat{z}$,

$(R+r)\dot\theta\;\underline{u}\wedge\hat{z} = r\,\omega_d\,\underline{u}\wedge\hat{z} \quad \Rightarrow \boxed{\underline{\omega}_d = \frac{R+r}{r}\dot\theta\hat{z}}$

— . —

$\underline{V}_G = 2(R+r)\,\underline{u}\wedge\dot\theta\hat{z}$ $\qquad$ (G sulla sbarretta)

$\underline{V}_G = \underline{V}_F + FG \wedge \underline{\omega}_D$

$\qquad \underline{V}_E = 2r\,\underline{u} \wedge \frac{R+r}{r}\dot\theta\hat{z}$

$2(R+r)\dot\theta\;\underline{u}\wedge\hat{z} = 2(R+r)\dot\theta\;\underline{u}\wedge\hat{z} + FG\wedge\underline{\omega}_D$

$FG \wedge \underline{\omega}_D = \underline{0} \qquad \Rightarrow \boxed{\underline{\omega}_D = \underline{0}}$

$a_1)$ $\dot{x} = -x$, $x_{eq} = 0$.

1° Metodo di Liapunov : $\lambda_1 = -1$ $Re(-1) < 0$

$\Rightarrow$ as. stab.

oppure

ii) 2° Metodo di L. : $W(x) = \frac{x^2}{2}$ (candidata f. di Liap.)

W è def. pos. att. a $x=0$.

$\mathcal{L}_X W = x(-x) = -x^2$ è def neg. attorno a $x=0$.

oppure

iii) risolvendo l'equ. diff: $x(t, c_1) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $\lambda_1 = -1$

$\tilde{x}(t, x_0) = x_0 e^{-t}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{t \to +\infty} \tilde{x}(t, x_0) = 0$

$\Rightarrow$ $x=0$ è un attrattore ;

inoltre, $\forall \varepsilon > 0$ basta scegliere $\delta = \varepsilon$ e $|x_0| < \delta$ per cui :

$$|\tilde{x}(t, x_0)| = |x_0| e^{-t} < |x_0| < \delta = \varepsilon .$$

(bastava usare una delle tre tecniche)

2

$a_2)$ $\dot{x} = -x^2$, il sistema linearizzato è $\dot{x} = 0$ $\Rightarrow$ il 1° Metodo non dice nulla.

Proviamo a risolvere : $-\frac{dx}{x^2} = dt$, $-\frac{1}{-2+1} x^{-1} \Big|_{x_0}^{x} = t$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = t$, $x(t, x_0) = \frac{x_0}{x_0 t + 1}$.

$\forall x_0 > 0$: $\lim_{t \to +\infty} \frac{x_0}{x_0 t + 1} = 0$

$\forall x_0 < 0$: $\lim_{t \to \frac{1}{|x_0|}} \frac{x_0}{x_0 t + 1} = -\infty$

$\Rightarrow$ instabile.

$a_3)$ $\dot{x} = -x^3$

i) $W(x) = \frac{x^2}{2}$, $\mathcal{L}_X W(x) = x(-x^3) = -x^4$

W è f. di Liap. per l'asint. stabilità.

oppure

ii) risolvendo : $-\frac{dx}{x^3} = dt$, $-\frac{1}{-3+1} x^{-3+1} \Big|_{x_0}^{x(t)} = t$,

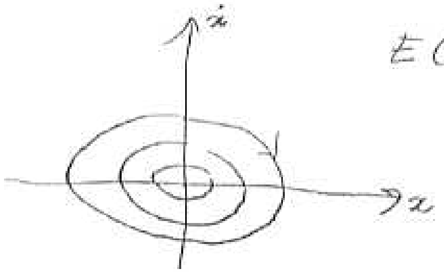
$x^2 = \frac{x_0^2}{2x_0^2 t + 1}$ $\dashrightarrow$ $x(t, x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{2x_0^2 t + 1}}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = 0$: è attrattore.

$\forall t > 0$:

$\left| \frac{x_0}{\sqrt{2x_0^2 t + 1}} \right| < |x_0|$: $\forall \varepsilon > 0$, basta prendere $\delta = \varepsilon$.

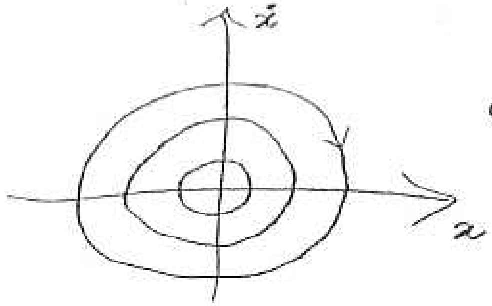
b₁) $\ddot{x} = -x$ è l'oscillatore armonico:



$$E(x,\dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

$x = 0$ è st., ma <u>non</u> può essere asint. stabile, vedi il diagramma di fase.

b₂) $\ddot{x} = -x^3$ $\quad E(x,\dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^4}{4}$



<u>Come sopra</u>.

Razionale -Matematici- Mod. A- Prova scritta del 1 settembre 2000

re chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome. Nome, data, Mod. A.

hi fa A+B: Risolvere gli esercizi del Mod. A in fogli distinti da fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. B

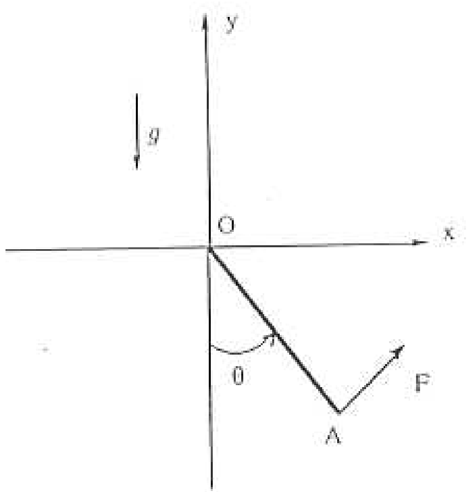
asta rigida OA di massa m e lunghezza l è libera di ruotare nel piano verticale l sistema (O,x,y,z), con y verticale ascendente, $\mathbf{g} = (0,-g,0)$, attorno al punto a agiscono, oltre al peso, una resistenza di mezzo di tipo viscoso distribuita R $-K\mathbf{v}(s)ds$, ove ds è l'elemento lineare sulla sbarra e $K > 0$) e una forza di modulo $= F\mathbf{u}_t$, ove $\mathbf{u}_t$ è il versore perpendicolare ad OA e tale che $OA \wedge \mathbf{u}_t = l\hat{z}$, con ell'asse z. Si riferisca il sistema all'angolo θ tra la direzione negativa dell'asse y atato in senso antiorario.

erminare l'equazione del moto dell'asta;

e se esistono istanti di arresto per $t > 0$ nel moto con $g = 0$ e condizioni iniziali $) = 0$;

erminare gli equilibri e discuterne la stabilità nel caso $F = 0$, $g > 0$;

terminare la reazione vincolare in O a $t = 0$ nel moto del punto 2).

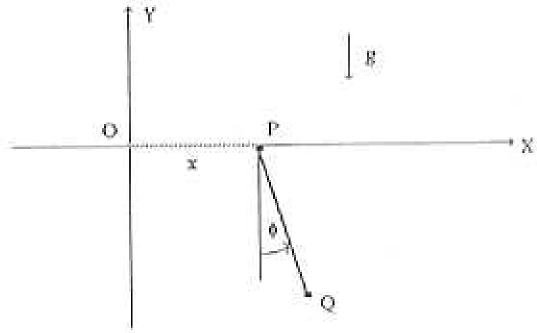


Meccanica Razionale -Matematici - Mod. B - Prova Scritta del 1 settembre 2000

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data, Mod. B

(Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del mod. B in fogli *distinti* da ulteriori eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. A)

1. Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sull'asse orizzontale x di un sistema di riferimento $Oxyz$ con y verticale ascendente: $\underline{g} = (0,-g,0)$. Una molla di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica $h > 0$ è tesa tra O e P. Il punto P è inoltre estremità di una sbarretta di massa trascurabile di lunghezza L. Nell'altra estremità della sbarretta è vincolato un punto materiale Q anch'esso di massa m. Considerare quali parametri Lagrangiani x di P e l'angolo ϕ in figura.
Determinare *esplicitamente* le pulsazioni ω_1 e ω_2 delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile.



2. Dimostrare o confutare (almeno) una delle due seguenti affermazioni:
1) Sia $Q = \mathbb{R}$. Le trasformazioni canoniche indipendenti dal tempo sono tutti e soli i diffeomorfismi (di aperti) di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che preservano la misura (in questo caso, l'area).
2) La trasformazione

$$\tilde{q} = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right), \qquad \tilde{p} = q \operatorname{ctg} p, \qquad (q,p) \in \mathbb{R}^2, \quad (\tilde{q},\tilde{p}) \in \mathbb{R}^2,$$

è canonica.

17

$= mg\, y_G = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta.$

(17) colo delle componenti lagrangiane delle forze $\underline{F}$ e $\underline{R}$.

F) $= \underline{F}\cdot\delta\underline{OA} = F\underline{u}_t\cdot\underline{v}_A dt = F\underline{u}_t\cdot \ell\dot\theta\underline{u}_t\, dt$

$= FL\,d\theta \Rightarrow Q_\theta^{(F)} = FL$

R) $= \int_0^\ell d\underline{R}(s)\cdot\delta\underline{OP}(s)\,ds = \int_0^\ell -ks\dot\theta\,\underline{u}_t\cdot\underline{v}(s)\,dt\,ds =$

$= \int_0^\ell -k\dot\theta s\,\underline{u}_t\cdot s\dot\theta\,\underline{u}_t\,dt\,ds = -k\dot\theta\,d\theta\int_0^\ell s^2 ds =$

$= -k\dot\theta\frac{\ell^3}{3}d\theta \Rightarrow Q_\theta^{(R)} = -k\dot\theta\frac{\ell^3}{3}$

quazioni di Lagrange.

$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m\ell^2}{3}\dot\theta^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} = -\frac{\partial U}{\partial\theta} + Q_\theta^{(F)} + Q_\theta^{(R)}$

$\frac{m\ell^2}{3}\ddot\theta = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + F\ell - k\frac{\ell^3}{3}\dot\theta$

Problema di Cauchy $(g=0)$

$$\begin{cases}\ddot\theta + \frac{k\ell}{m}\dot\theta - \frac{3F}{m\ell} = 0,\\ \theta(0) = \dot\theta(0) = 0.\end{cases}$$

mogenea associata $\lambda^2 + \frac{k\ell}{m}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\frac{k\ell}{m}$

Soluzione generale

$$\theta(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{k\ell}{m}t} + \frac{3F}{k\ell^2}t$$

ove

$$\begin{cases}0 = c_1 + c_2\\ 0 = -\frac{k\ell}{m}c_2 + \frac{3F}{k\ell^2}\end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{3Fm}{k^2\ell^3} = -c_1$$

Essendo

$$\dot\theta(t) = \frac{3F}{k\ell^2}\left(1 - e^{-\frac{k\ell}{m}t}\right)$$

Si ha $\dot\theta(0)=0$ e $\dot\theta(t)>0$ per $t>0$. Non vi sono arresti.

(3). Caso $F=0$, $g=0$. Da (*), espressa nel piano delle fasi (θ, v) (pendolo smorzato)

$$\begin{cases}\dot\theta = v,\\ \dot v = -\frac{k\ell}{m}v - \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\sin\theta\end{cases}$$

gli equilibri sono $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (\pi, 0)$.

Per esempio, linearizzando attorno a P_1,

$$\begin{cases}\dot\theta = v\\ \dot v = -\frac{k\ell}{m}v - \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\theta\end{cases} \qquad A = X'(P_1) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{3}{2}\frac{g}{\ell} & -\frac{k\ell}{m}\end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \lambda^2 + \frac{k\ell}{m}\lambda + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell} = 0$

$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{k\ell}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{k\ell}{m}\right)^2 - \frac{6g}{\ell}}\right] \Rightarrow Re(\text{Spettr}\,A) < 0$

P_1 è asintoticamente stabile.

$$m \underline{a}_G = \underline{\Phi}_0 + \underline{R}\Big|_{\dot\theta(0)} + \underline{F} = \underline{F} + \underline{\Phi}_0$$

perché $\dot\theta(0) = 0$. Inoltre $\underline{a}_G(0) = \frac{\ell}{2}\left[\ddot\theta(0)\underline{u}_t - \dot\theta^2(0)\underline{u}_r\right]$

da cui $\underline{a}_G(0) = \frac{\ell}{2}\ddot\theta(0)\underline{u}_t = \frac{3}{2}\frac{F}{m}\underline{u}_t$ da (*).

quindi

$$\underline{\Phi}_0 = m\underline{a}_G - \underline{F} = \left(\frac{3}{2}F - F\right)\underline{u}_t = \frac{F}{2}\underline{u}_t .$$

Soluzione di 1. del mod. B del 1/9/2000.

$$x_P = x, \qquad y_P = 0,$$
$$x_Q = x + L\sin\phi, \qquad y_Q = -L\cos\phi.$$

$$U(x,\phi) = \frac{h}{2}x^2 - mgL\cos\phi.$$

$$T(x,\dot x,\phi,\dot\phi) = \frac{1}{2}m\dot x^2 + \frac{1}{2}m[(\dot x + L\cos\phi\dot\phi)^2 + (L\sin\phi\dot\phi)^2] =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot\phi\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}2m & mL\cos\phi\\ mL\cos\phi & mL^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot\phi\end{pmatrix} = \frac{1}{2}a_{ij}\dot q^i\dot q^j.$$

Matrice cinetica: $a_{ij}(x,\phi)$.

Equilibri:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} = hx,$$
$$0 = \frac{\partial U}{\partial \phi} = mgL\sin\phi$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$, $(0,\pi)$.

$$\nabla^2 U(x,\phi) = \begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & mgL\cos\phi\end{pmatrix}$$

Si può applicare il teorema dell'hessiano non-degenere: $\det\nabla^2U(x,\phi)(0,0) \neq 0$, $\det\nabla^2U(x,\phi)(0,\pi)\neq 0$,

$\det\nabla^2U(x,\phi)(0,0)$ è def. pos. $\Rightarrow$ $(0,0)$ è stabile,

$\det\nabla^2U(x,\phi)(0,\pi)$ non è def. pos. $\Rightarrow$ $(0,\pi)$ è instabile.

En. cinetica di piccola oscill. attorno a $(0,0)$:

$$T^{(0)}(\dot x,\dot\phi) = \frac{1}{2}a_{ij}(0,0)\dot q^i\dot q^j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot\phi\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}2m & mL\\ mL & mL^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot\phi\end{pmatrix}.$$

Per le frequenze di piccola oscillazione si deve risolvere:

$$\det\left(\nabla^2U(x,\phi)(0,0) - \omega^2 a(0,0)\right) = 0,$$
$$\det\begin{pmatrix}h - 2m\omega^2 & -mL\omega^2\\ -mL\omega^2 & mgL - mL^2\omega^2\end{pmatrix} = 0,$$
$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{2mg + hL \pm\sqrt{4m^2g^2 + h^2L^2}}{2mL}.$$
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2mg + hL + \sqrt{4m^2g^2+h^2L^2}}{2mL}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2mg + hL - \sqrt{4m^2g^2+h^2L^2}}{2mL}}.$$

Soluzione di 2. del mod. B del 1/9/2000.

1)

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \tilde{p}(p,q) \\ \tilde{q}(p,q) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J^T \mathrm{E} J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} & -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\det J \\ \det J & 0 \end{pmatrix},$$

quest'ultima quantità è uguale a $c\mathrm{E} = c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se, e soltanto se,

$$\det J = c \quad (\neq 0)$$

In particolare: in $\mathbb{R}^2$ le trasformazioni canoniche indipendenti dal tempo e univalenti ($c = 1$) sono tutti e soli i diffeomorfismi del piano in sè che preservano la misura (l'area): $\det J = 1$.

2)

$$\tilde{p} = q \operatorname{ctg} p, \qquad \tilde{q} = \ln(\frac{1}{q} \sin p),$$

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{q}{\sin^2 p} & \operatorname{ctg} p \\ \frac{\frac{1}{q}\cos p}{\frac{1}{q}\sin p} & \frac{-\frac{1}{q^2}\sin p}{\frac{1}{q}\sin p} \end{pmatrix},$$

$$\det J = \frac{1}{\sin^2 p} - \frac{\cos^2 p}{\sin^2 p} = 1,$$

per il punto 1) la trasformazione (dove è definita) è canonica univalente. Oppure, si fa tutto il conto: $J^T \mathrm{E} J = \ldots = 1$.

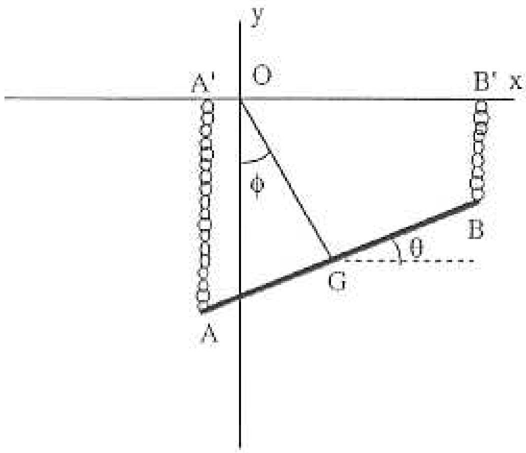
(17)

Meccanica Razionale -Matematici - Mod. B - Prova Scritta del 8 luglio 2002

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data, Mod. B

1. L'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $2l$ è libera di ruotare nel piano Oxy (y verticale ascendente) di un riferimento inerziale $Oxyz$. Il baricentro G è vincolato ad un' asta OG di lunghezza l e massa trascurabile. Tra gli estremi A e B dell'asta e i punti A' e B' di ascissa corrispondente ad A e B sono tese due molle di costante elastica h e lunghezza a riposo L. Si riferisca il sistema agli angoli ϑ e φ come in figura.

Scrivere la lagrangiana del sistema e determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile.



2. Una particella P di massa m (soggetta alla gravità) è vincolata a muoversi sulla superficie cilindrica $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ posta in un riferimento cartesiano ortogonale (O, x, y, z) con z vericale ascendente. Si riferisca la posizione della particella alle coordinate polari cilindriche (z, ϑ) ove $z = z_P$ e ϑ è l'angolo tra il piano xz è il piano passante per l'asse z e il punto P.

Scrivere la lagrangiana del sistema, determinare gli integrali primi e fornire la loro interpretazione meccanica.

Determinare l'integrale generale del moto con il metodo di Hamilton–Jacobi.

Mecc. Razionale -Matematici- Mod. A - Prova scritta dell'8 luglio 2002

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Mod.A, Cognome, Nome, data.

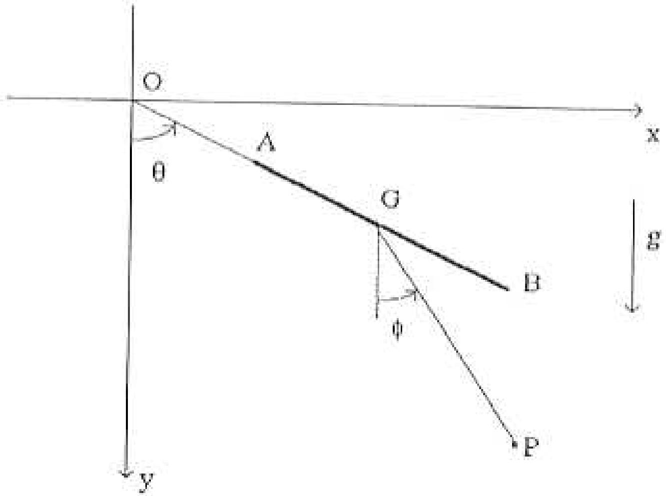
1. Si consideri la seguente asta OB, di cui solo l'ultimo tratto AB è dotato di massa M omogeneamente distribuita.

$|AB| = R$, massa$(AB)=M$,
$|GB| = R/2$,
$|OA| = R/2$.

Nel punto G, baricentro dell'asta OB, è incernierata un'altra asta GP, di lunghezza $|GP| = R$, alla cui estremità P è vincolato un punto materiale (P) di massa m.

L'estremo O della prima asta è vincolato nell'origine di un sistema di riferimento $Oxyz$ di cui y è verticale discendente e il sistema delle due aste, privo di attriti, è vincolato nel piano Oxy. Agisce solo la gravità. Si considerino gli angoli θ e φ in figura.

1) Scrivere l'energia cinetica T del sistema.
2) Determinare gli equilibri e discuterne la stabilità.



2. Una particella di massa $m = 1$ è vincolata su di un'asta ed è soggetta a delle forze per cui l'equazione differenziale che regge i moti din. possibili è:

$$\ddot{x} = -\tan x - \dot{x} - \varepsilon x^2$$

Dire per quali valori di ε nei reali la configurazione $x^* = 0$ è un equilibrio stabile.

(18)

2. $\ddot{x} = -\operatorname{tg} x - \dot{x} - \varepsilon x^2$

$$NL: \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\operatorname{tg} x - v - \varepsilon x^2 \end{cases} \qquad EQU: (x^*, v^*) = (0,0)$$

$$L_{(0,0)}: \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x - v \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

$$0 = \det\left(A - \lambda \mathbb{I}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1+\lambda) + 1,$$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ è } \underline{\text{asint. stabile } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}}.$$

Osservazione: Con la tecnica "energia" si trova un risultato più debole: provando ad usare l'energia del sistema ridotto conservativo $\ddot{x} = -\operatorname{tg} x - \varepsilon x^2$ che è $E(x,\dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} - \ln\cos x + \frac{\varepsilon x^3}{3}$,

$$\dot{E} = \ddot{x}\dot{x} + \operatorname{tg}x\,\dot{x} + \varepsilon x^2\dot{x} =$$

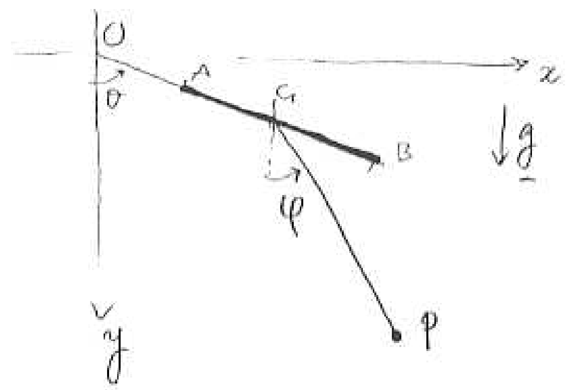
$$= \left(-\operatorname{tg}x - \dot{x} - \varepsilon x^2\right)\dot{x} + \operatorname{tg}x\,\dot{x} + \varepsilon x^2\dot{x} = -\dot{x}^2 \leq 0$$

ovvero $\dot{E}$ è ≤ 0 ma non è def. negativo. D'altra parte E in $(0,0)$ è def. positiva: basta dimostrare che $f(x) := -\ln\cos x + \frac{\varepsilon x^3}{3}$ ha un min. loc. in $x=0$ $\forall \varepsilon$,

$f(0)=0$, $f'(x) = \operatorname{tg}x + \varepsilon x^2$, $f''(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\varepsilon x$

$f''(0) > 0$. Si deduce la semplice stabilità $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.

1.



Mom. d'In. dell'asta rispetto O: $\underbrace{\frac{MR^2}{12}}_{J_G} + M|OG|^2 = \frac{13}{12}MR^2$

- $T_{\text{asta }AB} = \frac{1}{2}\frac{13}{12}MR^2\dot{\vartheta}^2$

$x_P = R(\sin\vartheta + \sin\varphi) \qquad y_P = R(\cos\vartheta + \cos\varphi)$

$$v^2 = \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 = R^2\left[\left(\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\sin\vartheta\,\dot{\vartheta} + \sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2\right] =$$

$$= R^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\underbrace{(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi)}_{\cos(\vartheta-\varphi)}\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right)$$

- $T_{\text{punto }P} = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\cos(\vartheta-\varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right)$.

$$V(\vartheta,\varphi) = -gR\left\{(M+m)\cos\vartheta + m\cos\varphi\right\}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = gR(M+m)\sin\vartheta \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgR\sin\varphi \end{cases} \qquad EQU: (0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)$$

$$\nabla^2 V(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} gR(M+m)\cos\vartheta & 0 \\ 0 & mgR\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ è stabile, instabili gli altri.}$$

Ex. 2. $\quad \mathcal{U} = mg z_P = mg z \qquad T = \frac{m}{2} v_P^2 = \frac{m}{2}(\dot z^2 + R^2\dot\theta^2)$.

$L = T - \mathcal{U} = \frac{m}{2}(\dot z^2 + R^2\dot\theta^2) - mgz = L(z, \dot z, \dot\theta)$

Integrali primi.

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = T + \mathcal{U} = \text{cost.}$ Integrale di Jacobi

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta = \text{cost.}$ È la componente lungo $\hat z$ del momento angolare. Infatti

$M_0 = OP \wedge m\dot{OP} = (R\cos\theta\,\hat x + R\sin\theta\,\hat y + z\hat z)\wedge m(-R\sin\theta\dot\theta\,\hat x +$
$+ R\cos\theta\,\dot\theta\,\hat y + \dot z\,\hat z) = [(R\sin\theta\,\dot z - R\cos\theta\,\dot\theta z)\hat x$
$- \hat y(R\cos\theta\,\dot z + R\sin\theta\,\dot\theta z) + \hat z R^2\dot\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)]m$ e quindi

$M_0 \cdot \hat z = mR^2\dot\theta$.

$H = T + \mathcal{U} = \frac{1}{2}A^{-1}(p, p) + \mathcal{U} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_z^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mR^2}\right) + mgz$.

$= H_1(p_z, z) + H_2(p_\theta) = f(H_1, H_2)$ H è separabile.

$S(t, \theta, z, \tilde p_\theta, \tilde p_z) = -f(\tilde p_\theta, \tilde p_z)t + W_\theta(\theta, \tilde p_\theta) + W_z(z, \tilde p_z)$

L'eq. di H-J si decompone in:

$H_1(z, \frac{\partial W_z}{\partial z}) = \tilde p_z \quad$ i.e. $\quad \frac{\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2}{2m} + mgz = \tilde p_z$

$H_2(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}) = \tilde p_\theta \quad$ i.e. $\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 \frac{1}{mR^2} = \tilde p_\theta$

Modulo B. Correzione

Ex. 1. $\quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^g + \mathcal{U}^{el} = mg y_G + \frac{k}{2}[(AA' - \ell)^2 + (BB' - \ell)^2] =$

$= -mg\ell\cos\varphi + \frac{k}{2}\{[\ell(\cos\varphi - \sin\theta) - \ell]^2 + [\ell(\cos\varphi + \sin\theta) - \ell]^2\} \cong$

$= -mg\ell\cos\varphi + k\ell^2(\cos^2\varphi + \sin^2\theta - 2\cos\varphi)$

$T = \frac{m}{2} v_G^2 + \frac{1}{2}(\omega, I_G\omega) = \frac{m\ell^2}{2}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\dot\theta^2$

$L = T - \mathcal{U}$

Equilibri

$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = k\ell^2 2\sin\theta\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = \sin\varphi[mg\ell + 2k\ell^2(1 - \cos\varphi)] = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi$

$H_{\mathcal{U}}(0,0) = \text{Diag}[2k\ell^2, mg\ell] \in \text{Sym}^+ \Rightarrow (0,0)$ è stabile per L. D.

$A(0,0) = \text{Diag}\left[\frac{m\ell^2}{3}, m\ell^2\right]$

$0 = \det(H_{\mathcal{U}} - \omega^2 A) = \det\left(\text{Diag}\left[2k\ell^2 - \omega^2\frac{m\ell^2}{3}, mg\ell - \omega^2 m\ell^2\right]\right)$

$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{6k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\ell}$.

$$\frac{\partial W_z}{\partial z} = \pm\sqrt{2m(\tilde{p}_z - mgz)} \qquad W_z = \pm\int\sqrt{2m(\tilde{p}_z - mgz')}\,dz'$$

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = \pm\sqrt{2mR^2\tilde{p}_\theta} \qquad W_\theta = \pm\sqrt{2mR^2\tilde{p}_\theta}\;\theta$$

Tr. canonica:

$$p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial W_z}{\partial z} = \pm\sqrt{2m(\tilde{p}_z - mgz)}$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = \pm\sqrt{2mR^2\tilde{p}_\theta} = \text{costante.}$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_\theta} = -t \pm \frac{\partial W_\theta}{\partial \tilde{p}_\theta} = -t \pm \frac{\cancel{2}mR^2}{\cancel{2}\sqrt{2mR^2\tilde{p}_\theta}}\,\theta =$$

$$= -t \pm \sqrt{\frac{mR^2}{2\tilde{p}_\theta}}\,\theta \qquad \text{da cui}$$

$$\theta(t) = \pm\sqrt{\frac{2\tilde{p}_\theta}{mR^2}}\,(\tilde{\theta} + t) \qquad \text{(crescita lineare)}$$

$$\tilde{z} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_z} = -t \pm \frac{\partial W_z}{\partial \tilde{p}_z} = -t \pm \int\frac{2m\,dz'}{\sqrt{2m(\tilde{p}_z - mgz')}} =$$

$$= -t \pm \sqrt{2m}\int\frac{dz'}{\sqrt{\tilde{p}_z - mgz'}} = -t \pm \frac{\sqrt{2m}}{mg}\,2\sqrt{\tilde{p}_z - mgz}$$

$$(\tilde{z} + t)^2\left(\frac{g}{2}\sqrt{\frac{m}{2}}\right)^2 = \tilde{p}_z - mgz \qquad \text{da cui}$$

$$z(t) = \frac{\tilde{p}_z}{mg} - \frac{g}{8}(\tilde{z} + t)^2 \qquad \text{(moto uniformemente decelerato.)}$$

1

Primo compitino - Meccanica Razionale - mod. A - 26 novembre 1999

ATTENZIONE: Risolvere l'esercizio A su UN foglio, l'esercizio B su un altro foglio, DISTINTO dal precedente.

A. Una particella di massa unitaria è soggetta alla forza conservativa $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ di componenti, rispetto al riferimento ortonormale $Oxyz$,

$$F_x(x,y,z) = -x - x^2, \quad F_y(x,y,z) = -y, \quad F_z(x,y,z) = -z.$$

La particella è vincolata in modo liscio all'asse x. Determinare:

1) l'energia potenziale $U(x)$ del sistema vincolato e le posizioni di equilibrio;

2) introdurre una funzione di Liapunov per accertare la stabilità di uno dei punti di equilibrio.

3) tracciare le curve nel piano delle fasi $(x,\dot{x})$ corrispondenti ai valori $0, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$ dell'energia totale.

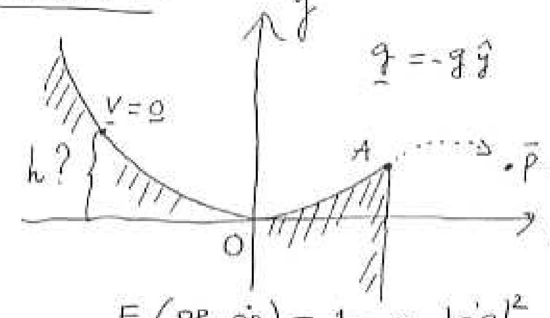
B. Si consideri un sistema meccanico composto da una particella di massa m soggetta alla forza di gravità $\underline{F}^g = -mg\,\hat{y}$, $g > 0$, dove $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ è un riferimento associato ad uno spazio inerziale. La particella è vincolata senza attrito sul piano $(O, \hat{x}, \hat{y})$, inoltre c'è un vincolo unilaterale liscio il cui bordo è la curva parabolica $y = \frac{x^2}{2\sqrt{3}}$, $x \in (-\infty, 1]$. La regione del piano consentita è per $(x,y) : y \geq \frac{x^2}{2\sqrt{3}}$, $x \in (-\infty, 1]$, e ogni punto del piano per $x > 1$.

1) Si determini a quale altezza $y = h$ si deve abbandonare la particella sul bordo parabolico (per $x < 0$) con velocità iniziale nulla, affinché raggiunga il punto

$$\bar{P} = (1 + \sqrt{3}, \frac{1}{2\sqrt{3}}).$$

2) Si scriva, eventualmente a meno del calcolo della primitiva di un integrale, la rappresentazione nel parametro d'arco s della curva parabolica: $s \mapsto (x(s), y(s))$ tale che $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

Esercizio B.



$\underline{g} = -g\hat{y}$ $\qquad y = \frac{x^2}{2\sqrt{3}}$

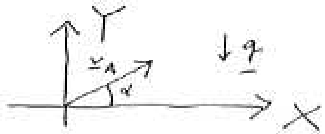
$\bar{P} = (1+\sqrt{3}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$

$A = (1, \frac{1}{2\sqrt{3}})$

$E(OP, \dot{OP}) = \frac{1}{2} m |\dot{OP}|^2 - m\underline{g} \cdot OP$

$\underbrace{mgh}_{\text{(energia nell'atto di moto iniziale)}} = \frac{1}{2} m |\underline{v}_A|^2 + mg \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$|\underline{v}_A|^2$?



$\downarrow \underline{g}$

$tg\,\alpha = y'(x)\Big|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \pi/6$

$\begin{cases} \sin \pi/6 = \frac{1}{2} \\ \cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \ddot{x} = 0 & x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = |\underline{v}_A| \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \ddot{y} = -g & y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = |\underline{v}_A| \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_A \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ y(t) = v_A \frac{1}{2} t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$ $\qquad y(x) = \cancel{v_A} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x}{\cancel{v_A}\sqrt{3}} - \frac{g}{\cancel{2}} \frac{\cancel{4}^{\,2} x^2}{v_A^2\, 3}$

$0 = y(x_{\bar{P}} - x_A) = y(\sqrt{3}) = 1 - \frac{2g}{v_A^2}$

$v_A^2 = 2g$, infine: $h = 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

La guida parabolica è data dal testo nella parametrizzazione : $x \longmapsto (x, \frac{x^2}{2\sqrt{3}}) = OP(x)$

Rettifichiamo la curva, determiniamo il parametro lunghezza d'arco con zero nell'origine:

$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(\lambda))^2}\, d\lambda = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{3}}\, d\lambda =$

$= \frac{1}{2} x \sqrt{1 + \frac{x^3}{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, \mathrm{ArcSinh}(\frac{x}{\sqrt{3}})$.

9

n. forze agenti sulla particella vincolata

$$f(x) = F_x(x,0,0) = -\frac{dU}{dx} = -x-x^2$$

energia potenziale

$$U(x) = -\int_0^x f(\xi)\,d\xi = -\int_0^x (-\xi-\xi^2)\,d\xi = \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

1) Posizioni di equilibrio : $f(x) = -(x+x^2) = 0 \quad x_1 = 0,\ x_2 = -1$

Studio $U(x)$: $\frac{dU}{dx} = 0$ per $x = x_1$, $x = x_2$

$\frac{d^2U}{dx^2}(x_1) = 1 > 0$ minimo locale, $U(x_1) = 0$

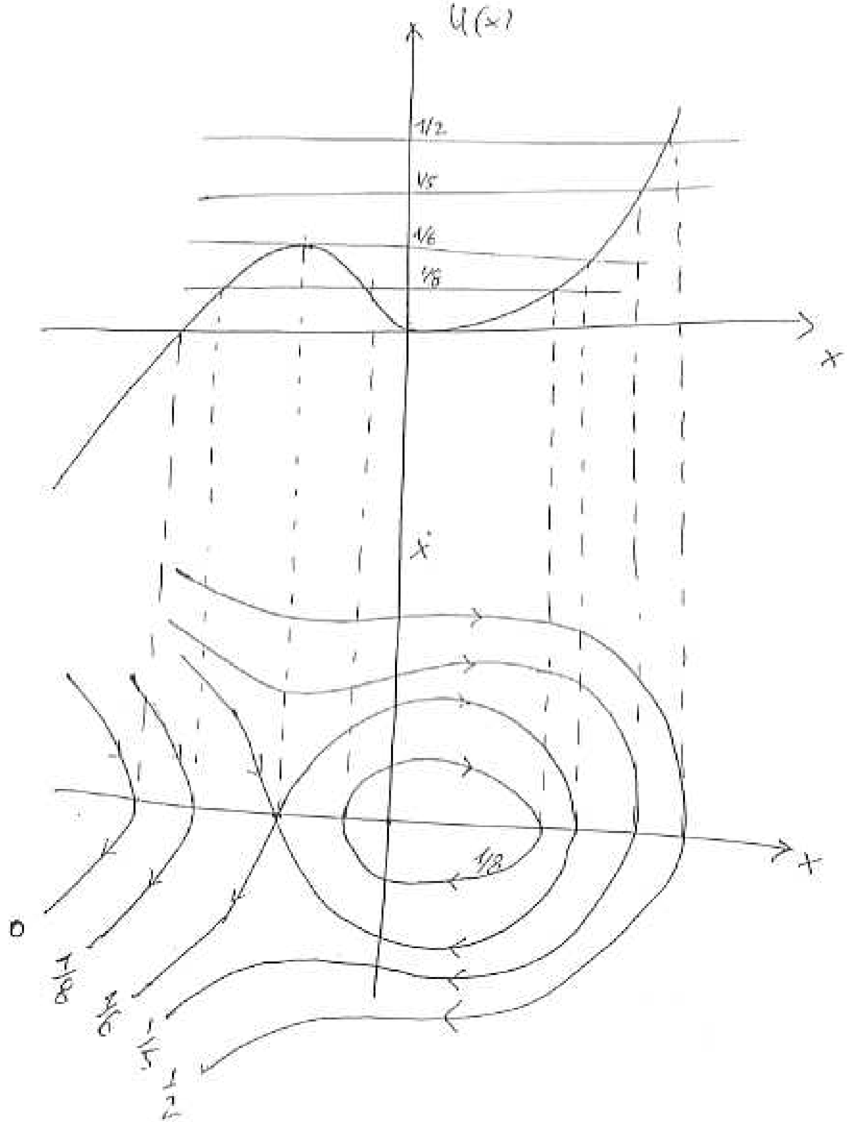
$\frac{d^2U}{dx^2}(x_2) = -1 < 0$ massimo locale , $U(x_2) = \frac{1}{6}$

2) Il sistema è soggetto alla forza $f(x)$, conservativa

$\mathcal{E}(x,\dot{x}) = T + U = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ è integrale primo.

$\mathcal{E}$ è funzione di Liapunov. Infatti, in $x^* = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

i) $\mathcal{E}(x^*) = \mathcal{E}(0,0) = 0$, ii) $\mathcal{E}(x,\dot{x}) > 0$ in $\Omega - x^*$ perché x_1 è minimo locale e iii) $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{L}_X \mathcal{E} = 0$ lungo i moti (sistema conservativo). Quindi x^* è equilibrio stabile.



Dall'analisi delle curve di fase si deduce che $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è equilibrio instabile

19

4

Mecc. Razionale -Matematici- Mod.A- Prova scritta del 19 febbraio 2001

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome, Nome, data, Mod. A.

Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del Mod. A in fogli distinti da eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. B

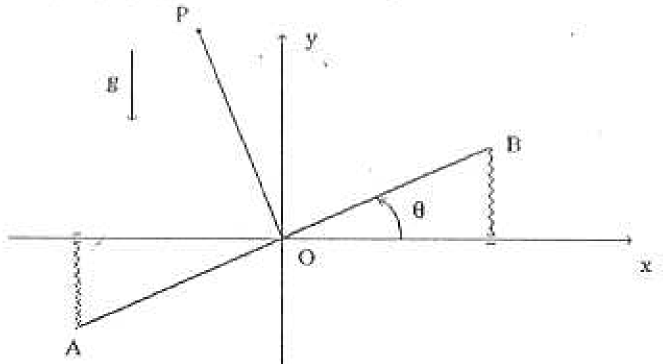
1. Nel piano Oxy, y verticale ascendente, g$=-g\hat{y}$, un'asta AB di lunghezza $2l$ e massa m è vincolata a ruotare senza attrito attorno al suo centro O incernierato nell'origine di Oxy. Un punto P di massa m è vincolato rigidamente all'asta mediante una sbarra lunga l e di massa trascurabile che forma con l'asta un angolo di $\pi/2$. oltre alla forza peso, il sistema è soggetto a due forze elastiche, molle di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $h > 0$ agenti sugli estremi A e B, e ad un momento N$=mgl\sin\theta\ \hat{z}$ agente sull'asta AB, dove θ, parametro Lagrangiano del sistema, è l'angolo orientato dal semi-asse positivo x al vettore OB.

Sia

$$\lambda = \frac{2mg}{hl} \in R^+.$$

Determinare gli equilibri e discuterne la stabilità al variare di λ nei reali positivi.

Abbozzare l'insieme degli equilibri, mettendo in evidenza il carattere stabile o instabile, nel piano (λ, θ) (diagramma di biforcazione).



2. Si consideri il sistema meccanico $m\ddot{q} = -k\dot{q}$, $k > 0$. Posto $x = (q, \dot{q}) \in R^2$, dimostrare o confutare che $x^* = (0, 0)$ sia un equilibrio asintoticamente stabile.

Mecc. Razionale -Matematici- Mod. B- Prova scritta del 19/2/ 2001

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome, Nome, data, Mod. B.

Per chi fa A+B: Risolvere gli esercizi del Mod. A in fogli distinti da eventuali fogli usati per la soluzione degli esercizi del mod. B

1. Si consideri il sistema costituito da due punti materiali P_1 e P_2 di egual massa $m > 0$, vincolati in modo liscio lungo l'asse x orizzontale, di coordinate x_1 e $x_2 > x_1$. Tra l'origine O e il punto P_1 e tra il punto P_1 e il punto P_2 sono tese due molle lineari di costante elastica $h = 1$ e di lunghezza a riposo $l_0 = 1$.

1) Scrivere la lagrangiana del sistema, determinare le configurazioni di equilibrio e la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

2) Scrivere la lagrangiana del sistema linearizzato attorno all'equilibrio stabile (x_1^*, x_2^*) trovato, riferita alle coordinate $q_i = x_i - x_i^*$, $i = 1, 2$ e la corrispondente hamiltoniana. Detta $\mathbf{q} = Sq$, ove S è matrice 2×2, la trasformazione lineare che muta le q nelle coordinate normali $\mathbf{q}$, determinare la trasformazione indotta da S nello spazio delle fasi, verificare che tale trasformazione è canonica e determinarne la valenza.

(Si ricorda che in generale $S = Q\Lambda R$, con R e Q matrici ortogonali e Λ matrice che trasforma la matrice cinetica, già diagonale, nella matrice identica).

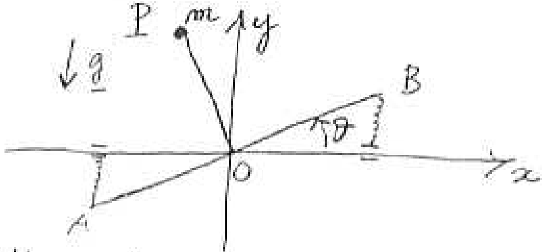
2. Una particella di massa unitaria è vincolata in modo liscio sulla superficie di rivoluzione attorno all'asse z verticale ascendente (g $= -g\hat{z}$), descritta da

$$x(r, \vartheta) = r\cos\vartheta,\ y(r, \vartheta) = r\sin\vartheta,\ z(r) = e^{-r^2}.$$

Determinare l'integrale generale del moto, a meno del calcolo di primitive di integrali, con il metodo di Hamilton–Jacobi.

(5)

1.



$\lambda := \dfrac{2mg}{h\ell} \in \mathbb{R}^+$

$$\delta L^{(\underline{N})} = \underline{N} \cdot d\vartheta\, \hat{z} = mg\ell \sin\vartheta\, d\vartheta = -d(mg\ell\cos\vartheta).$$

$$\mathcal{U}(\vartheta) = \underbrace{h\ell^2 \sin^2\vartheta}_{\text{due molle}} + \underbrace{mg\ell\cos\vartheta}_{\text{gravità per P}} + \underbrace{mg\ell\cos\vartheta}_{\mathcal{U}^{(\underline{N})}} =$$

$$= h\ell^2 \sin^2\vartheta + 2mg\ell\cos\vartheta = h\ell^2(\sin^2\vartheta + \lambda\cos\vartheta).$$

$$\mathcal{U}'(\vartheta) = h\ell^2(2\cos\vartheta - \lambda)\sin\vartheta$$

EQUILIBRI: $\sin\vartheta = 0$: $\vartheta = K\pi \quad K \in \mathbb{Z}$, data la struttura dell'en. pot. consideremo solo equilibri in un intervallo aperto che contiene $[-\pi, \pi]$. Dunque:

$\vartheta_1 = 0 \qquad \vartheta_2 = \pi \qquad \vartheta_3 = -\pi$

$2\cos\vartheta - \lambda = 0$: $\vartheta_4 = \arccos\dfrac{\lambda}{2} \qquad \vartheta_5 = -\arccos\dfrac{\lambda}{2}$

se $0 \leq \lambda \leq 2$.

STABILITA': $\mathcal{U}''(\vartheta) = h\ell^2[-2\sin^2\vartheta + (2\cos\vartheta - \lambda)\cos\vartheta] =$

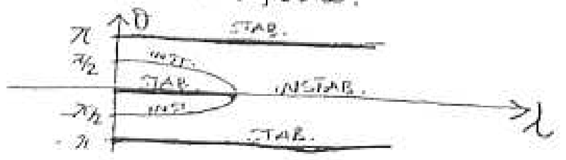
$= h\ell^2[-2 + 4\cos^2\vartheta - \lambda\cos\vartheta]$.

$\mathcal{U}''(0)\big|_{\vartheta=\pi,-\pi} = h\ell^2(2+\lambda) > 0$, sempre stabili.

$\mathcal{U}'(0) = h\ell^2(2-\lambda) > 0 \iff \lambda < 2$

$\mathcal{U}'(0)\big|_{\vartheta=\vartheta_4,\vartheta_5} = h\ell^2\left(-2 + \lambda^2 - \dfrac{\lambda^2}{2}\right) = h\ell^2\left(\dfrac{\lambda^2}{2} - 2\right) > 0 \iff \lambda > 2$, sempre inst.

$\begin{cases} \text{Per } \lambda = 2: \ \vartheta_1 = \vartheta_4 = \vartheta_5 = 0, \text{ la prima derivata non nulla è} \\ \mathcal{U}^{IV}(0) < 0 \ : \text{ instabile.} \end{cases}$



2. $m\ddot{q} = -K\dot{q} \qquad m\lambda^2 + K\lambda = 0 \qquad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -\dfrac{K}{m}$

$$q(t, c_1, c_2) = c_1 + c_2 e^{-\frac{K}{m}t}$$

$$\begin{cases} q(0, c_1, c_2) = c_1 + c_2 = q_0 \\ \dot{q}(0, c_1, c_2) = -\dfrac{K}{m} c_2 = \dot{q}_0 \end{cases}$$

$c_2 = -\dfrac{m}{K}\dot{q}_0 \qquad c_1 = q_0 + \dfrac{m}{K}\dot{q}_0$

$$\tilde{q}(t, q_0, \dot{q}_0) = q_0 + \frac{m}{K}\dot{q}_0 - \frac{m}{K}\dot{q}_0 e^{-\frac{K}{m}t} = q_0 + \frac{m}{K}\dot{q}_0\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right).$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{q}(t, q_0, \dot{q}_0) = \dot{q}_0 e^{-\frac{K}{m}t}.$$

Ora, senza utilizzare la soluzione generale esplicita qui sopra determinata, osserviamo che $\forall q^* \in \mathbb{R}$

$x^* := \begin{pmatrix} q^* \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ è equilibrio, non solamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che tali equilibri non sono attrattori e dunque non possono essere asint. stabili: prendiamo dati iniziali vicini arbitrariamente a $\begin{pmatrix} q^* \\ 0 \end{pmatrix}$, del tipo $\begin{pmatrix} q^* \\ \varepsilon \end{pmatrix}$, dunque:

$$\tilde{q}(t, q^*, \varepsilon) = q^* + \frac{m}{K}\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \underbrace{q^* + \frac{m}{K}\varepsilon}_{\neq q^* !!}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{q}(t, q^*, \varepsilon) = \varepsilon e^{-\frac{K}{m}t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

(Osservazione: si può invece mostrare che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – e così tutte le $\begin{pmatrix} q^* \\ 0 \end{pmatrix}$ – è semplicemente stabile: $\forall \varepsilon > 0$ fissiamo $\delta := \min\left(\dfrac{K\varepsilon}{2m}, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ allora, per $|q_0| < \delta$ e $|\dot{q}_0| < \delta$ si ha:

$|q(t)| = \left|q_0 + \dfrac{m}{K}\dot{q}_0\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right)\right| \leq |q_0| + \dfrac{m}{K}|\dot{q}_0| < \varepsilon$.

$|\dot{q}(t)| \leq |\dot{q}_0| < \varepsilon$.)

Modulo B. Correzione.

1) $L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}\left[(x_1-1)^2 + (x_2 - x_1 - 1)^2\right]$

<u>Equilibri</u>

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_1} = x_1 - 1 - (x_2 - x_1 - 1) = 2x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} = x_2 - x_1 - 1 = 0 \end{cases} \qquad H_U = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in Sym^+$$

L'unico equilibrio è $P^* = (1,2)$, stabile.

<u>Piccole oscillazioni.</u>

$$\det(H_U - \omega^2 A) = \det\begin{pmatrix} 2 - m\omega^2 & -1 \\ -1 & 1 - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{m}\left(3 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad \omega_2^2 = \frac{1}{m}\left(3 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

2) $$\bar{L} = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}(q_1, q_2)^T H_U \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \qquad q_i := x_i - x_i^*.$$

$$\bar{H} = T + U = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1, q_2)^T H_U \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

In generale, $\mathbb{q} = f(q)$ $f: Q \to Q$ induce

$Tf: TQ \to TQ$ $\quad Tf(q, v) = (f(q), Jf(q)v) = (\mathbb{q}, \mathbb{v})$

e da

$$\langle p, v \rangle = \langle \mathbb{P}, \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{P}, Jf\, v \rangle$$

$$\begin{cases} \mathbb{P} = (Jf)^{-t} p \\ \mathbb{q} = f(q) \end{cases}$$ è la tr. canonica indotta da f.

Nel nostro caso $\mathbb{q} = Sq$, $Jf = S$ matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P} \\ \mathbb{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{-t} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \in Sp(4)$$

e si vede, svolgendo il conto, che $J E J^t = E \Rightarrow c = 1$.

2) $$L = T - U = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4r^2 e^{-2r^2}\dot{r}^2) - g e^{-r^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\xi(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - g e^{-r^2} \qquad \xi(r) = (1 + 4r^2 e^{-2r^2})$$

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}, \dot{\theta}) A \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} - U(r) \qquad A = \begin{pmatrix} \xi(r) & \\ & r^2 \end{pmatrix}$$

$$H = T + U = \frac{1}{2}(p_r, p_\theta) A^{-1}\begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \end{pmatrix} + U(r) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{p_r^2}{\xi(r)} + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right] + U(r)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow S(r, \theta, \tilde{p}_\theta, E, t) = \tilde{p}_\theta \theta + W(r, \tilde{p}_\theta, E) - Et$$

Eq. di H-J.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(\partial W/\partial r)^2}{\xi(r)} + \frac{\tilde{p}_\theta^2}{r^2}\right] = E$$

$$W = \int_{r_0}^{r} \sqrt{\left(2E - \frac{\tilde{p}_\theta^2}{r^2}\right)\xi(r)}\, dr$$

Meccanica Razionale mod. B

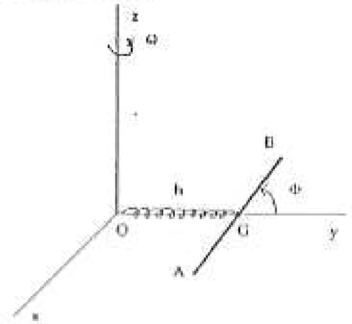
Corso di Laurea in Matematica- Secondo compitino, 9/06/2000

Attenzione: Consegnare due (soli) *distinti* fogli; un foglio, contrassegnato A-Cognome Nome, con la soluzione dell'esercizio A, un ulteriore foglio contrassegnato B-Cognome Nome, con la soluzione dell'esercizio B.

Esercizio A

Un sistema è costituito da un'asta rigida AB di lunghezza l e massa m, vincolata a muoversi con il baricentro sull'asse y e rimanendo nel piano yz di un riferimento $Oxyz$. Tra il punto O e il punto G è tesa una molla di costante elastica $h > 0$; inoltre il riferimento $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante $\omega > 0$ attorno all'asse z rispetto agli spazi inerziali. Si riferisca il sistema ai parametri lagrangiani $y = y_G$ e φ, angolo orientato, dalla direzione positiva dell'asse y ad AB.

Si scriva la Lagrangiana del sistema nel riferimento $Oxyz$ e si determini il moto del sistema a meno di quadrature con il metodo di Hamilton–Jacobi.



Esercizio B.

B-1. Si consideri il cubo C^*: $0 \le y_L \le 1$, $L = 1, 2, 3$, la cui densità in tale configurazione di riferimento sia

$$\mu^*(y) = 1 + y_1 y_2 y_3.$$

Determinare esplicitamente una deformazione $C^* \ni y \mapsto x(y) \in R^3$, tale che $\mu(y) = \hat{\mu}(x(y)) =$ costante.

B-2. Si consideri il moto

$$x_1 = (1+t)\cos\omega t \;\; y_1 + (1+t)\sin\omega t \;\; y_2,$$
$$x_2 = -\frac{1}{1+t}\sin\omega t \;\; y_1 + \frac{1}{1+t}\cos\omega t \;\; y_2,$$
$$x_3 = y_3.$$

Determinare esplicitamente:

il moto inverso,

la velocità Lagrangiana,

il gradiente di deformazione F e il suo determinante.

Quanto vale la divergenza della velocità spaziale?

21

$$L = T - U$$

$$T = \frac{m}{2} v_G^2 + \frac{1}{2}(\omega, I_G \omega) = \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\dot{\varphi}^2$$

$$U = U^{el} + U^{cf} + V^{cor}$$

$$U^{el} = \frac{h}{2}y^2 \qquad U^{cf} = -\frac{1}{2} I_z \omega^2 = -\frac{1}{2}\left(my^2 + \frac{m\ell^2}{12}\cos^2\varphi\right)\omega^2$$

Q^{cor}: $\quad \delta L^{cor} = F^{cor} \cdot \delta P = -2\int_A^B \rho(s)\, \underline{\omega} \wedge v^{(\alpha)}(s) \cdot v^{(\alpha)}(s)\, dt\, ds \equiv 0$

perché $\omega, v^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}$ sono complanari. Quindi $Q^{cor} \equiv 0$ e $V^{cor} \equiv 0$.

$$L = \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(my^2 + \frac{m\ell^2}{12}\cos^2\varphi\right)\omega^2 - \frac{h}{2}y^2$$

$$a = \mathrm{Diag}\left[m, \frac{m\ell^2}{12}\right] \qquad a^{-1} = \mathrm{Diag}\left[\frac{1}{m}, \frac{12}{m\ell^2}\right] \qquad \det a \neq 0$$

$$H = T + U = \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{6}{m\ell^2}p_\varphi^2 + \frac{h}{2}y^2 - \frac{1}{2}\left(my^2 + \frac{m\ell^2}{12}\cos^2\varphi\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2}(h - \omega^2 m)y^2 + \frac{6}{m\ell^2}p_\varphi^2 - \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\cos^2\varphi\,\omega^2$$

$$= H_y(y, p_y) + H_\varphi(\varphi, p_\varphi)$$

sistema autonomo separabile.

$$\frac{\partial H_y}{\partial p_y} = \frac{p_y}{4m} \neq 0 \text{ per } p_y \neq 0, \qquad \frac{\partial H_\varphi}{\partial p_\varphi} = \frac{3}{m\ell^2}p_\varphi \neq 0 \text{ per } p_\varphi \neq 0$$

Funzione generatrice:

$$S(y, \varphi, p_y, p_\varphi, t) = -(\tilde{p}_\varphi + \tilde{p}_y)t + W_y(y, \tilde{p}_y) + W_\varphi(\varphi, \tilde{p}_\varphi)$$

Eq. di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_y}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}(h - \omega^2 m)y^2 = \tilde{p}_y$$

$$\frac{6}{m\ell^2}\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\cos^2\varphi\,\omega^2 = \tilde{p}_\varphi$$

$$W_y(y, \tilde{p}_y) = \pm \int_{y_0}^{y} \sqrt{2m\left[\tilde{p}_y + \frac{1}{2}(\omega^2 m - h)\xi^2\right]}\, d\xi$$

$$W_\varphi(\varphi, \tilde{p}_\varphi) = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\frac{m\ell^2}{6}\left[\tilde{p}_\varphi + \frac{m\ell^2}{24}\omega^2\cos^2\xi\right]}\, d\xi$$

equazioni del moto (a meno di quadrature)

$$p_y = \frac{\partial W_y}{\partial y} \qquad p_\varphi = \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\tilde{y} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_y} = -t \pm \frac{\partial W_y}{\partial \tilde{p}_y}(y, \tilde{p}_y)$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_\varphi} = -t + \frac{\partial W_\varphi}{\partial \tilde{p}_\varphi}(\varphi, \tilde{p}_\varphi)$$

B_2: $F(t,y) = \dfrac{\partial x}{\partial y}(t,y) = \begin{pmatrix} (1+t)\cos\omega t & (1+t)\sin\omega t & 0 \\ -\frac{1}{1+t}\sin\omega t & \frac{1}{1+t}\cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det F \equiv 1 \Rightarrow \operatorname{div} \underline{v} = 0$

formalmente: $x = F(t)y$ cosicché il moto inverso è $\boxed{y = F^{-1}(t)x}$

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t}\cos\omega t & \frac{1}{1+t}\sin\omega t & 0 \\ -(1+t)\sin\omega t & (1+t)\cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(complementi algebrici)

$F^{-1} = \dfrac{A^T}{\det F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t}\cos\omega t & -(1+t)\sin\omega t & 0 \\ \frac{1}{1+t}\sin\omega t & (1+t)\cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

moto inverso:
$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{1+t}\cos\omega t\, x_1 - (1+t)\sin\omega t\, x_2 \\ y_2 = \frac{1}{1+t}\sin\omega t\, x_1 + (1+t)\cos\omega t\, x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$v(t,y) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}(t,y), \frac{\partial x_2}{\partial t}(t,y), \frac{\partial x_3}{\partial t}(t,y)\right) =$

$= \big(\cos\omega t\, y_1 - (1+t)\omega\sin\omega t\, y_1 + \sin\omega t\, y_2 + (1+t)\omega\cos\omega t\, y_2, \ldots$

... ecc. ... $\big)$

B_1:
$$\begin{cases} x_1 = \int_0^{y_1} \mu^*(\lambda, y_2, y_3)\,d\lambda = \int_0^{y_1} (1+\lambda y_2 y_3)\,d\lambda = y_1 + \frac{y_1^2}{2} y_2 y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$\det F =_{def} \dfrac{\partial x}{\partial y} = \mu^*(y)$

$\Rightarrow \boxed{\mu^*(y) = \det F(y)\,\mu(y)}$ EQU. DI CONTINUITÀ

$\Rightarrow \mu(y) \equiv 1$.