# NOTE PER IL CORSO DI MECCANICA ANALITICA

## Marco Favretti Dipartimento di Matematica

## 19 febbraio 2016

# Indice

1	Stud	dio del 1	ritratto di fase per sistemi autonomi	5
	1.1	Richia	umi sulle equazioni differenziali	5
	1.2	Sisten	ni autonomi	7
	1.3	Sisten	ni del secondo ordine	8
		1.3.1	Sistemi autonomi unidimensionali	9
		1.3.2	Analisi qualitativa delle orbite	10
		1.3.3	Legge oraria	12
		1.3.4	Oscillatore e repulsore armonico	14
2	Mot	o sotto	forze centrali	19
	2.1	L'equa	azione radiale	20
	2.2	_	enti di meccanica orbitale	27
3	Stal	oilità pe	er sistemi autonomi	33
		3.0.1	Teorema di Lyapunov	33
		3.0.2	Cenni sulla linearizzazione attorno ad un equilibrio nel piano	35
	3.1	Stabil	ità con il teorema spettrale di Lyapunov	38
		3.1.1	Applicazioni importanti	39
4	Dina	amica d	lei sistemi di punti materiali liberi	43
	4.1	Riferii	menti inerziali	43
		4.1.1	Forze conservative	45
		4.1.2	Teorema di conservazione dell'energia	47
	4.2	Cinem	natica dei sistemi rigidi	48
		4.2.1	Velocità angolare	49
		4.2.2	Velocità dei vettori non solidali	51
		423	Triedro di Frenet	51

		4.2.4	Moti Rigidi	54							
		4.2.5	Cinematica relativa	55							
	4.3	ica in un riferimento non inerziale	58								
		4.3.1	Forza di marea	59							
	4.4	Cinem	atica dei sistemi particellari	61							
	4.5		atica dei sistemi particellari rigidi	62							
	4.6	Dinam	ica dei sistemi particellari: le Equazioni Cardinali	65							
		4.6.1	Sistema della massa ridotta	66							
5	Siste	emi part	ticellari vincolati	69							
	5.1	Varieta	à vincolari	69							
		5.1.1	Spazio tangente	71							
		5.1.2	Vincoli olonomi, mobili, anolonomi	72							
		5.1.3	Moti dinamicamente possibili, vincoli olonomi ideali $\ .\ .\ .\ .$ .	73							
6	Mec	canica I	Lagrangiana	77							
	6.1	Equazi	ioni di Lagrange	77							
		6.1.1	Equilibrio e stabilità per sistemi lagrangiani	82							
		6.1.2	Lagrangiana ridotta di Routh	83							
		6.1.3	Teorema di Noether	85							
		6.1.4	Invarianza in forma delle equazioni di Lagrange	86							
	6.2	2 Equazioni di Hamel									
	6.3	Piccole	e oscillazioni	90							
	6.4	Princip	pio variazionale di Hamilton	92							
7	Dina	ımica d	el corpo rigido	95							
		7.0.1	Dal principio di D'Alembert alle equazioni Cardinali	95							
	7.1	L'equa	zione di Eulero	97							
		7.1.1	Equazioni di Hamel del corpo rigido	103							
8	Mec	canica I	Hamiltoniana	105							
		8.0.1	Principio variazionale di Hamilton-Helmholtz	107							
	8.1	Trasfo	rmazioni canoniche	108							
		8.1.1	Parentesi di Poisson	110							
		8.1.2	Parentesi di Poisson e trasformazioni canoniche univalenti	111							
		8.1.3	Condizione di Lie per la canonicità	112							
		8.1.4	Funzioni generatrici	114							
	8.2		zione di Hamilton-Jacobi	115							
		8.2.1	Il caso di Hamiltoniana indipendente dal tempo	116							
		8.2.2	Sistemi con variabli cicliche	118							
		8.2.3	Il caso di Hamiltoniana separabile	120							
9	Esen	npi clas	sici	121							
10	Eser	cizi		127							
			zi su sistemi 1-dimensionali, stabilità e metodo spettrale	127							
			Esercizio	127							
			Esercizio	127							
			Espreizio	130							

	10.1.4	Eggr	cizio																			130
		Eser																				131
	10.1.6		rcizio																			133
10.9																						
10.2	Eserciz				_		_															134
	10.2.1	Eser	cizio								 											134
	10.2.2	Eser	cizio								 											135
	10.2.3	Eser	cizio								 											137
	10.2.4	Eser	cizio								 											139
	10.2.5	Eser	cizio								 											142
	10.2.6	Eser	cizio								 											143
	10.2.7	Eser	cizio								 											144
	10.2.8	Eser	cizio								 											147
	10.2.9	Eser	cizio								 											149
	10.2.10	Eser	cizio								 											151
	10.2.11	Eser	cizio								 											153
	10.2.12	Eser	cizio								 											154
	10.2.13	Eser	cizio								 											156
	10.2.14	Eser	cizio								 											158
	10.2.15	Eser	cizio								 											159
	10.2.16	Eser	cizio								 											160
	10.2.17																					162
10.3	Eserciz																					163
	10.3.1																					163
	10.3.2																					164
	10.3.3																					164
	10.3.4					·	•	•	 ,	•	,		•	٠	-		٠	•	-	-		165

# 1 Studio del ritratto di fase per sistemi autonomi

## 1.1 Richiami sulle equazioni differenziali

L'obbiettivo della Fisica Matematica è la descrizione quantitativa oltre che qualitativa dei sistemi fisici. In questo corso ci occuperemo quasi esclusivamente di sistemi caratterizzati da un numero finito di variabili numeriche, che indichiamo con  $x \in \mathbb{R}^n$ . Il modello fondamentale per enunciare le leggi fisiche che reggono i sistemi a finite variabili è

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}(t) = f(x, \mu, t), \tag{1.1}$$

che si interpreta dicendo che la variazione  $\Delta x$  dello stato x (in un tempo  $\Delta t$ ) è l'effetto della causa  $f(x,\mu,t)$  funzione dello stato, di parametri specifici al sistema  $\mu \in \mathbb{R}^k$  e del tempo . La traduzione di (1.1) nel linguaggio specifico dell'analisi matematica (da qui il nome di Meccanica Analitica) è un'equazione differenziale ordinaria, che qui scriviamo direttamente sotto forma di Problema di Cauchy di dato iniziale  $x_0$ 

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = f(x, \mu, t), \qquad x(t_0) = x_0.$$
 (1.2)

Se f è indipendente dal tempo, il sistema si dice autonomo. Il risultato fondamentale della teoria delle e.d.o., che traduce in una proposizione matematica la nozione di determinismo fisico, è il Teorema di Esistenza e Unicità locale della soluzione per il Problema di Cauchy:

**Teorema 1.1.1** Se f(x,t) è continua e lipschitziana in x uniformemente in t, ovvero per ogni  $(x_0,t_0)$  esiste un intorno B di  $x_0$  e un intervallo I contenente  $t_0$  tale che

$$|f(b,t) - f(a,t)| \le k_B |b-a| \quad \forall a, b \in B, \quad \forall t \in I,$$

allora la soluzione  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ , almeno un in intorno di  $t_0$ , esiste unica.

Se f è di classe  $\mathcal{C}^1$  (differenziabile con continuità) allora è localmente lipschiziana. Cosa altrettanto importante, se f è di classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 0$ , rispetto a  $(x, \mu)$  lo stato  $x(t) = x(t, t_0, x_0, \mu)$  ad un t fissato, dipende con regolarità  $\mathcal{C}^k$  dal dato iniziale e dai parametri.

Una distinzione fondamentale è quella tra equazioni lineari (basta considerare il caso  $x \in \mathbb{R}$ )

$$\dot{x} = f(x) = ax + b, \quad x(0) = x_0,$$
 (1.3)

la cui soluzione

$$x(t, x_0) = (x_0 + \frac{b}{a})e^{at} - \frac{b}{a}$$
(1.4)

esiste per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , ed equazioni non lineari, ad esempio

$$\dot{x} = f(x) = ax^2, \quad x(0) = x_0,$$
 (1.5)

la cui soluzione

$$x(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - ax_0 t} \tag{1.6}$$

"esplode" in tempo finito, quando t raggiunge  $1/ax_0$  (se  $a > 0, x_0 > 0$ ).

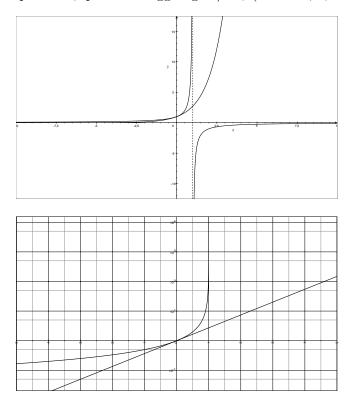


Figura 1.1: grafici lineare e logaritmico di (1.4) e (1.6),  $a = 1, b = 0, x_0 = 1$ 

Osservazione. Il fenomeno dell'esplosione in tempo finito chiarisce perchè la continuità della soluzione rispetto al dato iniziale valga solo a t fissato e non sia uniforme per ogni t.

Il comportamento di sistemi descritti da equazioni non lineari differisce profondamente quindi da quello dei sistemi lineari. Se ci limitiamo ad osservare la soluzione solo finchè rimane all'interno di un intorno sufficientemente piccolo di  $x_0$  nel quale possiamo trascurare il contributo dei termini non lineari nello sviluppo di Taylor di f attorno a  $x_0$ , il comportamento lineare è in un certo senso universale (si veda (1.4))

$$\frac{d}{dt}(x-x_0) = f(x,\mu) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \mathcal{O}((x-x_0)^3)$$
 (1.7)  

$$\dot{x} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Questa considerazione è alla base del metodo spettrale (studio degli autovalori della parte lineare  $f'(x_0)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ) per indagare la stabilità di un equilibrio, si veda più avanti.

## 1.2 Sistemi autonomi

I sistemi (1.2) con f, che si dice anche campo vettoriale, indipendente dal tempo (sistemi autonomi) sono quelli per cui si ha una rappresentazione geometrica più sviluppata delle soluzioni. Corrispondono alla descrizione di sistemi fisici nei quali le forze agenti sono indipendenti dal tempo. Nel seguito, ci limiteremo quasi esclusivamente a tali sistemi. Diciamo subito che tale restrizione non è drammatica, in quanto ogni sistema dipendente dal tempo si può rendere autonomo aggiungendo una dimensione e introducendo l'equazione banale  $\dot{t}=1$ . Volendo, si può anche nascondere la dipendenza da parametri aggiungendo altre k equazioni  $\dot{\mu}=0$ . In questo modo, la dipendenza continua dai dati iniziali diventa conseguenza della dipendenza continua dal dato iniziale.

Una caratteristica fondamentale dei sistemi autonomi è che le soluzioni sono invarianti per traslazioni temporali ovvero, i problemi di Cauchy a) e b) qui sotto

a) 
$$\dot{x} = f(x)$$
,  $x(0) = x_0$ , b)  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ 

hanno soluzioni rispettivamente  $x_a(t, x_0)$  e  $x_b(t, x_0)$  che differiscono solo per una traslazione dell'asse temporale, ovvero

$$x_b(t, x_0) = x_a(t - t_0, x_0).$$

La dimostrazione è immediata:

$$\dot{x}_b(t, x_0) = \dot{x}_a(t - t_0, x_0) = f(x_a(t - t_0, x_0)) = f(x_b(t, x_0)).$$

Se chiamiamo orbita per  $x_0$  l'immagine della soluzione  $x(\cdot, x_0)$  passante per  $x_0$ 

$$\mathcal{O}(x_0) = \{ x(t, x_0) : t \in Dom(x(\cdot, x_0)) \}$$

(si tratta dell'insieme degli stati assunti dal sistema durante la sua evoluzione), il risultato appena mostrato ci dice che la scelta dell'istante inziale  $t_0$  a cui associamo il sistema nello stato  $x_0$  non ha alcuna influenza: l'orbita percorsa è la stessa. Si capisce quindi che per i sistemi autonomi la vera descrizione del sistema si può dare in termini di orbite. L'insieme delle orbite è detto ritratto in fase della e.d.o. Si tratta di un sottoinsieme del dominio D(f) di f. Per il Teorema di esistenza e unicità visto sopra, due orbite relative a dati iniziali distinti non possono intersecarsi, pena la perdita di unicità, quindi un'orbita è univocamente determinata dal dato iniziale.

Per descrivere il moto lungo un'orbita o il passaggio da un'orbita all'altra si usa quindi una funzione di entrambi gli argomenti  $t, x_0$ , costruita dall'insieme delle soluzioni, detta flusso associato alla e.d.o. autonoma

$$(t, x_0) \mapsto \Phi(t, x_0) = x(t, x_0).$$

Si può pensare al flusso proprio come all'insieme delle traiettorie percorse dalle particelle di un fluido in moto nel dominio di f. Può darsi che il moto invada tutto il codominio di f o che sia ristretto a certi sottoinsiemi (sottovarietà) anche di dimensione minore di n.

Un sottoinsieme  $B \subset D(f)$  del dominio di f si dice invariante per il flusso se le particelle rimangono confinate in B

$$x_0 \in B \implies \Phi(t, x_0) \in B \quad \forall t.$$

Particolari insiemi invarianti sono quelli corrispondenti ad insiemi di livello di integrali primi del sistema autonomo, ovvero funzioni  $I:D\supset Dom(f)\to \mathcal{R}$  che sono costanti lungo le soluzioni

$$I(\Phi(t, x_0)) = I(x(t, x_0)) = I(x_0) \qquad \forall t$$

Indichiamo con  $\mathcal{L}_f$  la derivata di Lie di una funzione g rispetto al campo vettoriale f

$$\mathcal{L}_f(g)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i} f_i(x).$$

La condizione precedente implica allora (vale anche il viceversa a meno di questioni di connessione) che

$$\mathcal{L}_f(I)(x(t,x_0)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial I}{\partial x_i} f_i(x(t,x_0)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial I}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{d}{dt} (I \circ \Phi)(t,x_0)) \equiv 0. \quad (1.8)$$

**Esercizio**: scrivere le orbite e indicarne il verso di percorrenza nonchè stabilire la natura degli equilibri per i sistemi seguenti

$$\dot{x} = ax, \qquad \dot{x} = x^2, \qquad \dot{x} = x^2 - x^3.$$

## 1.3 Sistemi del secondo ordine

La legge di Newton ma = F, che è ovviamente alla base della Fisica Matematica, ha come equazione differenziale associata l'equazione del secondo ordine

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

(per un punto materiale di massa m la posizione descritta da n=3 variabili spaziali). Essa può essere ridotta ad un'equazione del primo ordine  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t)$  trasformandola in un sistema di dimensione 2n nelle variabili  $\mathbf{x} = (x,v)$  ponendo

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = m^{-1} f(x, v, t). \end{cases}$$

$$\tag{1.9}$$

Le soluzioni sono quindi curve  $t \mapsto (x(t), v(t))$  a valori nel cosidetto spazio delle fasi  $(x, v) \in \mathbb{R}^{2n}$  posizione-velocità e le loro immagini sono le orbite nello spazio delle fasi. Ogni orbita è specificata dall'assegnazione delle condizioni inziali  $(x_0, v_0)$ .

## Equilibri

Particolare importanza rivestono i sistemi autonomi, per i quali f = f(x, v) è indipendente dal tempo, e i loro punti critici, o equilibri, definiti come segue.

Definizione 1.3.1 (Equilibri dei sistemi meccanici) Gli equilibri sono i punti dello spazio delle fasi nei quali si annulla il secondo membro della (1.9). Essi sono dunque della forma

$$(\bar{x}, 0)$$
 ove  $f(\bar{x}, 0) = 0$ .

Le orbite che hanno dato iniziale in un equilibrio sono costituite dal solo equilibrio, ovvero, il sistema posto in un equilibrio con velocità nulla vi rimane indefinitamente nel futuro. La configurazioni  $\bar{x}$  di un equilibrio sono dette configurazioni di equilibrio.

#### 1.3.1 Sistemi autonomi unidimensionali

Ora vedremo che se il sistema è autonomo posizionale f = f(x) e unidimensionale n = 1, è possibile determinare esplicitamente la soluzione del moto a meno di calcolo di primitive di integrali e di inversione di funzioni (si dice che il problema è ridotto alle sole quadrature). In realtà, quasi tutte le caratteristiche della soluzione saranno illustrate dal ritratto in fase dell'equazione.

Introduciamo due funzioni definite sullo spazio delle fasi: l'energia cinetica del sistema

$$T(v) = \frac{m}{2}v^2$$

e l'energia potenziale

$$U(x) = -\int_{\xi}^{x} f(\xi)d\xi$$

(una diversa scelta di c modifica l'energia potenziale solo per l'aggiunta di una costante e quindi è fisicamente ininfluente). La loro somma è l'energia totale del sistema

$$E(x, v) = T + U = \frac{m}{2}v^2 - \int_{c}^{x} f(\xi)d\xi.$$

che risulta essere un integrale primo del sistema. Infatti

$$\mathcal{L}_{\mathbf{f}}(E)(\mathbf{x}) = \frac{\partial E}{\partial x}v + \frac{\partial E}{\partial v}m^{-1}f(x) = -f(x)v + (mv)m^{-1}f(x) \equiv 0. \tag{1.10}$$

Per quanto detto prima, le curve di livello dell'integrale primo dell'energia

$$\mathcal{E}(e) = E^{-1}(e) = \{(x, v) : E(x, v) = e\}, \qquad e = E(x_0, v_0), \tag{1.11}$$

sono degli insiemi invarianti per il flusso. Nel caso descritto in figura 4.2 sono le ellissi di equazione

$$T + U = \frac{v^2}{2} + \frac{x^2}{4} = e.$$

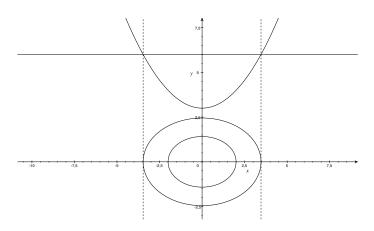


Figura 1.2: Curve di livello del potenziale  $U(x) = x^2/4$ 

## 1.3.2 Analisi qualitativa delle orbite

Per il teorema della funzione implicita, l'insieme di livello  $E^{-1}(e)$  della funzione energia è una sottovarietà di dimensione uno del piano  $\mathbb{R}^2$  in tutti i punti di  $E^{-1}(e)$  ove vale la condizione seguente sul rango del differenziale di E

$$rank \ dE(x, v) = max = 1$$

cioè

$$\nabla E(x,v) = \left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial v}\right)(x,v) = (-f(x), mv) \neq (0,0) \quad \forall (x,v) \in E^{-1}(e). \tag{1.12}$$

I punti ove la condizione sul rango (1.12) non è verificata sono detti punti critici. Essi corrispondono agli equilibri del sistema (vedi Definizione 1.3.1), ovvero a punti  $\mathbf{x} = (\bar{x}, 0)$  per i quali  $f(\bar{x}) = 0$ . Tali punti critici si trovano necessariamente sull'asse delle x. In un intorno di un punto critico quindi la curva di livello dell'energia non può essere diffeomorfa ad un intervallo di  $\mathbb{R}$ .

Al di fuori di essi le curve di livello di E coincidono con le orbite del sistema autonomo. Osserviamo infatti che anche l'orbita

$$\mathcal{O}(x_0, v_0) = \{ \mathbf{x}(t, x_0, v_0) : t \in Dom(\mathbf{x}(\cdot, x_0, v_0)) \}$$
(1.13)

è un sottovarietà di dimensione uno descritta dalla coordinata t. Inoltre, derivando rispetto al tempo l'integrale primo dell'energia

$$\frac{dE}{dt}(x(t), \dot{x}(t)) = -f(x(t))\dot{x}(t) + m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) = \dot{x}(t)(m\ddot{x}(t) - f(x(t))) \equiv 0$$

vediamo che, almeno in tutti i punti ove non ha derivata nulla,  $\dot{x}(t) \neq 0$ , una curva x(t) tale che  $(x(t), \dot{x}(t))$  stia sull'orbita è una soluzione della equazione differenziale del secondo ordine.

Cosa succede quando l'orbita incontra l'asse x, i.e.  $\dot{x}(\bar{t})=0$  per un certo  $\bar{t}>t_0$ ? Possono verificarsi due casi: l'orbita incontra l'asse delle x in un punto  $(\bar{x},0)$  che è: a) punto di equilibrio,  $f(\bar{x})=0$ , oppure b) punto  $(\bar{x},0)$  con  $f(\bar{x})\neq 0$ . Il caso a) non può avvenire in un intervallo di tempo finito dall'istante iniziale, ovvero con  $\bar{t}<+\infty$ . Infatti, i punti critici corrispondono agli equilibri del sistema; la particella posta in  $\bar{x}$  con velocità nulla vi resta indefinitamente poichè la curva  $t\mapsto \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)\equiv (\bar{x},0)$  è soluzione (detta moto di quiete) del sistema (1.9). Se fosse  $\bar{t}<+\infty$ , avremmo che in tale punto  $(\bar{x},0)$  dello spazio delle fasi si incontrano due soluzioni, quella che stiamo considerando e il moto di quiete in  $\bar{x}$ , in violazione del teorema di unicità. Ne segue che l'orbita può incontrare l'asse delle x in tempo finito solo in una configurazione ove  $f(\bar{x})\neq 0$ , in un punto non critico.

Come è fatta la sottovarietà unidimensionale in un punto non critico? Siccome  $\partial E/\partial v=mv\neq 0$  in un intorno del punto considerato, possiamo scrivere l'insieme di livello come grafico di una funzione v=v(x)

$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(e - U(x))}.$$
 (1.14)

La tangente alla curva si scrive

$$\frac{dv}{dx}(x) = \pm \frac{1}{m} \frac{f(x)}{\sqrt{\frac{2}{m}(e - U(x))}} = \frac{1}{m} \frac{f(x)}{v(x)}$$

Si vede quindi che , quando la curva si avvicina a  $\bar{x}$ , la sua tangente diventa verticale,  $dv/dx \to \pm \infty$  poichè il numeratore è non nullo per ipotesi mentre il denominatore si annulla in quanto se  $\dot{x}(t) \to 0$ ,  $U(x(t)) \to e$ . Sviluppando in serie di Taylor attorno

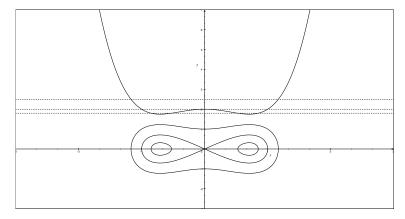


Figura 1.3: Curve di livello di  $U(x) = x^4 - x^2$ 

all'istante di arresto  $\bar{t}$ , con  $t_0 < \bar{t} < +\infty$  in un punto non critico, ove  $f(\bar{x}) \neq 0$ , vediamo che tali istanti di arresto sono punti di inversione della velocità e quindi del moto

$$x(t) = x(\bar{t}) + \frac{1}{2}x''(\bar{t})(|t - \bar{t}|)^2 + \mathcal{O}_3(t - \bar{t}),$$
  
$$\dot{x}(t) = m^{-1}f(x(\bar{t}))(t - \bar{t}) + \mathcal{O}_2(|t - \bar{t}|).$$

Riprendiamo l'analisi qualitativa delle curve di livello dell'energia. Esse si scrivono come grafico della funzione v=v(x) in (1.14) al di fuori dei punti critici. Si vede subito che tali curve sono simmetriche rispetto all'asse x. Inoltre, il verso di avanzamento della soluzione, determinato dal segno di  $\dot{x}$  nella (1.9)<sub>1</sub>, è verso destra nel sempiano superiore v>0 e verso sinistra nel semipiano inferiore. Infine, il valore in modulo della velocità è proporzionale alla differenza e-U(x). Questo permette di rendersi conto che sono possibili curve di livello chiuse o aperte. In una curva chiusa il moto è periodico.

## Un esempio

Illustriamo con un esempio le considerazioni sopra esposte. Il potenziale

$$U(x) = x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$$

vedi figura 1.3, ha tre configurazioni di equilibrio (punti ove f(x) = -U'(x) si annulla) corrispondenti a due minimi  $x = \pm \sqrt{2}/2$  e un massimo x = 0 dell'energia potenziale. Le orbite corrispondenti agli equilibri sono i punti di equilibrio stessi per i due minimi, e la curva a forma di otto disteso corrispondente al livello e = U(0) = 0 di energia, detta separatrice. Si vede che nell'equilibrio x = 0, massimo locale, le cuve di livello non sono diffeomorfe ad un intervallo di  $\mathbb{R}$  (formano una croce) e la tangente alle curve di livello non è verticale in tale punto. In tutti gli altri punti in

Diversamente, nei punti di equilibrio, ove f(x) = 0, la tangente alla curva ha tipicamente valore finito, si veda il grafico dell'esempio

cui la curva di livello incontra l'asse delle x la tangente è verticale. Inoltre, tutte le orbite sono chiuse, corrispondenti a moti periodici. Per valori di energia e < 0 il moto è confinato in una delle due buche di potenziale, per valori e > 0 il moto passa da una buca all'altra, per e = 0, il moto avviene sulla separatrice. Tali moti sono molto particolari, si può dimostrare che il tempo necessari per raggiungere l'equilibrio in un moto lungo la separatrice è *infinito*. Questo è coerente con il fatto che vale il teorema di esistenza e unicità per le soluzioni in un intorno dell'origine e quindi : a) o il punto si trova già nell'origine con velocità nulla e vi permane indefinitamente, oppure b) il punto si trova in un'altro punto dell'orbita separatrice e allora non può arrivare in un tempo finito nell'equilibrio.

## 1.3.3 Legge oraria

Partendo dalla (1.14) è possibile determinare esplicitamente, come detto prima, a meno di quadrature, la soluzione  $x(t, x_0, v_0)$ . Vediamo come. Sostituendo la soluzione nella (1.14), otteniamo un'equazione a variabili separabili

$$\dot{x}(t) = v(x(t))$$

Fino a che la curva non incontra l'asse x si ha (per esempio) v(x(t) > 0 e quindi possiamo scrivere

$$\frac{\dot{x}(t)}{v(x(t))} = 1$$

che integrata tra 0 e t porge

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{v(x(\tau))} d\tau = \int_0^t 1 d\tau = t.$$

Siccome in [0,t]  $\dot{x}(t) > 0$ , la soluzione x(t) è un diffeomorfismo e quindi possiamo cambiare la variabile di integrazione e considerare l'integrale tra  $x_0$  e x(t)

$$g(x(t)) = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{v(x)} = t$$
 (1.15)

Se la funzione integrale, o primitiva

$$F(\xi) = \int \frac{d\xi}{v(\xi)}, \qquad g(x) = F(x) - F(x_0), \tag{1.16}$$

è invertibile, possiamo arrivare ad esprimere la soluzione

$$x(t) = g^{-1}(t).$$

Esercizio Generalizzare il procedimento esposto al caso dell'equazione a variabili separabili

$$\dot{x} = f(x)g(t), \qquad g(t) > 0.$$

Usando la (1.15), ridimostriamo in termini analitici il fatto già messo in rilievo in precedenza che il tempo necessario per raggiungere un punto di inversione del moto  $(\bar{x},0)$  con  $f(\bar{x}) \neq 0$  è finito mentre quello per raggiungere un equilibrio (punto

critico),  $(\bar{x}, 0)$  con  $f(\bar{x}) = 0$  è infinito. Quando la soluzione  $(x(t), \dot{x}(t))$  si avvicina a  $(\bar{x}, 0)$ , per esempio dal semipiano positivo la funzione v(x)

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}(e - U(x))}$$

diventa infinitesima quindi l'integrale (1.15)

$$t = g(x(t)) = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{v(x)} = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(e - U(x))}}$$

è improprio. Sviluppando in serie di Taylor l'energia potenziale attorno a  $\bar{x}$ , e sapendo che  $U(\bar{x})=e$ , si ha

$$e - U(x) = f(\bar{x})(x - \bar{x}) - \frac{1}{2}U''(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \mathcal{O}_3(|x - \bar{x}|)$$

e quindi, se  $f(\bar{x}) \neq 0$ , l'integrale

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(e - U(x))}}$$

$$= \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\left[\frac{2}{m}(f(\bar{x})(x - \bar{x}) - \frac{1}{2}U''(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \mathcal{O}_3(|x - \bar{x}|))\right]^{\frac{1}{2}}}$$

è convergente, mentre diverge come 1/x nei punti di equilibrio (si veda l'esempio del pendolo più avanti).

## Relazione area-periodo

Le curve di livello dell'energia corrispondenti a curve chiuse del piano corrispondono a moti periodici. Per un fissato valore e dell'energia totale, siano  $x_1(e)$  e  $x_2(e)$  i due punti di inversione del moto periodico, nei quali la velocità è nulla. Si veda come esempio la figura 4.2. Sulla base di quanto appena mostrato, si ha facilmente la formula del periodo del moto (l'orbita è simmetrica rispetto all'asse x)

$$T = T(e) = 2 \int_{x_1(e)}^{x_2(e)} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(e - U(\xi))}}.$$

La formula trovata ha un'interessante interpretazione geometrica in termini dell'area racchiusa dalla curva di livello di energia e. Tala area vale evidentemente

$$A(e) = 2 \int_{x_1(e)}^{x_2(e)} v(\xi, e) d\xi = 2 \int_{x_1(e)}^{x_2(e)} \sqrt{\frac{2}{m} (e - U(\xi))} d\xi$$

La sua derivata rispetto al parametro e si calcola facilmente. Si ha quindi

$$\frac{dA}{de}(e) = 2\left[v(x_2(e), e)\frac{d}{de}x_2(e) - v(x_1(e), e)\frac{d}{de}x_1(e) + \int_{x_1(e)}^{x_2(e)} \frac{d}{de}v(\xi, e)d\xi\right]$$

e tenendo conto che la funzione integranda è nulla negli estremi di integrazione, si arriva alla relazione area-periodo

$$\frac{dA}{de}(e) = \frac{T(e)}{m}. (1.17)$$

## 1.3.4 Oscillatore e repulsore armonico

Questi due semplici sistemi autonomi rivestono una grande importanza perchè sono prototipi del comportamento di un sistema (anche non unidimensionale) nell'intorno di un equilibrio stabile (oscillatore armonico) e instabile (repulsore armonico). L'equazione del secondo ordine con m=1 si scrive

$$\ddot{x} = a\omega^2 x$$
,  $a = \pm 1$ ,  $\omega > 0$ .

Le curve di livello dell'energia

$$\frac{v^2}{2} - a\frac{\omega^2 x^2}{2} = e, \qquad (U(x) = -a\frac{\omega^2 x^2}{2})$$

sono delle *ellissi* per l'oscillatore armonico (a=-1) e delle *iperboli* per il repulsore armonico (a=1). Al di fuori dell'origine le curve di livello sono quindi tutte chiuse per l'oscillatore armonico, corrispondenti a moti periodici, e curve aperte per il repulsore. L'unico punto critico, ove si ha caduta di rango, è l'origine, che è punto di equilibrio del sistema ridotto al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = a\omega^2 x. \end{cases} \tag{1.18}$$

La funzione v(x) in (1.14) ha la forma

$$v(x) = \pm \sqrt{2e + a\omega^2 x^2} = \pm \omega \sqrt{\frac{2e}{\omega^2} + ax^2}$$

il che mostra che per il repulsore (a=1) vi sono anche le due orbite corrispondenti a e=0 costituite dalle rette

$$v(x) = \pm \omega x$$
.

Vediamo di determinare la legge oraria del moto a partire dall'integrale (1.16) che si scrive

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{v(\xi)} = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2e}{\omega^2} + a\xi^2}} = F(x) - F(x_0)$$

La primitiva si scrive in termini di funzioni elementari in entrambi i casi:

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2e}{\omega^2} + \xi^2}} = \operatorname{arcsinh}(\frac{\xi\omega}{\sqrt{2e}}) = F(\xi) \qquad a = -1$$

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2e}{\omega^2} - \xi^2}} = \arcsin(\frac{\xi\omega}{\sqrt{2e}}) = F(\xi) \qquad a = 1.$$

Come esercizio, calcoliamo il periodo dei moti periodici dell'oscillatore armonico usando la relazione periodo energia. Poichè le orbite sono ellissi di semiassi

$$\alpha = \sqrt{2e}, \quad \beta = \sqrt{\frac{2e}{\omega^2}}$$

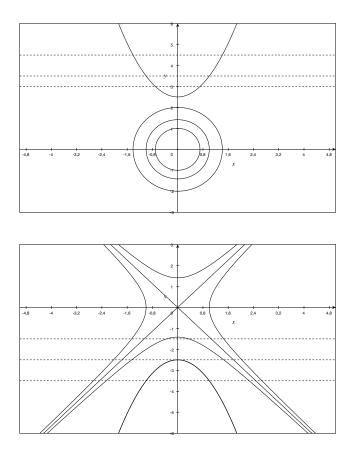


Figura 1.4: Curve di livello di oscillatore e repulsore

l'area racchiusa dall'orbita è data da

$$A(e) = \pi \alpha \beta = \pi \frac{2e}{\omega}$$

e il periodo vale (m = 1 nel nostro caso)

$$T(e) = m \frac{dA(e)}{de} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Osservazione. Lo studio fin qui condotto dei sistemi unidimensionali autonomi ha un forte valore didattico perchè illustra il ruolo determinante dell'integrale primo nella costruzione della soluzione esplicita del moto. Per sistemi in dimensione maggiore di uno , avremmo bisogno di ulteriori integrali primi, funzionalmente indipendenti per rappresentare l'orbita come intersezione di iper—superfici (varietà n-1 dimensionali). L'esistenza di tutti gli integrali primi necessari è una condizione che si verifica in pochissimi sistemi fisici in dimensione maggiore di uno, che per questo hanno assunto ruolo fondamentale per modellare altri sistemi. Vedremo nel prossimo capitolo il sistema celebre dei due corpi soggetti ad attrazione gravitazionale.

## Il pendolo

Inseriamo qui lo studio di un sistema classico della fisica matematica, il pendolo matematico. Consideriamo il moto di un punto materiale P di massa m vucolato

a muoversi sulla guida circolare liscia di raggio l posta nel piano verticale Oxz di un riferimento Oxyz inerziale. Il punto sia soggetto oltre alla reazione vincolare  $\Phi$ , alla gravità mg. Riferiamo il sistema alla coordinata lagrangiana  $\theta$ , angolo tra la direzione negativa dell'asse verticale z e il vettore OP. Scriviamo l'equazione di Newton  $ma = m\mathbf{g} + \phi$  e consideriamo solo la proiezione sul versore tangente  $\mathbf{t}$  alla guida. In tal modo possiamo eliminare dall'equazione del moto la reazione vincolare incognita, che per ipotesi agisce perpendicolarmente alla guida (vincolo liscio). Tale procedimento euristico verrà ampiamente giustificato in seguito, e condurrà a scrivere le equazioni di Lagrange. Si ha allora (si veda anche la (2.5) del Capitolo seguente)

$$ma \cdot \mathbf{t} = ml\ddot{\theta} = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{t} = -mg\sin\theta$$

da cui

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta = -\frac{dU}{d\theta}(\theta), \qquad U(\theta) = -\frac{g}{l}\cos\theta$$

Il grafico in Figura 1.5 dell'energia potenziale, periodica, mostra un minimo per  $\theta =$ 

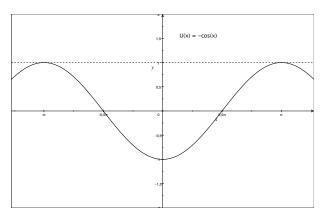


Figura 1.5: Energia potenziale per l, g = 1 e livello corrispondente alla separatrice

0 e un massimo per  $\theta=\pi$ . Le curve di livello in Figura 1.6, descritte dall'equazione

$$e = T + U = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{l}\cos\theta$$

sono orbite chiuse per  $e < U(\pi) = g/l$  (moti di librazione) e sono curve aperte per  $e > U(\pi) = g/l$  (moti di oscillazione). Per e = g/l abbiamo le curve separatrici, che, nell'intorno dell'equilibrio instabile  $(\pi,0)$  non sono delle varietà. Mostriamo che il tempo necessario per raggiungere l'equilibrio instabile lungo la separatrice è infinito. Per e = g/l corrispondente al moto lungo la separatrice abbiamo dalla (1.15)

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos \theta)}}$$

 $\mathbf{e}$ 

$$t_{\infty} = \lim_{\theta \to \pi^{-}} \int_{\theta_{0}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos \theta)}}.$$

Usando lo sviluppo di Taylor attorno a  $\pi$ 

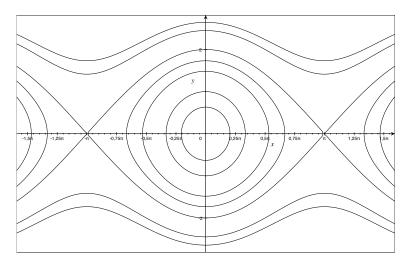


Figura 1.6: orbite del pendolo per l,g=1

$$\cos \theta = \cos \pi - \sin \pi (\theta - \pi) - \frac{1}{2} \cos \pi (\theta - \pi)^2 + \dots = -1 + \frac{1}{2} (\theta - \pi)^2 + \mathcal{O}_4(\theta - \pi)$$

abbiamo

$$t_{\infty} = \lim_{\theta \to \pi^{-}} \int_{\theta_{0}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{g}{l}((\theta - \pi)^{2} + \mathcal{O}_{4}(\theta - \pi))}} = \lim_{\theta \to \pi^{-}} \int_{\theta_{0}}^{\theta} \frac{\sqrt{l/g}}{|\theta - \pi|} \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{O}_{4}(\theta - \pi)}}$$

quindi

$$t_{\infty} = \lim_{\theta \to \pi^{-}} |\ln(\pi - \theta)| = +\infty.$$

Lo sviluppo in serie di Taylor è utile anche per calcolare la tangente alla separatrice nell'equilibrio instabile. Si ha infatti, derivando la (1.14)

$$\frac{dv}{d\theta}(\pi) = \lim_{\theta \to \pi^{-}} \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{-\sin\theta}{2\sqrt{(1+\cos\theta)}} = \lim_{\theta \to \pi^{-}} \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{\pi - \theta + \mathcal{O}_{3}(\theta - \pi)}{2\sqrt{(\theta - \pi)^{2}/2 + \mathcal{O}_{4}(\theta - \pi)}} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

## 2 Moto sotto forze centrali

In questo capitolo studiamo il problema del moto di un punto materiale P di massa  $\mu$  che si muove sotto l'azione di una forza posizionale diretta costantemente verso un centro di attrazione (o repulsione) fisso che supponiamo coincidere con l'origine O del sistema di riferimento inerziale Tali moti sono detti centrali e la condizione che li caratterizza è

$$OP(t) \wedge \ddot{OP}(t) \equiv 0 \quad \forall \ t.$$
 (2.1)

Per essi vale la seguente proposizione

**Proposizione 2.0.1** Un moto centrale è rettilineo oppure si svolge in un piano ortogonale al vettore momento angolare  $M = OP(0) \wedge \mu \dot{OP}(0) \neq 0$ .

Dimostrazione. In un moto soddisfacente a (2.1) si ha

$$\frac{d}{dt}M(t) = \dot{O}P \wedge \mu \dot{OP} + OP \wedge \mu \ddot{OP} = 0$$

Quindi M(t) = M(0). Se M(0) = 0, allora i vettori posizione, velocità e accelerazione sono paralleli e il moto è rettilineo. Se invece  $M(0) \neq 0$ , i vettori posizione e velocità appartengono ad un piano della giacitura individuata dal vettore M(0).  $\square$ 

Introduciamo allora una base ortonormale  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  fissa nel piano del moto, ed un'altra base ortonormale  $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$  nella quale il versore  $\mathbf{e}_r$  è costantemente diretto verso il punto P. Se indichiamo la posizione del punto P mediante coordinate polari piane  $(r, \theta)$  si hanno le relazioni di immediata verifica

$$(P - O)(t) = r(t)\mathbf{e}_r(t) = r(t)(\cos\theta(t)\mathbf{e}_1 + \sin\theta(t)\mathbf{e}_2)$$
 (2.2)

$$\dot{\mathbf{e}}_r(t) = \dot{\theta}(t)\mathbf{e}_{\theta}(t), \quad \dot{\mathbf{e}}_{\theta}(t) = -\dot{\theta}(t)\mathbf{e}_r(t). \tag{2.3}$$

da cui, derivando rispetto al tempo,

$$v_P = \frac{d}{dt}(P - O) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta =: v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta$$
(2.4)

$$a_P = \frac{d}{dt}v_P = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_{\theta} = a_r\mathbf{e}_r + a_{\theta}\mathbf{e}_{\theta}.$$
 (2.5)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Questa formulazione del problema descrive anche il moto di un sistema a due corpi soggetto solo a mutua attrazione gravitazionale: un pianeta P di massa  $m_P$  e un corpo massivo S di massa  $m_S$ . In tal caso  $\mu$  è la massa ridotta del sistema  $\mu = m_P m_S / (m_P + m_S)$  e l'origine del sistema è posta nel centro di massa del sistema, che si muove di moto rettilineo uniforme. Nell'ipotesi  $m_S \gg m_P$  la massa ridotta coincide con  $m_P$  e il centro di massa con il baricentro di S. Si veda Sect. 4.6.1

Le componenti  $v_r = \dot{r}$  e  $v_\theta = r\dot{\theta}$  sono dette rispettivamente componente radiale e trasversa della velocità. Indichiamo con  $\mathbf{f} = f(r)\mathbf{e}_r$  la forza agente sul punto e con  $\mu$  la massa. L'equazione del moto

$$\mu a_P = \mu \ddot{OP} = \mathbf{f}$$

sotto l'ipotesi (2.1) di forza centrale si riscrive

$$\mu a_r \mathbf{e}_r = \mu (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r = f(r) \mathbf{e}_r, \qquad \mu a_\theta \mathbf{e}_\theta = \mu (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta = 0. \tag{2.6}$$

La condizione  $a_{\theta} = 0$  ha un'utile interpretazione geometrica. Ove r(t) non si annulla, si ha

$$0 = ra_{\theta} = r(\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

che si esprime dicendo che la velocità areolare, ovvero l'area spazzata nel tempo dal vettore posizione di P,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = costante$$

è costante nel tempo. Sostituendo le (2.2) e (2.4) si vede che il modulo di M coincide con la velocità areolare per  $2\mu$ 

$$M(0) = r\mathbf{e}_r \wedge \mu(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = \mu r^2\dot{\theta}\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_\theta = \mu r^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z.$$

## 2.1 L'equazione radiale

La costanza della velocità areolare permette di disaccoppiare le equazioni differenziali (2.6) delle coordinate  $r \in \theta$ . Se infatti sostituiamo  $r\dot{\theta}^2 = c^2/r^3$  nella prima delle (2.6), abbiamo l'equazione che coinvolge la sola variabile radiale

$$\mu a_r = \mu (\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3}) = f(r)$$
 i.e.  $\mu \ddot{r} = f(r) + \frac{\mu c^2}{r^3}$ 

la cui soluzione r(t) porge, per integrazione diretta di  $c = r^2 \dot{\theta}$  l'angolo  $\theta(t)$ 

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \frac{c}{r^2(\tau)} d\tau. \tag{2.7}$$

Grazie quindi all'integrale primo del moto c che possiamo leggere come costanza della velocità areolare o del modulo del momento angolare, il problema si riduce allo studio dell'equazione radiale. Si vede subito che siamo di fronte ad un sistema autonomo unidimensionale, del tipo discusso nel paragrafo 1.3.1.

Introducendo l'energia potenziale efficace del sistema

$$U^{c}(r) = -\int (f(r) + \frac{c^{2}}{r^{3}})dr = V(r) + \frac{\mu c^{2}}{2r^{2}}$$

possiamo scrivere l'energia totale del sistema, dipendente dal valore di c come

$$E(r, \dot{r}) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U^c(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V(r) + \frac{\mu c^2}{2r^2} = e$$
 (2.8)

da cui

$$\dot{r}(r) = sgn(\dot{r}_0)\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(e - V(r) - \frac{\mu c^2}{2r^2}\right)}$$
 (2.9)

Per studiare qualitativamente le orbite abbiamo bisogno di specificare la forza. Un caso di evidente interesse è quello del punto soggetto ad attrazione gravitazionale, quindi

$$f(r) = -\frac{k}{r^2}, \qquad V(r) = -\int f(r)dr = -\frac{k}{r}.$$

ove  $k=Gm_Sm_P>0$  è una costante. Il potenziale efficace ha due termini

$$U^{c}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\mu c^{2}}{2r^{2}}, \qquad r > 0$$

ed è –vedi Figura 2.1– monotono crescente nel dominio per c=0, con limiti

$$\lim_{r \to 0^+} U^0(r) = -\infty, \qquad \lim_{r \to +\infty} U^0(r) = 0^-$$

mentre per  $c \neq 0$  ha un unico minimo in

$$\hat{r} = \frac{\mu c^2}{k} > 0, \quad U^c(\hat{r}) = -\frac{k^2}{2\mu c^2} < 0$$

e limiti

$$\lim_{r \to 0^+} U^c(r) = +\infty, \qquad \lim_{r \to +\infty} U^c(r) = 0^-.$$

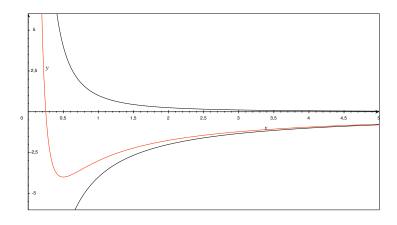


Figura 2.1: Potenziale gravitazionale ed efficace

#### Il caso c=0.

Esso descrive i moti di collisione. L'unico potenziale agente è quello gravitazionale. Dalla (2.7) si vede subito che il moto è rettilineo, come potevamo prevedere dalla Proposizione 2.0.1. Dalla (6.2) l'espressione della velocità è

$$\dot{r}(r) = sgn(\dot{r}_0)\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(e + \frac{k}{r}\right)}$$

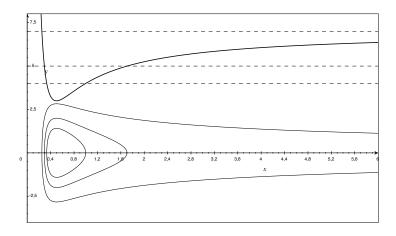


Figura 2.2: Curve di livello del potenziale efficace

Se la velocità iniziale è diretta verso l'origine (centro di attrazione), ovvero  $\dot{r}(0) < 0$  essa rimane sempre negativa; se la velocità iniziale è positiva, il moto ha un istante di arresto se l'energia totale (2.8) è negativa e < 0 mentre il corpo puntiforme si allontana indefinitamente ( $\dot{r}$  è sempre definita) se  $e \ge 0$ . In tal caso la velocità tende asintoticamente, per  $r \to +\infty$  a

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2e}{\mu}}.$$

Velocità di fuga E' il minimo valore della velocità iniziale che permette al corpo puntiforme di allontanarsi indefinitamente dal centro di attrazione. Per quanto detto, la condizione sull'energia del moto è  $e \geq 0$ ; introducendo le condizioni iniziali, scriviamo  $e = \frac{\mu}{2}\dot{r}_0^2 - \frac{k}{r_0}$  da cui

$$v_f^2 = \dot{r}_0^2 \ge \frac{2k}{\mu r_0}$$

Nel caso di un corpo che si stacca dalla superficie terrestre  $r_0=R$ , avendo posto  $k=Gm_Sm_P$  e  $g=Gm_SR^{-2}$  si ha  $v_f\geq \sqrt{2gR}$ .

## Il caso $c \neq 0$ .

In esso agiscono i due potenziali, gravitazionale e centrifugo. La conservazione del momento angolare  $M \neq 0$  impedisce che vi siano moti rettilinei. Dallo studio del potenziale efficace, si vede –vedi Figura 2.2– che le orbite sono chiuse se e < 0 e sono aperte se  $e \geq 0$ . Nel caso particolare in cui  $e = U^c(\hat{r})$ , l'orbita degenera in un punto e quindi la traiettoria è circolare,  $r(t) \equiv \hat{r}$ . Dalla relazione (2.7) si ricava subito che essa viene percorsa con velocità angolare costante, quindi il moto è circolare uniforme. Vedremo poi che traiettorie sono ellissi se  $U^c(\hat{r}) < e < 0$ , parabole se e = 0 e iperboli se e > 0.

La determinazione della legge oraria r(t) del moto richiede il calcolo della primitiva dell'integrale

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(e-U^c(r))}} = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(e+\frac{k}{r}-\frac{\mu c^2}{2r^2})}}$$

che non ha soluzione in termini di funzioni elementari. Un problema di minore difficoltà rispetto alla determinazione della legge oraria riguarda il calcolo della forma della traiettoria, per la quale è sufficente conoscere la funzione  $r=r(\theta)$ . Useremo ancora la relazione (2.7). Essa afferma che  $\dot{\theta}>0$  e quindi  $t\mapsto\theta(t)$  è invertibile. Scrivendo  $r(\theta)=r(t(\theta))$  e usando anche la relazione valida lungo il moto  $c=r^2\dot{\theta}$ 

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \dot{r}(\frac{d\theta}{dt})^{-1} = \dot{r}\frac{r^2}{c} = \frac{r^2}{c}\sqrt{\frac{2}{\mu}(e - U^c(r(\theta)))}.$$

Questa equazione è a variabili separabili, e procedendo come sempre fatto finora, otteniamo la forma della traiettoria a meno di inversione di funzioni

$$\theta - \theta_0 = \int_{r(\theta_0)}^{r(\theta)} \frac{cdr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (e - U^c(r))}} = \int_{r(\theta_0)}^{r(\theta)} \frac{cdr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (e + \frac{k}{r} - \frac{\mu c^2}{2r^2})}}$$

che possiamo riscrivere in termini dell'integrale indefinito come

$$\theta - \theta_* = \int \frac{cdr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(e + \frac{k}{r} - \frac{\mu c^2}{2r^2}\right)}}$$

ove  $\theta_* = \theta_0 + cost$ . Si noti che la costante di integrazione  $\theta_*$ , definita in base alla condizioni iniziali nella variabili scelte, non rappresenta necessariamente l'angolo al tempo iniziale e, in ogni caso, non è rilevante per la determinazione della forma dell'orbita. Infine, con il cambio di variabile

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}, \quad du = -\frac{1}{r^2}dr$$

ci riduciamo al calcolo di

$$\theta - \theta_* = -\int \frac{cdu}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(e + ku - \frac{\mu c^2}{2}u^2)}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{\mu c^2}e + \frac{2k}{\mu c^2}u - u^2}}.$$
 (2.10)

L'integrale ammette una primitiva della forma seguente

$$\int \frac{du}{\sqrt{A+Bu+Cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{-C}}\arccos(\frac{-B-2Cu}{\sqrt{B^2-4AC}}).$$

Nel nostro caso,

$$A = \frac{2}{\mu c^2}e$$
,  $B = \frac{2k}{\mu c^2}$ ,  $C = -1$ ,  $B^2 - 4AC = \frac{4k^2}{\mu^2 c^4}(1 + \frac{2\mu c^2}{k^2}e)$ 

e quindi

$$B^2 - 4AC > 0$$
 se  $e > -\frac{k^2}{2\mu c^2} = U^c(\hat{r}).$ 

Sostituendo in (2.10) ed effettuando l'inversione e la sostituzione u=1/r, otteniamo l'espressione

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{k}{\mu c^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2\mu c^2}{k^2}} e^{\cos(\theta - \theta_*)} \right)$$
 (2.11)

che rappresenta l'equazione di una conica in coordinate polari

$$r(\theta) = \frac{p}{[1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_*)]}$$
 (2.12)

ove p è il parametro della conica e  $\varepsilon$  è l'eccentricità

$$p = \frac{\mu c^2}{k}$$
  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mu c^2}{k^2}e} = \sqrt{1 + \frac{2p}{k}e} \ge 0$  (2.13)

Quindi l'eccentricità  $\varepsilon$  i.e. l'energia determina il tipo di conica, mentre il parametro p i.e. il momento angolare c determina la dimensione dell'orbita. Possono presentarsi i casi seguenti

Eccentricità	Energia	orbita
$\varepsilon > 1$	e > 0	iperbole
$\varepsilon = 1$	e = 0	parabola
$\varepsilon < 1$	e < 0	ellisse
$\varepsilon = 0$	$e = -\frac{k}{2p} = U^c(\hat{r})$	circonferenza

Tabella 2.1: forma dell'orbita in funzione dell'energia.

Supponiamo per semplicità  $\theta_* = 0$  nella (2.11). La componente trasversa della velocità vale  $v_{\theta} = r\dot{\theta} = c/r$  quindi dalla (2.12)

$$v_{\theta} = \frac{c}{p}(1 + \varepsilon \cos \theta) \tag{2.14}$$

la componente radiale si trova derivando rispetto al tempo la (2.12) e sostituendo  $\dot{\theta}=c/r^2$ 

$$v_r = \dot{r} = \frac{p}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \varepsilon \sin \theta \dot{\theta} = \frac{c\varepsilon}{p} \sin \theta.$$
 (2.15)

Infine, l'angolo tra la velocità e il versore trasverso  $\mathbf{e}_{\theta}$ 

$$\gamma = \arctan \frac{v_r}{v_\theta} = \arctan \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)$$

è detto angolo di volo.

## Leggi di Keplero

Non è difficile a questo punto ritrovare le leggi pubblicate nel 1610 da Keplero, che descrivono il moto dei pianeti attorno al sole

- 1 le traiettorie sono ellissi e il Sole occupa uno dei fuochi
- 2 la velocità areolare è costante

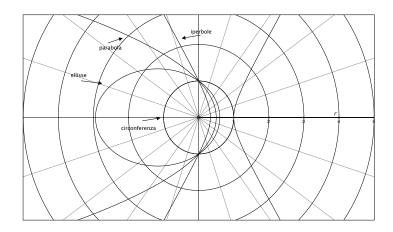


Figura 2.3: Coniche omofocali al variare dell'eccentricità

3 il quadrato del periodo di rivoluzione dei pianeti è proporzionale al cubo dell'asse maggiore della traiettoria ellittica.

Si noti che la seconda legge è in realtà una proprietà di ogni moto centrale, anche non soggetto all'attrazione Newtoniana. Vediamo la terza legge: sapendo che la velocità areolare è costante, scriviamo, per un ellisse,

$$A = \pi ab = \dot{A}T = \frac{c}{2}T$$

In un'ellisse l'asse minore b è legato all'asse maggiore e all'eccentricità dalla formula

$$b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}=a\sqrt{-\frac{2\mu c^2}{k^2}e}, \qquad (e<0),$$

ove l'eccentricità  $\varepsilon$  è data in (2.13).

Si può mostrare che l'asse maggiore a dipende dalla sola energia. Infatti, le due distanze apsidali  $r_1$  e  $r_2$  dell'orbita, che verificano la relazione

$$r_1 + r_2 = 2a$$

sono i soli punti in cui la velocità radiale si annulla, e quindi l'energia e è pari all'energia potenziale,  $e = U^c(r_1) = U^c(r_2)$ . Ne segue che le distanze apsidali sono le radici dell'equazione di secondo grado in u = 1/r

$$e - U^{c}(r) = e + \frac{k}{r} - \frac{\mu c^{2}}{2r^{2}} = 0$$

che riscriviamo moltiplicando per  $r^2$  e dividendo per e come

$$r^2 + \frac{k}{e}r - \frac{\mu c^2}{2e} = 0.$$

Il coefficente del termine lineare è pari alla somma delle due radici dell'equazione  $(x^2 - Sx - P = 0)$  e quindi

$$S = r_1 + r_2 = 2a = -\frac{k}{e}. (2.16)$$

Infine, sostituendo

$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{-\frac{2\mu c^2}{k^2}}e = \pi a^2 \sqrt{\frac{\mu c^2}{ka}} = \frac{c}{2}T$$

da cui avendo posto  $k = Gm_Sm_P$  e  $\mu \approx m_P$  si ha  $\mu/k = 1/Gm_S$  e

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{GM_S}. (2.17)$$

## Sulla terza legge di Keplero

In questo paragrafo presentiamo una dimostrazione della terza legge di Keplero che mette in luce il fatto che tale legge è conseguenza della forma della forza gravitazionale, dipendente dall'inverso del quadrato della distanza, e non da proprietà geometriche dell'orbita ellittica, come potrebbe sembrare dalla dimostrazione fatta in precedenza. In tutta generalità consideriamo la legge di Newton per il moto del punto soggetto a forza posizionale conservativa (per semplicità di notazione qui scriviamo  $OP = x \in \mathbb{R}^3$ )

$$m\ddot{x} = \mathbf{f}(x).$$

Consideriamo un cambio di scala nelle lunghezze e nei tempi misurati nel nostro sistema di riferimento (per esempio da metri a kilometri e da secondi a minuti) che possiamo scrivere come

$$\rho = \alpha x, \qquad \tau = \beta t, \quad \alpha, \beta > 0.$$

La legge oraria x = x(t) rispetto alle nuove unità di misura si scrive ovviamente

$$\rho = \rho(\tau) = \alpha x(\frac{\tau}{\beta}).$$

Questa uguaglianza determina la legge di trasformazione di tutte le quantità derivate, per esempio velocità e accelerazione

$$\frac{d\rho}{d\tau}(\tau) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{dx}{dt}(\frac{\tau}{\beta}), \qquad \frac{d^2\rho}{d^2\tau}(\tau) = \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{d^2x}{dt^2}(\frac{\tau}{\beta}).$$

Supponiamo ora che la forza derivi da un potenziale che è una funzione positivamente omogenea di grado  $k \in \mathbb{N}$ , ovvero

$$U(\lambda x) = \lambda^k U(x).$$

L'energia potenziale è una funzione della posizione e non cambia se rappresentiamo la stessa posizione in due scale diverse. Dobbiamo quindi porre

$$\mathcal{U}(\rho) = \mathcal{U}(\rho(x)) = U(\alpha x).$$

Prendendo i gradienti

$$\nabla_x \ \mathcal{U}(\rho(x)) = (\frac{\partial \rho}{\partial x})^T \nabla_\rho \ \mathcal{U} = \alpha \nabla_\rho \ \mathcal{U} \equiv \nabla_x \ U(\alpha x) = \alpha^k \nabla_x \ U(x)$$

e quindi la relazione tra la forza espressa nelle due scale è

$$\mathcal{F}(\rho(x)) = -\nabla_{\rho} \mathcal{U} = \alpha^{k-1} \nabla_{x} U(x) = \alpha^{k-1} F(x).$$

Ne segue che se  $\rho(\tau)$  soddisfa la legge di Newton

$$m\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = \mathcal{F}(\rho)$$

allora per le relazioni sopra scritte, si ha

$$m\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{d^2x}{dt^2}(\tau/\beta) = \alpha^{k-1}F(x(\tau/\beta))$$

e quindi se scegliamo  $\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$ ,

$$x(t) = \alpha^{-1}\rho(\beta t) = \alpha^{-1}\rho(\alpha^{1-\frac{k}{2}}t)$$

è ancora una soluzione dell'equazione  $m\ddot{x} = \mathbf{f}$ . In pratica, data una traiettoria del moto x(t) se dilatiamo le lunghezze secondo il rapporto  $l' = \alpha l$ , troviamo un'altra traiettoria del moto che però deve essere riferita alla variabile temporale  $t' = \beta t$ . Si noti che la trasformazione manda orbite periodiche (curve chiuse) in orbite periodiche e che il rapporto tra i periodi è proprio  $\beta$ .

Applichiamo quanto trovato al caso delle orbite kepleriane chiuse, generate dal potenziale gravitazionale  $U(x) \sim 1/|x|$ , che quindi è funzione positivamente omogenea di grado k=-1. Poichè due orbite sono soluzioni della stessa equazione di Newton, ne segue che il rapporto tra due lunghezze (per esempio dei semiassi maggiori, ma non solo!) e tra i due periodi è

$$\frac{T'}{T} = \beta = \alpha^{1 - \frac{k}{2}} = \alpha^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

## 2.2 Elementi di meccanica orbitale

Orbite chiuse. Consideriamo dapprima le orbite chiuse (circonferenza ed ellisse) corrispondenti ad energia negativa  $-k/2p \le e < 0$  ed eccentricità  $0 < \varepsilon < 1$ . Ruotando uno degli assi del riferimento possiamo supporre nella (2.12)  $\theta_* = 0$ , pertanto l'equazione dell'orbita ellittica diventa

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

I raggi

$$r(0) = \frac{p}{1+\varepsilon}, \qquad r(\pi) = \frac{p}{1-\varepsilon}$$
 (2.18)

sono detti rispettivamente pericentro e apocentro e rappresentano i punti di minima e massima distanza dal centro di forza, posto nell'origine del riferimento. Il semiasse maggiore dell'ellisse a come già visto e il minore b sono dati da

$$a = \frac{r(0) + r(\pi)}{2} = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Il caso di orbita circolare si ha per  $\varepsilon = 0$ , e il raggio è  $\hat{r} = p = \mu c^2/k$ .

**Orbite aperte**. L'orbita parabolica corrisponde ad energia nulla e=0 ovvero  $\varepsilon=1$ . La distanza di massimo avvicinamento (pericentro) vale r(0)=p/2, la velocità asintotica per  $t\to\pm\infty$  è nulla.

L'orbita è una iperbole per energie positive i.e. eccentricità  $\varepsilon > 1$ . Il pericentro è a distanza  $r(0) = p/1 + \varepsilon$ , e l'orbita è asintotica per  $t \to \pm \infty$  alle rette formanti con la direzione positiva dell'asse x un angolo  $\pm \theta_{\infty}$  definito dalla condizione

$$1 + \varepsilon \cos \theta_{\infty} = 0$$
  $\theta_{\infty} = \pm \arccos(-\frac{1}{\varepsilon}), \quad \pi > \theta_{\infty} > \pi/2$ 

la velocità asintotica per  $t \to \pm \infty$  è  $v_{\pm \infty} = \sqrt{2e/\mu}$ . La velocità  $v_{\infty}$  ruota di un angolo pari all'angolo tra le due rette asintoto, quindi l'angolo tra  $v_{-\infty}$  e  $v_{+\infty}$  è  $\delta = \pi - 2\theta_{\infty}$  o anche  $\delta = 2\arcsin(1/\varepsilon)$ .

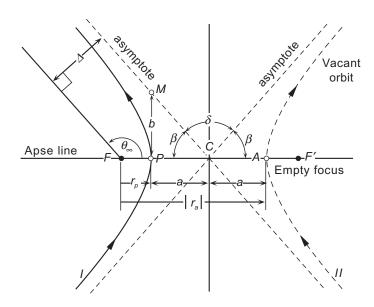


Figura 2.4: orbita iperbolica

## Esempi e applicazioni.

1. Calcolare il raggio di un'orbita circolare geostazionaria (ovvero avente periodo T=24 ore). Il raggio  $\hat{r}=p=a$  si calcola dalla (2.17) ovvero

$$a = \left(\frac{T^2 G M_T}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ove  $M_T$  è la massa della terra. Il risultato vale  $\hat{r}=42172 \mathrm{km}$  ovvero 35792 km di altezza dalla terra ( $R_T=6380 \mathrm{\ km}$ ). La velocità  $v=\omega \hat{r}$  è pari a 3,07 km/sec.

2. La cometa di Halley segue un'orbita ellittica di cui il sole occupa uno dei fuochi avente eccentricità  $\varepsilon=0.967$  e periodo T=76 anni. Sapendo il valore della costante  $GM_S$  si chiede di trovare la minima distanza dal sole (perielio)  $r_a=r(0)$  e massima distanza dal sole (afelio)  $r_p=r(\pi)$  e la velocità al perielio.

Dalle (2.18) conosciamo il rapporto tra perielio e afelio in termini della sola eccentricità

$$\frac{r_p}{r_a} = \frac{r(0)}{r(\pi)} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

mentre dalla terza legge di Keplero (2.17) conosciamo la loro semisomma

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \left(\frac{T^2 G M_S}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Mettendo a sistema le due equazioni si ricava facilmente  $r_p = 8,85 \cdot 10^7$  km e  $r_a = 5,28 \cdot 10^9$  km. Al perielio (e anche all'afelio) la velocità  $v = \dot{r} + r\dot{\theta}$  ha componente radiale nulla  $\dot{r} = 0$  per cui  $v = r\dot{\theta} = c/r$ . Dalla  $(2.13)_1$  e dalla (2.18) otteniamo

$$v_p = \frac{c}{r_p} = \frac{\sqrt{p_{\mu}^k}}{r_p} = \frac{\sqrt{pGM_S}}{r_p} = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)GM_S}{r_p}}$$

e quindi  $v_p = 54, 3 \text{ km/sec.}$ 

#### Trasferimento alla Hohmann

Si tratta di una tecnica ideata dall'ingegnere tedesco Walter Hohmann nel 1925 (ed ancora oggi in uso) per trasferire un satellite artificiale da un'orbita ad un altra caratterizzata da diversa eccentricità ma uguale parametro p (vedi (2.13)). La variazione dei parametri dell'orbita si ottiene somministrando un opportuno impulso  $\Delta J = j \mathbf{e}_r \Delta t$  in direzione radiale quando il satellite si trova al perigeo, quindi la sua velocità è ortogonale al raggio vettore. In queste ipotesi, il momento della forza impulsiva j  $M_J = r\mathbf{e}_r \times j\mathbf{e}_r = 0$  è nullo, quindi il momento angolare si conserva e così pure il parametro p della orbita ellittica (vedi (2.13)<sub>1</sub>), mentre l'energia cinetica del moto varia. Vale infatti

$$\mu(v_f - v_i) = \Delta J, \qquad v_f = v_i + \frac{\Delta J}{\mu}, \quad v_i \perp \Delta J, \qquad e_f = e_i + \frac{(\Delta J)^2}{2\mu}$$

La variazione di energia provoca un variazione di eccentricità (vedi  $(2.13)_2$ )

$$\varepsilon_f^2 = 1 + \frac{2p}{k}e_f = 1 + \frac{2p}{k}(e_i + \frac{(\Delta J)^2}{2\mu}) = \varepsilon_i^2 + \frac{(\Delta J)^2p}{k\mu}$$

e una variazione nell'asse maggiore dell'orbita ellittica, che dipende solo dall'energia del moto (vedi (2.16))

$$2a_f = -\frac{k}{e_f} = -\frac{k}{e_i + \frac{(\Delta J)^2}{2\mu}}, \qquad a_f = \frac{a_i}{1 - a_i \frac{(\Delta J)^2}{\mu k}}$$

Dopo la somministrazione dell'impulso, che si suppone istantanea, la posizione del satellite non è cambiata, ma la direzione della velocità è cambiata di un angolo  $\varphi$  pari alla rotazione dell'asse maggiore della nuova orbita ellittica. Scrivendo le due orbite nella forma

$$r_i(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon_i \cos \theta}, \qquad r_f(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon_f \cos(\theta + \varphi)}$$

possiamo calcolare  $\varphi$  dalla condizione

$$r_i(0) = \frac{p}{1 + \varepsilon_i} = r_f(0) = \frac{p}{1 + \varepsilon_f \cos \varphi}$$

da cui  $\varphi = \arccos(\varepsilon_i/\varepsilon_f)$ . Vedi figura.

#### Gravitational assist

Si tratta di una tecnica che viene usata in tutte le missioni interplanetarie per aumentare o ridurre la velocità della sonda lanciata dalla terra sfruttando l'interazione gravitazionale con un pianeta intermedio, in modo da poter proseguire il viaggio verso un pianeta esterno del sistema solare. Qui descriviamo solo il caso di aumento della velocità della sonda, i conti sono del tutto analoghi per il rallentamento. Consideriamo due sistemi di riferimento, il sistema eliocentrico  $\mathcal{E}_S$  avente terzo asse perpendicolare al piano dell'eclittica e il sistema  $\mathcal{E}_P$ , avente assi costantemente paralleli con quelli del sistema eliocentrico e origine coincidente con il centro del pianeta P. Le seguenti assunzioni sono verificate con ottima approssimazione per i pianeti del sistema solare:

- i) I pianeti si muovono su orbite circolari tutte contenute nello stesso piano (piano dell'eclittica),
- ii) durante l'interazione con il pianeta intermedio la forza di gravità esercitata dal sole è trascurabile,
- iii) nel tempo di interazione della sonda con il pianeta (qualche giorno nella realtà) la velocità del pianeta rispetto al sistema eliocentrico oltre ad essere costante in modulo per un'orbita circolare, si puo' supporre anche costante in direzione.
- iv) Il sistema eliocentrico è inerziale e anche  $\mathcal{E}_P$ , essendo per iii) animato di solo moto di traslazione, è inerziale.
- v) Nell'interazione sonda-pianeta agisce solo la mutua forza gravitazionale, che è una forza interna e conservativa. Si conserva quindi la quantità di moto totale (e anche il momento della quantità di moto) del sistema sonda pianeta, che possiamo considerare con ottima approssimazione isolato ai fini del calcolo delle velocità al termine dell'interazione.
- vi) Nel sistema eliocentrico, possiamo considerare durante l'interazione i due corpi come occupanti la stessa posizione P, punto di intersezione tra l'orbita del pianeta, circolare di raggio  $R_P$ , e l'orbita ellittica della sonda, avente parametri orbitali  $\varepsilon$ , p dati

Indicando con  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{v}$  le velocità del pianeta e della sonda nel riferimento eliocentrico e con  $m_P$  la massa del pianeta, si ha quindi per  $\mathbf{v}$ )

$$\mu \Delta \mathbf{v} = -m_P \Delta \mathbf{V}, \quad i.e. \quad \Delta \mathbf{V} = -\frac{\mu}{m_P} \Delta \mathbf{v}$$

Essendo il rapporto  $\mu/m_P \approx 10^{-20}$  possiamo ritenere  $\Delta \mathbf{V}$  anche se non è nullo (e quindi neanche  $\Delta \mathbf{v}$  è nullo) trascurabile rispetto a  $\mathbf{V}$ . Pertanto possiamo ritenere  $\mathbf{V}$  costante durante l'interazione come detto in iii) e quindi anche  $\mathcal{E}_P$  è un riferimento inerziale.

Descriviamo ora il moto nel riferimento planetario  $\mathcal{E}_P$ . Indichiamo con  $\mathbf{w}$  la velocità della sonda in  $\mathcal{E}_P$ . Per la formula di composizione delle velocità (Teorema di Galileo) si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{w} \tag{2.19}$$

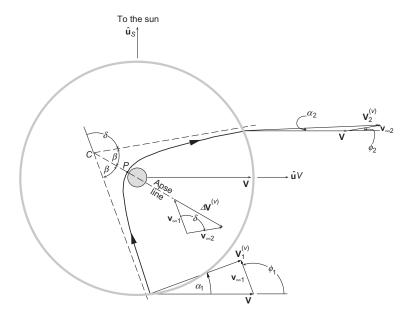


Figura 2.5: orbita iperbolica relativa al flyby nel riferimento planetario

Per ii) l'unica forza agente è la mutua attrazione gravitazionale tra il pianeta e la sonda, che è una forza interna al sistema e conservativa; siccome la velocità  $\mathbf{w}$  della sonda è non nulla, l'orbita rispetto al riferimento  $\mathcal{E}_P$  è un'*iperbole*.

Confronteremo due situazioni, all'ingresso e all'uscita dalla sfera di influenza del pianeta, che per quanto riguarda la traiettoria iperbolica possiamo considerare corrispondenti a  $t=\pm\infty$  anche se nella realtà il tempo di interazione (flyby) è di qualche giorno (vedi fig. 2.5). Nel riferimento planetario, dal momento che la forza agente è conservativa, si ha  $w_{-\infty}=w_{+\infty}$  quindi nel riferimento planetario si osserva solo una rotazione del vettore  $\mathbf{w}_{\infty}$  di un angolo  $\delta=2\arcsin(1/\varepsilon)$ . Inoltre dalla (2.19) si ha che la variazione di velocità nel sistema planetario è la stessa di quella osservata nel riferimento eliocentrico

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{w}_{+\infty} - \mathbf{w}_{-\infty} = -\Delta \mathbf{v}$$

di modulo

$$\Delta w = 2w \sin \frac{\delta}{2} = \frac{2w}{\varepsilon_P}$$

ove  $\varepsilon_P$  è l'eccentricità dell'orbita iperbolica. Possiamo quindi calcolare la variazione di velocità assoluta dovuta all'interazione con il pianeta intermedio. Si ha

$$v_{\pm\infty}^2 = \mathbf{v}_{\pm\infty}^2 = (\mathbf{V} + \mathbf{w}_{\pm\infty})^2 = V^2 + w_{\infty}^2 + 2\mathbf{V} \cdot \mathbf{w}_{\pm\infty}$$

da cui

$$v_{+\infty}^2 = v_{-\infty}^2 + 2\mathbf{V} \cdot \Delta \mathbf{w}$$

e quindi sottraendo e dividendo e prendendo la radice quadrata

$$\frac{v_{+\infty}}{v_{-\infty}} = \sqrt{1 + \frac{2\mathbf{V} \cdot \Delta \mathbf{w}}{v_{-\infty}^2}}$$

Si vede quindi che la variazione di velocità è nulla se  ${\bf V}$  è nullo e che la velocità finale può essere superiore o inferiore a quella iniziale a seconda del segno del prodotto scalare.

I parametri della traiettoria iperbolica sono  $\varepsilon_P$  e p e sono legati all'energia della sonda nel riferimento planetario  $e_P = \mu w_{-\infty}^2/2$  e al momento angolare, determinato dalla distanza minima dal pianeta  $r_p = p/(1 + \varepsilon_P)$ . Calcoliamo

$$w_{-\infty}^2 = (\mathbf{v}_{-\infty} - \mathbf{V})^2 = v_{-\infty}^2 + V^2 - 2V(v_{-\infty})_{\theta} = \frac{2e}{\mu} + V^2 - 2\frac{Vc}{R_P}$$

perchè essendo l'orbita del pianeta circolare,  ${\bf V}=V{\bf e}_{\theta},$  inoltre  $(v_{-\infty})_{\theta}=c/R_P$  e  $v_{-\infty}^2=2e/\mu$ 

# 3 Stabilità per sistemi autonomi

Ad un livello di generalità ancora maggiore, lo studio dei sistemi retti dall'equazione

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

si limita ad un'indagine qualitativa delle soluzioni nell' intorno di un punto di equilibrio. Per tali considerazioni è fondamentale il concetto di stabilità delle soluzioni. Per le applicazioni alla meccanica basta applicare quanto vedremo alla (1.9). Sia  $\hat{x}$  punto di equilibrio del campo vettoriale f. Ovviamente, supporremo che il campo vettoriale f soddisfi le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità della soluzione.

**Definizione 3.0.1 (Stabilità alla Lyapunov)** Un punto di equilibrio  $\hat{x}$  si dice stabile se per ogni intorno U di  $\hat{x}$  esiste un intorno  $V \subset U$  tale che ogni soluzione del Problema di Cauchy per f con dato iniziale in V è contenuta nell'intorno U per ogni  $t \geq 0$ .

La definizione di stabilità è quindi topologica e molto simile a quella di funzione continua. Se si prendono come intorni le palle aperte di  $\mathbb{R}^n$ , la definizione precedente si scrive: per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$  tale che

$$x_0 \in B(\hat{x}, \delta) \quad \Rightarrow \quad x(t, x_0) \in B(\hat{x}, \varepsilon) \quad \forall t \ge 0.$$
 (3.1)

Le orbite del sistema attorno ad un equilibrio rimangono quindi confinate nel futuro in un intorno del punto stesso. Il comportamento asintotico delle traiettorie è caratterrizzato dalla seguente definizione

Definizione 3.0.2 Un punto di equilibrio stabile si dice asintoticamente stabile se

$$x_0 \in B(\hat{x}, \delta) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = \hat{x}.$$

E' facile rendersi conto con esempi che tale condizione aggiuntiva è verificata in molti sistemi fisici, tipicamente in tutti i sistemi nei quali vi è dissipazione di energia tramite attrito. Infine, chiamiamo *instabile* un punto di equilibrio che non è stabile.

Esercizio: scrivere esplicitamente la negazione della definizione di equilibrio data con il linguaggio  $\varepsilon - \delta$ .

## 3.0.1 Teorema di Lyapunov

Nel Teorema che ora mostriamo si fa uso di una funzione reale W, detta funzione di Lyapunov appunto, che ha un comportamento più generale rispetto alle soluzioni del sistema di un integrale primo. Si chiede infatti che in un intorno dell'equilibrio sia

$$\mathcal{L}_f(W)(x) \leq 0.$$

Vediamo il comportamento di W lungo le soluzioni  $x(t, x_0)$  del sistema. E' chiaro che se

$$\mathcal{L}_f(W)(x(t,x_0)) = 0$$

W è un integrale primo e quindi la soluzione è confinata nell'insieme di livello  $W^{-1}(x_0)$ . Se invece vale la condizione più forte

$$\frac{dW}{dt}(x(t,x_0)) = \mathcal{L}_f(W)(x(t,x_0)) < 0$$

allora  $W \circ x$  è strettamente decrescente per  $t \geq 0$ . Supponiamo ora che l'equilibrio  $\hat{x}$  sia anche un minimo stretto di W. Questo vuol dire che la soluzione, per tempi crescenti è confinata all'interno degli insiemi di sottolivello

$$W_c = \{ x \in B(\hat{x}, r) : W(x) \le c \}, \qquad c > W(\hat{x})$$

che costituiscono una famiglia di intorni di  $\hat{x}$  sempre più piccoli. Questo basta per costringere la soluzione ad avvicinarsi sempre più all'equilibrio, che quindi è asintoticamente stabile. Quanto detto dovrebbe rendere plausibile il seguente Teorema

Teorema 3.0.1 (Teorema di Lyapunov) Sia  $\hat{x}$  punto di equilibrio. Se esiste una funzione continuamente differenziabile W il cui dominio contiene un intorno D del punto di equilibrio e tale che

- 1)  $W(x) > W(\hat{x})$  in  $D \{\hat{x}\},$
- 2)  $\mathcal{L}_f(W) \leq 0$  in D

allora  $\hat{x}$  è equilibrio stabile. Se oltre a 1) vale la condizione più restrittiva

3) 
$$\mathcal{L}_f(W) < 0$$
 in  $D - \{\hat{x}\}$ 

allora  $\hat{x}$  è equilibrio asintoticamente stabile.

**Dimostrazione** Non è restrittivo supporre  $W(\hat{x}) = 0$ . Scelto  $\varepsilon$  tale che  $B(\hat{x}, \varepsilon) \subset D$ , dobbiamo trovare  $\delta$  positivo che soddisfi alla (3.1). Sia a > 0 il minimo di W sulla frontiera  $\partial B(\hat{x}, \varepsilon)$ ; poichè W è continua e  $\partial B$  è compatto, il minimo esiste ed è positivo per 1). Usando la continuità di W in  $\hat{x}$ , possiamo dire che esiste  $\delta = \delta_a$  tale che

$$x \in B(\hat{x}, \delta) \Rightarrow |W(x) - W(\hat{x})| = W(x) < a.$$

Questo è il  $\delta$  cercato. Infatti, supponiamo per assurdo che (3.1) sia violata e che esista una soluzione con dato iniziale  $x_0$  in  $B(\hat{x}, \delta)$  che attraversi la frontiera  $\partial B(\hat{x}, \varepsilon)$  in un certo istante  $\tau > 0$  per la prima volta. Allora, necessariamente

$$W(x(\tau, x_0)) \ge a$$

e contemporaneamente, per 2) e la (1.8), essendo W non crescente lungo le soluzioni si ha

$$W(x(\tau, x_0)) \leq W(x_0) < a$$

e questo è assurdo.

Mostriamo ora la l'asintotica stabilità. Val la pena di osservare che fino a qui non sarebbe stato necessario supporre che W fosse continuamente differenziabile, ma solamente che fosse monotona non crescente lungo le soluzioni. Ora sappiamo che ogni soluzione con dato iniziale in  $B(\hat{x}, \delta)$  rimane confinata nella palla di raggio  $\varepsilon$ . Vorremmo ora che tale soluzione 'cadesse' sull'equilibrio, ovvero che  $\lim_{t\to +\infty} x(t,x_0) = \hat{x}$ . Supponiamo per assurdo che ciò non accada e quindi, negando la definizione di limite, che esista un  $\varepsilon'$  tale che  $\forall$  T possiamo trovare un  $\bar{t} > T$  tale che

$$|x(\bar{t}, x_0) - \hat{x}| > \varepsilon'.$$

Per la accertata stabilità di  $\hat{x}$ , in corrispondenza a  $\varepsilon'$  esiste  $\delta' < \varepsilon'$  tale che, se la soluzione  $x(t,x_0)$  entra nella palla di raggio  $\delta'$  ad un T>0, resta all'interno di  $B(\hat{x},\varepsilon')$  per ogni  $t\geq T$ . Perchè ciò non accada, la soluzione deve rimaner confinata per t>0 in una corona circolare  $C(\delta',\varepsilon)\subset D$  di raggi  $\varepsilon$  e  $\delta' < \varepsilon$ . Tale corona è un compatto e ivi la funzione  $\mathcal{L}_f(W)$  –continua— ha un massimo negativo  $\mu<0$ . Vale allora la stima per t>0

$$W(x(t,x_0)) = W(x_0) + \int_0^t \frac{dW}{dt} dt \le W(x_0) + \mu t$$

e quindi, per t sufficientemente elevato, W diventerebbe negativa.

Il teorema di Lyapunov dà delle condizioni suffcienti per la stabilità semplice o asintotica ma non dà informazioni su come reperire una funzione di Lyapunov. Un integrale primo, annullando la derivata di Lie, potrebbe essere una candidata funzione di Lyapunov, se ha anche un minimo stretto nell'equilibrio. Vedremo in seguito (Teorema di Lagrange-Dirichlet) che per sistemi meccanici conservativi o dissipativi, l'energia totale T+U è una funzione di Lyapunov per la stabilità semplice.

## 3.0.2 Cenni sulla linearizzazione attorno ad un equilibrio nel piano

In questo paragrafo vediamo alcune nozioni essenziali riguardanti il comportamento delle soluzioni di un sistema autonomo attorno ad un suo punto di equilibrio, detto anche punto critico, che possiamo sempre supporre essere l'origine. Trascurando quindi i termini non lineari, sostituiamo al sistema nonlinare  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  la sua parte lineare

$$\dot{x} = f'(0)x = Ax, \quad x(0) = x_0.$$
 (3.2)

Il sistema lineare scritto soddisfa evidentemente le ipotesi del teorema di esistenza e unicità in grande, quindi le soluzioni sono definite su tutto  $\mathbb{R}$ . Inoltre, per la linearità, l'insieme delle soluzioni si atteggia a spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  con le operazioni di somma e prodotto per scalare definite puntualmente. La mappa  $x_0 \mapsto x(\cdot, x_0)$  risulta essere lineare e biettiva per il teorema di esistenza e unicità e quindi stabilisce un isomorfismo di spazi vettoriali tra lo spazio  $\mathbb{R}^n$  dei dati iniziali e lo spazio delle soluzioni  $\mathcal{V}$ . Ne segue che il sistema (3.2) ha esattamente n soluzioni linearmente indipendenti. Per verifica diretta si constata subito che se  $u_1, u_2$  sono autovettori linearmente indipendenti di A relativi ad autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$ , le funzioni

$$t \mapsto e^{\lambda_1 t} u_1, \quad t \mapsto e^{\lambda_2 t} u_2$$
 (3.3)

sono soluzioni di (3.2) linearmente indipendenti. E' chiaro quindi che l'insieme delle soluzioni viene caratterizzato dall'insieme degli autovalori (o spettro) di A.

Ci limitiamo nel seguito al caso n=2, sufficiente per comprendere le idee fondamentali. Gli elementi dello spettro di A sono le soluzioni del polinomio caratteristico  $\det(A-\lambda\mathbb{I})=0$ , equazione di secondo grado. Le sue radici  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  sono reali o complesse coniugate. Il polinomio caratteristico infatti si può utilmente riscrivere come

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A = 0$$

e gli autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{tr(A)^2 - 4 \det A}}{2}.$$

#### Il caso di autovalori reali: nodo e sella

Nel caso di radici reali *distinte* sono possibili tre casi e i corrispondenti equilibri sono descritti in Tabella 3.1. Il caso in cui uno degli autovalori sia nullo si tratta senza particolari difficoltà come caso limite dei precedenti.

autovalori	nome
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	nodo stabile
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	nodo instabile
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	sella

Tabella 3.1: Equilibri con autovalori reali distinti.

Nel caso in cui il polinomio caratteristico abbia due radici reali *coincidenti* o, equivalentemente  $\lambda$  è radice di molteplicità 2, e la matrice A ha un solo autovettore u, dalla teoria sappiamo che una base di soluzioni è data dalle funzioni reali

$$t \mapsto c_1 e^{\lambda t} u, \quad t \mapsto c_2 t e^{\lambda t} u$$
 (3.4)

l'origine rappresenta un equilibrio stabile o instabile a seconda che sia  $\lambda < 0$  o  $\lambda > 0$ . Se invece vi sono due autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore doppio  $\lambda$ , allora ogni vettore è un autovettore e quindi le soluzioni sono tutte e sole le rette per l'origine, entranti nel caso  $\lambda < 0$  (nodo a stella stabile) e uscenti se  $\lambda > 0$  (nodo a stella instabile).

## Forma delle orbite

Supponiamo che i due autovettori in (3.3) formino una base ortonormale del piano (x, y) per cui  $u_i = \mathbf{e}_i$ . Le orbite nel caso di autovalori reali

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = x_0 e^{\lambda_1 t} \mathbf{e}_1 + y_0 e^{\lambda_2 t} \mathbf{e}_2$$

possono essere messe nelle forma esplicita y=y(x) ricavando t dalla y(t) e sostituendo in x(t). Si ottiene, ponendo  $\gamma=\lambda_2/\lambda_1$ 

$$|y(x)| = \frac{|y_0|}{|x_0|^{\gamma}} |x|^{\gamma} = a |x|^{\gamma}$$

Si ha un nodo ( $\gamma > 0$ ) se gli autovalori hanno lo stesso segno; si ha un nodo rispettivamente stabile o instabile se gli autovalori sono entrambi negativi (orbite entranti)

o entambi positivi (orbite uscenti). La tangente alle orbite nell'origine è orizzontale se  $\gamma > 1$  i.e.  $|\lambda_2| > |\lambda_1|$  e verticale se  $0 < \gamma < 1$ , i.e.  $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ . Se gli autovalori hanno segni distinti si ha una sella ( $\gamma < 0$ ); in tal caso la tangente è verticale. Si vedano le figure (basta concentrarsi sul primo quadrante, la curva negli altri si ottiene per riflessione attorno agli assi).

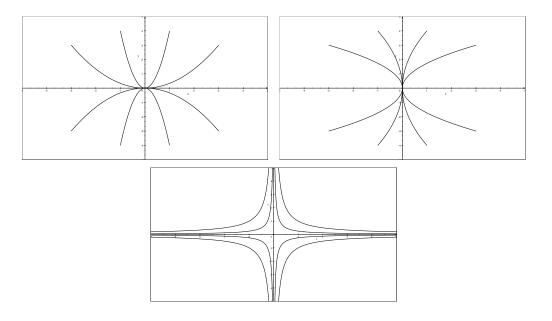


Figura 3.1: in senso orario:  $\gamma = 2, \gamma = 1/2, \gamma = -1$ 

#### Il caso di autovalori complessi-coniugati : fuoco e centro

Infine dobbiamo trattare il caso di autovalori complessi coniugati, quindi necessariamente distinti

$$\lambda_1 = a + ib, \qquad \lambda_2 = a - ib.$$

Si vede facilmente, usando l'identità di Eulero

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$$

che in questo caso le soluzioni  $e^{\lambda t}$  sono funzioni a valori complessi. Come si interpreta questo? E' necessario ricordare che la teoria delle equazioni differenziali si espone nel caso di uno spazio di Banach  $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ . Innanzitutto, come abbiamo visto, le proprietà dell'equilibrio dipendono dallo spettro della matrice e lo spettro non cambia se sostituiamo la matrice A con una matrice simile  $B = P^{-1}AP$ . Questo vuol dire che invece di considerare il sistema lineare  $\dot{\xi} = A\xi$  possiamo studiare il sistema equivalente  $\dot{\eta} = B\eta$  ove  $\eta = P^{-1}\xi$ 

$$\dot{\eta} = P^{-1}\dot{\xi} = P^{-1}A\xi = P^{-1}AP\eta = B\eta. \tag{3.5}$$

Un risultato classico di algebra lineare $^1$  dice che possiamo scegliere P in modo che

$$B = \left(\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array}\right), \qquad b \neq 0.$$

Non è restrittivo quindi supporre di dover studiare il sistema lineare in  $\mathbb{R}^2$ 

$$\left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right).$$

avente autovalori  $a\pm ib$ . Si vede per verifica diretta che tale sistema coincide con quello che si ottiene scrivendo la parte reale e complessa dell'equazione differenziale lineare in  $\mathbb C$ 

$$\dot{z} = cz, \qquad z(0) = z_0 \tag{3.6}$$

ove

$$z = x + iy$$
,  $c = a + ib$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ 

la cui soluzione si scrive  $z(t) = z_0 e^{ct}$  e, usando l'identità di Eulero, essa diviene

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$
 (3.7)

Nel sistema di coordinate usato, la soluzione è la composizione di una rotazione propria

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \in SO(2)$$

e di una dilatazione  $e^{at}$  applicate al dato iniziale  $z_0$ . Quindi, se a=0, i.e  $Re(\lambda)=0$ , le traiettorie sono circonferenze e l'equilibrio detto centro è stabile, se  $Re(\lambda)<0$  le traiettorie sono spirali che sono percorse in direzione dell'origine e quindi rappresentano equilibri stabili, se  $Re(\lambda)>0$ , sono percorse in senso opposto e rappresentano equilibri instabili. In entrambi i casi l'equilibrio è detto fuoco. Nel sistema di coordinate originario, le traiettorie sono deformate, ma non cambiano la loro natura.

# 3.1 Stabilità con il teorema spettrale di Lyapunov

Lo studio del comportamento nell'intorno di un equilibrio per i sistemi lineari nel piano permette di rendere almeno plausibile il contenuto del seguente teorema, che permette di dare delle informazioni sulla natura di un equilibrio per un sistema nonlineare guardando lo spettro della sua parte lineare.

Teorema 3.1.1 (Teorema spettrale o primo metodo di Lyapunov) Supponiamo che f(0) = 0 e consideriamo il sistema linearizzato  $\dot{x} = f'(0)x = Ax$  associato a  $\dot{x} = f(x)$ . Vale allora:

Consideriamo  $\mathbb{R}^2$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ . I vettori hanno la forma u=x+iy con  $x,y\in\mathbb{R}^2$  e l'azione di una matrice  $A\in Mat(2,\mathbb{C})$  sul vettore u si scrive Au=A(x+iy)=Ax+iAy. Allora, se  $\lambda=a+ib$  è autovalore di A con autovettore u=x+iy,  $Au=\lambda u$ , la matrice  $P\in Mat(2,\mathbb{R})$ , P=[x,y], le cui colonne sono i vettori  $x,y\in\mathbb{R}^2$  verifica  $P^{-1}AP=B$  ove B ha la forma in (3.5).

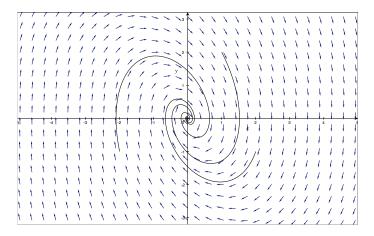


Figura 3.2: orbite di un fuoco stabile

- 1) se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, l'origine è equilibrio asintoticamente stabile per il sistema nonlineare
- 2) se almeno un autovalore ha parte reale positiva, l'origine è equilibrio instabile per il sistema nonlineare
- 3) se tutti gli autovalori di A hanno parte reale non positiva e almeno un autovalore ha parte reale nulla, il comportamento del sistema nonlineare nell'equilibrio non è deducibile dalla sua parte lineare

Terminiamo enunciando alcune definizioni comunemente utilizzate

#### **Definizione 3.1.1** Un equilibrio si dice

iperbolico se lo spettro della sua parte lineare non ha parte reale nulla, cioè tutto gli autovalori hanno  $Re(\lambda) \neq 0$ ;

ellittico se lo spettro ha parte reale nulla, cioè  $Re(\lambda) = 0$  per ogni  $\lambda$  e il polinomio caratteristico non ha radici nulle.

## 3.1.1 Applicazioni importanti

Lo studio dei sistemi lineari nel piano ha un'immediata applicazione nella trattazione di molti sistemi semplici ma che sono importanti modelli per casi più complicati. Di seguito ne consideriamo alcuni

#### Punto soggetto a forza elastica e viscosa

Studiamo il moto unidimensionale di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza elastica  $F=-hx,\ h>0$  e ad una resistenza linearmente viscosa  $R=-2k\dot{x},\ k>0$ , libero di muoversi su di una guida rettilinea. L'equazione del moto è quindi lineare omogenea

$$m\ddot{x} = -hx - 2k\dot{x}.$$

L'aggiunta della gravità -mg rende l'equazione sopra scritta non omogenea ma non porta a complicazioni di rilievo. Studiamo quindi l'omogenea associata. La

presenza del termine viscoso preclude la possibilità di usare il metodo qualitativo basato sull'integrale dell'energia. Possiamo però ridurre il sistema al primo ordine ponendo  $\dot{x}=v$  e studiare il corrispondente sistema lineare in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{v} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{h}{m} & -\frac{2k}{m} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ v \end{array}\right) = A \left(\begin{array}{c} x \\ v \end{array}\right).$$

Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A = \lambda^2 + \frac{2k}{m}\lambda + \frac{h}{m} = 0$$

con autovalori

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{m} \pm \sqrt{(\frac{k}{m})^2 - \frac{h}{m}}.$$

Se  $\Delta^2 = (k/m)^2 - h/m > 0$ , ovvero se  $k > \sqrt{hm}$  abbiamo due autovalori reali negativi (nodo stabile). La soluzione generale del moto è

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} u + c_1 e^{\lambda_2 t} w$$

ove  $u, w \in \mathbb{R}^2$  sono gli autovettori associati, linearmente indipendenti. La prima riga dà il moto, che è esponenzialmente decrescente verso l'unico equilibrio x=0, v=0. Nel caso critico  $\Delta^2=0$ , i due autovalori sono coincidenti e la soluzione è data da (3.4), che ha un comportamento qualitativamente simile a quello appena visto.

Nel caso  $\Delta^2 < 0$  i due autovalori sono complessi coniugati, con parte reale negativa (fuoco stabile). La soluzione x(t) è data dalla prima riga della (3.7) che riscriviamo in maggior dettaglio

$$x(t) = e^{-\frac{k}{m}t} \Big(\cos(\delta t)x_0 - \sin(\delta t)v_0\Big), \quad \delta = \sqrt{h/m - (k/m)^2}$$

e corrisponde a delle oscillazioni smorzate che tendono alla configurazione di equilibrio x=0. Il caso k=0, assenza di resistenza viscosa, descrive l'oscillatore armonico, per il quale abbiamo già studiato il moto tramite l'integrale dell'energia. In questo caso gli autovalori sono immaginari puri e il moto è oscillatorio. Infine,il caso  $k>0,\ h<0$  descrive il repulsore armonico con attrito. Avendo due autovalori reali, di cui uno positivo, l'origine è sempre equilibrio instabile.

# Sistemi conservativi unidimensionali

E' una leggera generalizzazione dell'esempio precedente. Studiamo un sistema conservativo unidimensionale  $\ddot{x}=f(x)=-U'(x)$  attraverso la sua riduzione al primo ordine  $\dot{x}=v,\dot{v}=f(x)$  e consideriamo il sistema lineare associato nell'intorno d un punto di equilibrio che possiamo identificare con l'origine del piano delle fasi x=0,v=0.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + U''(0) = 0.$$

Quindi: se l'origine (configurazione di equilibrio) è un massimo stretto, U''(0) < 0, l'equilibrio è iperbolico con un autovalore positivo, quindi l'origine è equilibrio instabile per 2). Se se l'origine è un minimo stretto, U''(0) < 0, l'equilibrio è ellittico e nulla possiamo dire per 3) sulla natura dell'equilibrio per il sistema nonlineare, anche se il sistema linearizzato è un centro, e quindi è stabile.

Ora supponiamo che sul sistema agisca anche una forza viscosa  $R=-2k\dot{x},\,k<0.$  Il sistema lineare (3.8) si modifica in

$$\left( \begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{v} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -U''(0) & -2k \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x \\ v \end{array} \right) = A \left( \begin{array}{c} x \\ v \end{array} \right)$$

e gli autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - U''(0)}.$$

L'aggiunta della viscosità rende l'origine un equilibrio iperbolico in ogni caso e quindi permette di accertare la natura dell'equilibrio dallo studio della parte lineare. I massimi sono ancora instabili, mentre i minimi sono ora asintoticamente stabili per la 1) del teorema spettrale.

# 4 Dinamica dei sistemi di punti materiali liberi

#### 4.1 Riferimenti inerziali

Nella Meccanica Classica lo spazio fisico nel quale si muovono i corpi puntiformi o estesi risulta essere completamente descritto postulando che esso abbia natura di spazio euclideo tridimensionale. Ogni punto dello spazio è quindi univocamente rappresentato specificando un'origine O ed una base che per comodità supponiamo essere una terna ortonormale di versori  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , detta riferimento. Il tempo ha struttura di insieme ordinato isomorfo a  $\mathbb{R}$ . Indicheremo un punto P nel suo moto rispetto al riferimento  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  nei modi seguenti

$$OP(t) = (P - O)(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3 = x(t).$$

Le derivate prime e seconde di  $t \mapsto OP(t)$  si chiamano rispettivamente velocità ed accelerazione di P rispetto al riferimento scelto

$$v_P(t) = \frac{d}{dt}OP(t), \quad a_P(t) = \frac{d^2}{dt^2}OP(t)$$

e sono quantità dette cinematiche; la loro espressione dipende ovviamente dal riferimento. Si postula invece che le forze agenti sul punto materiale P siano quantità vettoriali indipendenti dal riferimento. E' evidente allora che la relazione

$$ma_p = F (4.1)$$

non può essere valida in due qualsiasi riferimenti. Si postula allora l'esistenza di una classe di riferimenti detti *inerziali* univocamente caratterizzati dalla proprietà seguente, detta Principio d'inerzia:

Un punto materiale non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme, i.e.  $a_P = 0$  in un riferimento inerziale

Nel paragrafo 4.2 vedremo che se un riferimento è inerziale, ogni altro riferimento che trasli con velocità costante rispetto al primo è anch'esso inerziale, e questo giustifica l'espressione di classe (insieme) di riferimenti inerziali. Quando parleremo di riferimento inerziale, intenderemo un qualsiasi rappresentante della classe.

Un ulteriore postulato, detto legge di Newton afferma che,

In un riferimento inerziale, vi è una relazione di proporzionalità tra l'accelerazione di un punto materiale e la forza agente su di esso, ovvero vale la (4.1) e la costante è detta massa inerziale.

Si noti che il secondo postulato comprende come caso particolare il primo. Un terzo postulato, detto legge di azione e reazione, afferma che in un sistema di due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  isolato –cioè i cui punti non sono soggetti ad altre forze oltre a quelle di interazione reciproca– la quantità di moto totale è costante nel tempo

$$P(t) = m_1 v_1(t) + m_2 v_2(t) = \text{costante.}$$
 (4.2)

La legge di azione e reazione propriamente detta si ottiene derivando la (4.2) rispetto al tempo

$$m_1 a_1(t) + m_2 a_2(t) = 0.$$
 (4.3)

da cui, per la legge di Newton

$$F_{12} + F_{21} = 0$$

ove con  $F_{ij}$  indichiamo la forza agente su 2 dovuta a 1.

I postulati introdotti si estendono facilmente al caso di un sistema di n punti materiali  $P_i$  aventi masse  $m_i$  supponendo che l'effetto delle interazioni di un punto con i rimanenti sia la somma vettoriale delle interazioni del punto con ognuno degli altri preso singolarmente (in assenza degli altri). Questo postulato è detto principio di sovrapposizione degli effetti.

Infine, si suppone che valga il principio di relatività Galileiano. Esso afferma che due osservatori solidali a due riferimenti inerziali, i.e. due rappresentanti della stessa classe, che descrivono il moto dello stesso punto materiale usando la (4.1) devono trovare leggi del moto  $t \mapsto P(t)$  identiche. Non lo dimostriamo qui, ma questo postulato pone delle restrizioni importanti sulla forma possibile delle forze di interazione tra punti di un sistema particellare isolato. Esse sono

- 1. le forze di interazione non dipendono dal tempo
- 2. possono dipendere solo dalle differenze  $P_i P_i$ ,  $v_j v_i$
- 3. ruotando i vettori  $P_j P_i$ ,  $v_j v_i$  di uno stesso angolo, anche i vettori forza, sperimentalmente misurati, risultano ruotati dello stesso angolo

Quindi, la legge di Newton che descrive il moto del punto  $P_i$  del sistema avrà la forma

$$m_i a_i(t) = F(\dots, P_i - P_i, \dots, v_i - v_i, \dots), \quad j = 1, \dots, n.$$

Nel paragrafo seguente vedremo come descrivere il moto di un riferimento qualsiasi rispetto ad un altro riferimento, che tipicamente sarà un rappresentante della classe dei riferimenti inerziali. In questo modo saremo in grado di descrivere il moto di un sistema anche in un riferimento non inerziale, determinando precisamente come deve essere modificata la (4.1).

#### Sistemi a massa variabile

La conservazione della quantità di moto totale (4.2) nella forma  $\frac{d}{dt}(mv) = 0$  permette di trattare il caso di sistemi a massa variabile con il tempo e quindi risulta di più generale applicazione rispetto alla legge di Newton nella forma F = ma da esso derivabile nell'ipotesi di massa constante nel tempo. Per semplificare, consideriamo un sistema costituito da una navicella spaziale che può muoversi sfruttando la combustione di propellente che esce da vari ugelli. Indichiamo con m(t) la massa della navicella più il propellente ancora in esso contenuto e con  $\mu_i(t)$ , i = 1, ... k la massa di propellente già uscito dall'ugello i-esimo. Indichiamo con v la velocità della navicella e con  $u_i$  la velocità del combustibile esausto (gas) già uscito, che possiamo ritenere costante se trascuriamo l'effetto della gravità e della resistenza dell'aria sul gas, rispetto ad un riferimento inerziale. Se

indichiamo con  $M = M_0 + m_G$  la massa iniziale della navicella con il propellente, possiamo scrivere le due leggi di conservazione per la massa e per la quantità di moto

$$\begin{cases}
M = m(t) + \sum_{i} \mu_{i}(t), \\
P = m(t)v(t) + \sum_{i} \mu_{i}(t)u_{i}(t).
\end{cases}$$
(4.4)

e derivando la seconda abbiamo

$$\dot{P} = R = \dot{m}v + m\dot{v} + \sum_{i} (\dot{\mu}_i u_i + \mu_i \dot{u}_i)$$

Dall'ipotesi  $\dot{u}_i=0$  e scrivendo  $\dot{m}=-\sum_i\dot{\mu}_i$  otteniamo l'equazione per il moto della navicella

$$m\dot{v} = R + \sum_{i} \dot{\mu}_{i}(v - u_{i}) = R + \sum_{i} \dot{\mu}_{i}w_{i}$$
 (4.5)

ove con  $w_i = v - u_i$  abbiamo indicato la velocità di uscita del gas rispetto alla navicella, che possiamo ritenere costante. Si vede quindi che l'uscita del propellente agisce come una forza aggiuntiva rispetto alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema, che in generale si riducono alla gravità agente sulla navicella mg. Si vede anche che l'effetto di due getti opposti  $w_1 = -w_2$  e di pari intensità neutralizza la spinta sulla navicella. Usiamo la (4.5) per calcolare l'altezza z(t) di un razzo con un solo ugello in moto verticale soggetto a gravità nell'ipotesi che la velocità di consumo del propellente  $\dot{m} = -c$ , sia costante c > 0 e che la velocità di uscita del gas w si anch'essa costante. Si ha allora

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt}w$$

che integriamo tra 0 e t

$$\int_0^t m \frac{dv}{dt} dt = \int_0^t -mg dt - \int_0^t \frac{dm}{dt} w dt$$

ottenendo

$$v(t) = \frac{dz}{dt} = v(0) - gt + w\log\frac{M}{m(t)}$$

Siccome la massa iniziale  $m_G$  si consuma con velocità k si ha  $m(t) = M_0 + m_G - kt$  e la relazione trovata ha senso per  $t < m_G/k$  dopo di che w = 0 e il razzo è sogetto alla sola gravità. Con un'ulteriore integrazione possiamo calcolare la quota raggiunta

$$z(t) = v(0)t - g\frac{t^2}{2} + \frac{w}{k}[(M_0 + m_G - kt)\log\frac{M_0 + m_G - kt}{M} + kt]$$

#### 4.1.1 Forze conservative

Ribadiamo ancora qui il concetto che la legge di Newton mette in relazione forze e accelerazioni, ma non può essere presa come definizione della forza agente su di un punto materiale. Le forze hanno un'esistenza propria, indipendente dall'esistenza o meno di un punto materiale sul quale fanno sentire il loro effetto. Questo giustifica la nozione di campo di forza posizionale inteso come campo vettoriale definito su una porzione dello spazio euclideo tridimensionale  $F:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ . Il punto materiale P posto in  $x\in D$  è soggetto alla forza F=F(x). Esempi di tali campi sono il campo gravitazionale o il campo elettromagnetico.

**Definizione 4.1.1** Il campo di forza posizionale  $F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  è conservativo se esiste una funzione  $U: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$  detta energia potenziale tale che

$$F(x) = -\nabla_x U(x) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \frac{\partial U}{\partial x_2}(x), \frac{\partial U}{\partial x_3}(x)\right) = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$$

Consideriamo ora un sistema di N punti materiali liberi, la cui posizione è individuata dal vettore in  $\mathbb{R}^{3N}$ 

$$OP = \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N).$$

Indicheremo con  $\nabla_i$  il gradiente fatto rispetto alle coordinate  $x_i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$  dell'iesimo punto materiale. E' immediato constatare che il sistema di punti immerso nel
campo di forze conservativo F ammette un'energia potenziale

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) = \mathcal{U}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} U(x_i)$$

essendo infatti

$$F_i = F(x_i) = -\vec{\nabla}_i \mathcal{U}(\mathbf{x}). \tag{4.6}$$

Non è questo l'unico caso interessante in Meccanica. Ricordiamo che, se indichiamo con |x| il modulo di un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  allora  $\nabla |x| = x/|x| = vers(x)$ . Consideriamo ora il modello di un sistema isolato di due punti soggetto a forze di interazione reciproca soddisfacenti a coppie il principio di azione e reazione. Segue che, per tale sistema, il sistema di forze è conservativo se ammette un'energia potenziale della forma

$$U(x_1, x_2) = \varphi(|x_1 - x_2|), \qquad \varphi : \text{Dom}(\varphi) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

In tal caso infatti

$$F_{12} = -\vec{\nabla}_{x_1} U(x_1, x_2) = -\varphi'(|x_1 - x_2|) vers(x_1 - x_2)$$

e il principio di azione e reazione è rispettato:

$$F_{21} = -\vec{\nabla}_{x_2} U(x_1, x_2) = -F_{12}.$$

Se abbiamo un sistema di N punti materiali, il principio di sovrapposizione degli effetti porta a scrivere un'energia potenziale delle forze di interazione della forma

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^{N} U(x_i, x_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^{N} \varphi(|x_i - x_j|).$$

**Esempi** Potenziale di una forza costante,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 

$$F(\mathbf{x}) = a, \qquad U(\mathbf{x}) = -a \cdot \mathbf{x}$$

Potenziale di una forza elastica, h > 0

$$F(\mathbf{x}) = -h\mathbf{x} = -h|\mathbf{x}|vers(\mathbf{x}), \qquad U(\mathbf{x}) = \frac{h}{2}\mathbf{x}^2$$

Potenziale della forza gravitazionale con centro nell'origine

$$F(\mathbf{x}) = -\frac{\gamma}{\mathbf{x}^2} vers(\mathbf{x}) = -\gamma \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad U(\mathbf{x}) = \frac{\gamma}{|\mathbf{x}|}$$

## 4.1.2 Teorema di conservazione dell'energia

La proprietà fondamentale delle forze conservative, riassunta anche nel loro nome, è che nel moto di un sistema particellare libero soggetto a sole forze conservative l'energia totale del sistema

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T + \mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i^2 + \mathcal{U}(\mathbf{x})$$

data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, si conserva. La dimostrazione di questo risultato, che ritroveremo nel caso dei sistemi soggetti a vincoli olonomi fissi e ideali, si fa per verifica diretta. Non risulta più difficile dimostrare il seguente risultato più generale.

Teorema 4.1.1 (Teorema di variazione dell'energia) Il sistema di N punti materiali sia soggetto a forze conservative  $F_i = -\vec{\nabla}_i \mathcal{U}(\mathbf{x})$  e ad altre forze, anche dipendenti dalla velocità  $R_i = R_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ . Allora, lungo i moti per i quali  $m_i \ddot{x}_i = F_i + R_i$  per ogni i = 1, ..., N si ha

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{N} [m_i \ddot{x}_i + \vec{\nabla}_i \mathcal{U}(\mathbf{x})] \cdot \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{N} [F_i + R_i - F_i] \cdot \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{N} R_i \cdot \dot{x}_i.$$

## Forze dissipative e giroscopiche

Relativamente alla proprietà di conservare o meno l'energia totale, distinguiamo tra forze dissipative per le quali

$$\sum_{i=1}^{N} R_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \cdot x_i < 0,$$

e forze *giroscopiche* per le quali

$$\sum_{i=1}^{N} R_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \cdot x_i = 0$$

ne segue che, per sistemi soggetti a sole forze conservative e giroscopiche, l'energia totale meccanica si conserva. Esempi di forze dissipative e giroscopiche sono rispettivamente le forze linearmente viscose  $R=-k\dot{x}$  e la forza di Coriolis  $F=-2m(\omega\wedge\dot{x})$ .

#### Richiamo: trasformazioni lineari in uno spazio euclideo

Sono forse utili alcuni richiami sulle trasformazioni lineari. Sia V spazio vettoriale di dimensione n. Ove necessario, distingueremo il vettore  $\mathbf{u}$  di V dall'n-upla u delle sue componenti rispetto ad una base data di V. Valgono allora

**Proposizione 4.1.1** Siano  $e_i^*$ ,  $e_i$  due basi di V, dette rispettivamente base fissa e base mobile. Allora esiste unica un'applicazione lineare  $A \in End(V)$  tale che

$$\mathbf{e}_i = A\mathbf{e}_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

**Proposizione 4.1.2** Siano  $\mathbf{e}_i^*$  e  $\mathbf{e}_i$  basi ortonormali, ovvero  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j^* = \delta_{ij}$ . Sia

$$\mathcal{A}_{ij} = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j = e_i^* \cdot A e_i^*$$

la matrice le cui colonne sono le componenti dei vettori  $\mathbf{e}_i$  nella base  $\mathbf{e}_i^*$  e indichiamo con  $\mathcal{A}^T$  la trasposta di  $\mathcal{A}$ . Allora:

- i) Se **u** ha componenti  $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$  nella base fissa, le componenti di **u** nella base mobile  $e_i$  sono  $u = \mathcal{A}^T u^*$
- ii) le componenti nella base fissa  $\mathbf{e}_i^*$  del vettore trasformato  $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$  sono  $v = \mathcal{A}u^*$  mentre quelle nella base mobile sono invariate pari a  $u^*$ .
- iii) la matrice  $\mathcal{A}$  è ortogonale, ovvero  $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T$ .

**Dimostrazione**. Dimostriamo i)

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = \sum_j u_j^* e_j^* \cdot \mathbf{e}_i = \sum_j \mathcal{A}_{ji} u_j^* = (\mathcal{A}^T u^*)_i$$

dimostriamo ii)

$$v_i = A\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i^* = A(\sum_j u_j^* \mathbf{e}_j^*) \cdot \mathbf{e}_i^* = \sum_j u_j^* A \mathbf{e}_j^* \cdot \mathbf{e}_i^* = \sum_j A_{ij} u_j^* = (Au^*)_i.$$

dimostriamo iii)

$$(\mathcal{A}^T \mathcal{A})_{ij} = \sum_{k=1}^n (\mathcal{A}^T)_{ik} \mathcal{A}_{kj} = \sum_{k=1}^n \mathcal{A}_{ki} \mathcal{A}_{kj} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{e}_k^* \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_k^* \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

# 4.2 Cinematica dei sistemi rigidi

Indichiamo con  $\mathcal{E}_3$  lo spazio euclideo tridimensionale, uno spazio vettoriale tridimensionale dotato di un prodotto scalare definito positivo. Sia  $(O, \mathbf{e}_i^*)$ , i=1,2,3, base ortonormale di  $\mathcal{E}_3$ , detta terna fissa. Data un'altra base ortonormale  $(O, \mathbf{e}_i)$  di  $\mathcal{E}_3$ , detta terna mobile, indichiamo con R l'applicazione lineare che manda  $\mathbf{e}_i^*$  in  $\mathbf{e}_i$  e con  $\mathcal{R}$  la matrice delle componenti dei versori  $\mathbf{e}_i$  rispetto a  $\mathbf{e}_i^*$ :

$$\mathcal{R}_{ij} := \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j).$$

Sia data una curva liscia (basta  $C^1$ )  $t \mapsto \mathcal{R}(t) \in SO(3)$ , oppure, è equivalente,  $t \mapsto \mathcal{R}(t) \in \mathcal{O}(3)$  con  $\mathcal{R}(0) = \mathbb{I}$ ; rimane così definito il moto della terna  $(O, e_i(t))$ , necessariamente ortonormale, che diremo mobile, rispetto alla terna fissa.

## 4.2.1 Velocità angolare

Sia  $\mathbf{u}$  un vettore avente componenti costanti  $u^*$  nella base fissa. Allora, per (1)

$$\mathbf{u}(t) = R\mathbf{u}$$

è un vettore solidale alla base mobile, ovvero ha componenti costanti  $u = u^*$  in tale base. Per ii), le componenti di  $\mathbf{u}(t)$  nella base fissa sono

$$u^*(t) = \mathcal{R}(t)u^*. \tag{4.7}$$

Le loro derivate sono le componenti nella base fissa del vettore  $\dot{\mathbf{u}}$  che esprime la velocità di  $\mathbf{u}$  rispetto alla base fissa. Esse sono quindi

$$(\dot{u})^*(t) = \dot{\mathcal{R}}(t)u^* \tag{4.8}$$

Se voglio trovare le componenti di  $\dot{\mathbf{u}}$  nella base mobile uso i) della Prop.4.1.2

$$\dot{u}(t) = \mathcal{R}^T (\dot{u})^* = \mathcal{R}^T \dot{\mathcal{R}} u^* = \mathcal{R}^T \dot{\mathcal{R}} u. \tag{4.9}$$

Derivando la relazione  $\mathcal{R}\mathcal{R}^T = \mathcal{R}^T\mathcal{R} = \mathbb{I}$  rispetto al tempo, ad esempio

$$\dot{\mathcal{R}}^T \mathcal{R} + \mathcal{R}^T \dot{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}^T \dot{\mathcal{R}})^T + \mathcal{R}^T \dot{\mathcal{R}} = 0,$$

si vede subito che le matrici

$$\Omega_f = \dot{\mathcal{R}} \mathcal{R}^T, \qquad \Omega_m = \mathcal{R}^T \dot{\mathcal{R}}$$

sono antisimmetriche:  $\Omega + \Omega^T = 0$ . Le relazioni (4.8) e (4.9) permettono di esprimere, nella base fissa o nella base mobile, le componenti del vettore velocità –ovviamente velocità rispetto alla base fissa– di un vettore solidale alla base mobile

$$(\dot{u})^* = \Omega_f u^*, \qquad \dot{u} = \Omega_m u.$$

In dimensione 3, esse costituiscono la rappresentazione, rispettivamente nella base fissa e mobile di un vettore  $\omega$ , detto velocità angolare. Vale infatti

$$\Omega_f = \mathcal{R}\Omega_m \mathcal{R}^T.$$

Teorema 4.2.1 (di rappresentazione degli operatori antisimmetrici di  $\mathcal{E}_3$ ) Per ogni matrice A antisimmetrica esiste un unico vettore  $\omega \in \mathcal{E}_3$  tale che

$$Av = \omega \wedge v, \quad \forall \ v \in \mathcal{E}_3:$$

Dimostrazione. L'operatore

$$\omega(v) := \omega \wedge v$$

è lineare e antisimmetrico poichè la matrice  $\Omega_{ij}$  ad esso associata è antisimmetrica:

$$\Omega_{ij} := \mathbf{e}_i \cdot \omega(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \omega \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \wedge \omega = -\mathbf{e}_j \cdot \omega \wedge \mathbf{e}_i = -\Omega_{ji}.$$

Al variare di  $\omega$  in  $\mathcal{E}_3$ , gli operatori lineari  $\omega(\cdot)$  definiscono un sottospazio S di dimensione 3 dello spazio vettoriale Skew(3) degli operatori antisimmetrici di  $\mathcal{E}_3$ . Ora,

Skew(3) è sottospazio (varietà lineare) di  $M(3, \mathcal{R})$ , spazio vettoriale delle matrici  $3 \times 3$  su  $\mathcal{R}$ , isomorfo a  $\mathcal{E}_3$ , definito dalle 6 equazioni (vincoli)

$$Skew(3) = \{ A \in M(3, \mathcal{R}) : A_{ij} + A_{ji} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \}.$$

Ma allora dim  $Skew(3) = \dim M(3, \mathcal{R}) - 6 = 9 - 6 = 3 = \dim S$ , pertanto  $S \equiv Skew(3)$ .

L'unico vettore  $\omega^*$  (risp.  $\omega$ ) associato ad  $\Omega_f$  (risp.  $\Omega_m$ ) in modo che

$$\omega^* \wedge u = \Omega_f u, \qquad \omega \wedge u = \Omega_m u \quad \forall \ u \in \mathcal{E}_3$$

è detto rappresentazione della velocità angolare del moto  $t \mapsto R(t)$  nella terna fissa (risp. terna mobile):

$$\omega = \sum_{i} \omega_{i}^{*} \mathbf{e}_{i}^{*} = \sum_{i} \omega_{i} \mathbf{e}_{i}.$$

Si osservi che  $\omega$  è vettore libero, cioè non è definito il suo punto di applicazione; la distinzione tra la rappresentazione della velocità angolare del moto nella terna fissa (velocità angolare nello spazio) e nella terna mobile (velocità angolare nel corpo) è utile nella teoria del Corpo Rigido.

Per non appesantire l'esposizione, in quanto segue indichiamo semplicemente con  $\Omega$  la matrice  $\Omega_m$ 

#### Formule di Poisson

Dalla (4.9) per  $v = e_i$  si hanno subito le Formule di Poisson:

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \Omega \mathbf{e}_i = \omega \wedge \mathbf{e}_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{4.10}$$

Talvolta è utile esprimere  $\omega$  in funzione degli  $\mathbf{e}_i$  e delle loro derivate temporali: da

$$\mathbf{e}_i \wedge \dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_i \wedge (\omega \wedge \mathbf{e}_i) = \omega - (\mathbf{e}_i \cdot \omega)\mathbf{e}_i,$$

sommando su i

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \wedge \dot{\mathbf{e}}_i = 3\omega - \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i \cdot \omega) \mathbf{e}_i = 2\omega$$

si ha

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \wedge \dot{\mathbf{e}}_i. \tag{4.11}$$

**Esempio 1** (Rotazioni piane). Supponiamo che nel moto della terna  $(O, \mathbf{e}_i)$  rispetto a  $(O, \mathbf{e}_i^*)$  risulti  $\mathbf{e}_3^* \equiv \mathbf{e}_3$  per ogni t. Allora, detto  $\vartheta = \vartheta(t)$  l'angolo tra  $\mathbf{e}_1^*$  ed  $\mathbf{e}_1(t)$ , valutato in senso antiorario, la matrice  $\mathcal{R} \in SO(3)$  è data da

$$\mathcal{R}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0\\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\Omega = \mathcal{R}^T \dot{\mathcal{R}}$  risulta essere

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\vartheta} & 0\\ \dot{\vartheta} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

antisimmetrica, come richiesto. Il vettore  $\omega$  ad essa univocamente associato imponendo la condizione  $\omega \wedge v = Av$ ,  $\forall v \in \mathcal{E}_3$  risulta essere  $\omega = \dot{\vartheta}\mathbf{e}_3 = \dot{\vartheta}\mathbf{e}_3^*$  (la facile verifica è lasciata allo studente), ovvero la velocità angolare è un vettore libero ortogonale al piano per  $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ . Si noti che in questo caso particolare, le rappresentazione della velocità angolare nella terna fissa e mobile sono uguali.

#### 4.2.2 Velocità dei vettori non solidali

Generalizziamo quanto visto nel paragrafo 4.2.1 al caso di un vettore non solidale alla terna mobile

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{3} u_i(t)\mathbf{e}_i(t). \tag{4.12}$$

Seguiamo quindi gli stessi passi in (4.7)– (4.9) scrivendo le componenti di  $\mathbf{u}(t)$  nella base fissa

$$u^*(t) = \mathcal{R}(t)u(t), \qquad (\dot{u}(t))^* = \dot{\mathcal{R}}u(t) + \mathcal{R}(t)u'(t)$$

e derivando rispetto al tempo. Le componenti del vettore velocità associato espresse nella base mobile sono quindi

$$\dot{u}(t) = \mathcal{R}^T \dot{\mathcal{R}} u(t) + u'(t) = \omega \wedge u(t) + u'(t).$$

La regola mnemonica per ottenere il risultato sopra esposto consiste nel derivare direttamente l'espressione (4.12) usando la regola di Leibnitz e facendo uso delle formule di Poisson

$$\dot{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{3} u_i'(t)\mathbf{e}_i(t) + u_i(t)\dot{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^{3} u_i'(t)\mathbf{e}_i(t) + u_i(t)\omega \wedge \mathbf{e}_i$$
(4.13)

Si ottiene l'espressione

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + \omega \wedge \mathbf{u}$$

ove il termine  $\mathbf{u}'$  si interpreta come velocità del vettore rispetto alla terna mobile  $T_m$  e il termine  $\omega \wedge \mathbf{u}$  è la velocità di trascinamento del vettore, ovvero è la velocità rispetto alla terna fissa del vettore solidale alla terna mobile coincidente con  $\mathbf{u}$ .

Osservazione importante. Il vettore velocità angolare gode della specialissima proprietà che la sua velocità rispetto alla terna fissa coincide con la velocità rispetto alla terna mobile. Si ha infatti per il risultato appena trovato che

$$\dot{\omega} = \omega' + \omega \wedge \omega = \omega'. \tag{4.14}$$

# 4.2.3 Triedro di Frenet

Sia  $(O^*, \mathbf{e}_i^*)$  sistema di riferimento solidale ad uno spazio inerziale e

$$O^*P(t) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(t)\mathbf{e}_i^*, \quad t \in [0, T]$$

il moto di un punto materiale nella terna assoluta. Supponiamo che non vi siano istanti di arresto, ovvero che  $\dot{\gamma}_i \neq 0$  per qualche i ad ogni  $t \in [0,T]$  e che il punto non occupi mai la stessa posizione ad istanti diversi di tempo. Dal punto di vista

geometrico, allora, l'insieme dei punti dello spazio occupati dal moto è una varietà uno-dimensionale detta anche sostegno della curva  $O^*P(\cdot)$  o traiettoria. La lunghezza d'arco della curva traiettoria si definisce, come naturale conseguenza della nozione di distanza euclidea, come

$$s(t) = \int_0^t |v|(\lambda)d\lambda = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}_i^2(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda, \quad t \in [0, T].$$
 (4.15)

Per l'ipotesi fatta di moto senza istanti di arresto,  $t \mapsto s(t)$  è funzione invertibile poichè  $\dot{s}(t) = |v(t)| > 0$ ; detta t = t(s) l'inversa, indichiamo con

$$O^*P(s) = O^*P(t(s))$$

la traiettoria riferita al parametro d'arco s. Indichiamo con  $\dot{f}=df/dt$  la derivata rispetto al tempo e con f'=df/ds la derivata rispetto al parametro d'arco. Si ha allora

$$\frac{dO^*P}{ds} = \frac{dO^*P}{dt}\frac{dt}{ds} = v(t(s))t'(s)$$

e

$$|\frac{dO^*P}{ds}| = |v(t(s))|(\frac{ds}{dt})^{-1} = \frac{|v|}{|v|} = 1.$$

Indichiamo con

$$\mathbf{e}_1(s) = d\frac{O^*P}{ds}(s)$$

il versore che risulta tangente alla curva traiettoria del moto. Dalla relazione  $\mathbf{e}_1(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) \equiv 1$  si ha che  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1' = 0$  pertanto il vettore  $\mathbf{e}_1'$  risulta ortogonale a  $\mathbf{e}_1$  e quindi alla curva nel punto considerato. E' naturale introdurre allora il versore normale

$$\mathbf{e}_2(s) = \frac{\mathbf{e}_1'}{|\mathbf{e}_1'|} = \frac{1}{k(s)}\mathbf{e}_1'(s)$$

e il versore binormale

$$\mathbf{e}_3(s) = \mathbf{e}_1(s) \times \mathbf{e}_2(s).$$

La quantità positiva  $k(s) = |\mathbf{e}_1'|$  è detta curvatura della curva e il suo reciproco  $\rho(s) = k^{-1}(s)$  è detto raggio di curvatura. Essa misura di quanto velocemente la curva si discosta dalla retta tangente nel punto considerato. Si ha infatti che il cerchio di centro

$$OC(s) = O^*P(s) + \rho(s)\mathbf{e}_2(s)$$

e raggio  $\rho(s)$  è tangente alla curva nel punto considerato e costituisce l'approssimazione di ordine due della curva, mentre la retta tangente ne costituisce l'approssimazione di ordine uno. La terna mobile  $(P, \mathbf{e}_i(s))$  è detta Triedro di Frenet. Essa "segue" il punto P nella sua traiettoria. Se |v(t)|=1, il parametro d'arco s coincide con il parametro temporale t. Possiamo quindi applicare le formule viste in precedenza sulla cinematica dei sistemi rigidi in moto relativo per studiare il moto assoluto della Terna di Frenet. In particolare vogliamo ricavare la velocità angolare associata al moto della terna di Frenet dalla formula (4.11). Calcoliamo allora da  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ 

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1' \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2' = k(s)\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2'$$

Siccome  $\mathbf{e}_3$  è un versore,  $\mathbf{e}_3' \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$  e, contemporaneamente, per la relazione sopra scritta,  $\mathbf{e}_3' \perp \mathbf{e}_1$  quindi necessariamente  $\mathbf{e}_3' \parallel \mathbf{e}_2$ , e possiamo scrivere

$$\mathbf{e}_3' = \tau \mathbf{e}_2, \qquad |\tau(s)| = |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2'|.$$

La quantità con segno  $\tau(s)$  è detta *torsione*. Essa misura quanto velocemente la curva esce dal piano  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ , detto piano osculatore nel punto considerato. Le curve piane quindi hanno torsione nulla. Infine, da  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$  si ha facilmente

$$\mathbf{e}_2' = -\tau \mathbf{e}_3 - k\mathbf{e}_1.$$

Le formule di Poisson quindi, e la scelta del parametro d'arco generano le equazioni di Frenet della curva considerata  $\mathbf{e}' = d\mathbf{e}/ds$ 

$$\begin{cases}
\mathbf{e}_1' &= k(s)\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_2' &= -k(s)\mathbf{e}_1 - \tau(s)\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_3' &= \tau(s)\mathbf{e}_2
\end{cases}$$

Il Teorema fondamentale delle curve in  $\mathbb{R}^3$  afferma che le equazioni di Frenet, ossia l'assegnazione di curvatura k(s) e torsione  $\tau(s)$  individuano univocamente la curva (a meno di trasformazioni rigide del sistema di riferimento). Questo risultato, che analiticamente è conseguenza del teorema di esistenze e unicità della soluzione del sistema di e.d.o. di Frenet, è plausibile anche da un punto di vista geometrico, se si pensa che una curva nello spazio si può pensare come intersezione di due superfici e quindi può essere specificata assegnando due funzioni.

Il vettore velocità angolare associato al moto della terna di Frenet (vettore di Darboux) si determina da

$$2\omega = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_{i} \times \mathbf{e}'_{i} = \mathbf{e}_{1} \times \mathbf{e}'_{1} + \mathbf{e}_{2} \times \mathbf{e}'_{2} + \mathbf{e}_{3} \times \mathbf{e}'_{3} =$$

$$= \mathbf{e}_{1} \times k \ \mathbf{e}_{2} + \mathbf{e}_{2} \times -(k \ \mathbf{e}_{1} + \tau \mathbf{e}_{3}) + \mathbf{e}_{3} \times \tau \mathbf{e}_{2} =$$

$$= k\mathbf{e}_{3} + k\mathbf{e}_{3} - \tau \mathbf{e}_{1} - \tau \mathbf{e}_{1}$$

da cui  $\omega = -\tau \mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_3$  che risulta quindi contenuto nel piano  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle$ .

#### Moto su una guida curvilinea liscia

Le formule trovate sono utili per esprimere velocità e accelerazione assolute del moto di un punto materiale lungo una guida curvilinea (vincolo unidimensionale) descritta da OP = OP(s). Il generico moto si può esprimere infatti dando la legge oraria s(t). Si ha allora

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dOP}{dt}(s(t)) = \mathbf{e}_1(s(t))\dot{s}(t) = \dot{s}\mathbf{t}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(s(t)) = \mathbf{e}_1(s(t))\ddot{s} + \dot{s}\mathbf{e}_1'\dot{s} = \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}^2k\mathbf{e}_2 = \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}^2k\mathbf{n}$$

ove abbiamo usato la notazione classica dei libri di Meccanica  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}, \ \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}, \ \mathbf{e}_3 = \mathbf{b}$ . Si vede che l'accelerazione del moto è contenuta nel piano  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle$ .

Se ora vogliamo studiare la dinamica del moto di un punto materiale P di massa m soggetto ad una forza attiva  $\mathbf{F}$  e alla reazione vincolare  $\mathbf{\Phi}$  (vedi più avanti al Capitolo sui sistemi vincolati) possiamo, partendo dalla equazione di Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}$$

proiettare la relazione appena scritta nel triedro di Frenet ottenendo

$$m(\ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}^2k\mathbf{n}) = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}$$

che si dettaglia in

$$\begin{cases} m\ddot{s} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{t} \\ mk(s)\dot{s}^2 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{n} \\ 0 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{b} \end{cases}$$

Se il vincolo ha componente tangenziale della reazione vincolare nulla,  $\Phi \cdot \mathbf{t} \equiv 0$  (si dice che il vincolo è privo di attrito), allora la determinazione della legge oraria si ottiene studiando l'equazione differenziale per s(t)

$$m\ddot{s}(t) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} = f(t, s, \dot{s}). \tag{4.16}$$

Nel caso di forze posizionali indipendenti dal tempo f = (s) l'equazione differenziale della dinamica (4.16) si può studiare con la teoria svolta nel paragrafo 1.3.1, del quale costituisce una importante applicazione.

## 4.2.4 Moti Rigidi

Sia S un sistema di n punti materiali. Il moto di S è descritto, rispetto ad una terna  $(O^*, \mathbf{e}_i^*)$  di  $\mathcal{E}_3$  dalle n funzioni  $t \mapsto O^*P_i(t)$  a valori in  $\mathbb{R}^3$ ;  $O^*P_i$  è detto vettore posizione del punto  $P_i$ .

**Definizione 4.2.1** Il moto di S è rigido se la distanza tra ogni coppia di punti di S non varia nel tempo.

Se in  $\mathcal{S}$ , sistema in moto rigido, è possibile individuare almeno tre punti non allineati, è anche possibile associare ad  $\mathcal{S}$  una terna  $(O, e_i)$  solidale ad  $\mathcal{S}$ , nel senso che le componenti dei vettori posizione  $OP_i$  rispetto alla terna solidale sono costanti nella terna solidale. Risulta allora, per  $i, j = 1, \ldots n$ 

$$P_i P_j = O^* P_j - O^* P_i = \sum_{k=1}^3 u_k \mathbf{e}_k.$$

Possiamo ora applicare le formule precedenti che esprimono la derivata temporale dei vettori solidali ottenendo

$$\dot{u} = \frac{d}{dt}P_iP_j = \frac{d}{dt}O^*P_j - \frac{d}{dt}O^*P_i = v_j - v_i = \omega \wedge u = \omega \wedge P_iP_j$$

ove ora le  $v_i, v_j$  hanno il significato di velocità dei punti  $P_i$  rispetto alla terna  $(O^*, \mathbf{e}_i^*)$  e  $\omega$  è la velocità angolare del moto di  $(O, \mathbf{e}_i)$  rispetto a  $(O^*, \mathbf{e}_i^*)$ . La relazione precedente è nota come Formula fondamentale dei moti rigidi:

$$(4) v_j = v_i + \omega \wedge P_i P_j, i, j = 1, \dots n$$

ove tutte le quantità che vi compaiono sono espresse nel riferimento  $(O, e_i)$ . Scambiando il ruolo delle due terne si deduce subito che la forma della (4) è indipendente dal riferimento.

**Definizione 4.2.2** Moto di puro rotolamento di un disco rigido su di una guida rettilinea

Un disco omogeneo D di raggio R e centro G rotola sull'asse per  $\mathbf{e}_1^*$  di un riferimento  $(O^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$  mantenendosi nel piano  $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*)$ . Il disco (sistema rigido) definisce il moto (rigido piano) di una terna  $(G, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  solidale al disco.

Il moto del disco è di puro rotolamento se la velocità del punto  $c \in D$  che all'istante t coincide con il punto di contatto  $C^*$  tra il disco e la guida è nulla per ogni t. Abbiamo visto (Esercizio 1) che la velocità angolare associata al moto piano della terna solidale è  $\omega = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_3 = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_3^*$ . Usando la formula fondamentale dei moti rigidi, ricaviamo la velocità del centro G del disco

$$v_G = v_C + \omega \wedge CG = 0 + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_3^* \wedge R \mathbf{e}_2^* = -R \dot{\vartheta} \mathbf{e}_1^*,$$

parallela ad  $\mathbf{e}_1^*$ . Di solito l'angolo tra  $\mathbf{e}_1^*$  e  $\mathbf{e}_1$  è valutato in senso orario, pe cui  $v_G = R\vartheta\mathbf{e}_1^*$ . Integrando quest'ultima relazione si ottiene lo spazio percorso dal centro G lungo la guida

$$s(t) = x_G(t) = R\vartheta(t) + R\vartheta(t_0). \tag{4.17}$$

#### 4.2.5 Cinematica relativa

Nello studio della forma delle equazioni del moto di un sistema in relazione alla terna di versori scelta come base di  $\mathcal{E}_3$ , le terne via via introdotte sono dette sistemi di riferimento o osservatori. Sia  $T^a = (O^*, \mathbf{e}_i^*)$  sistema di riferimento (solidale ad uno spazio) inerziale e  $T^r = (O, e_i)$  sistema di riferimento relativo. Sia  $\omega^{\tau}$  la velocità angolare del moto di  $T^r$  rispetto a  $T^a$ ;  $\omega^{\tau}$  è detta velocità angolare di trascinamento.

Ricaviamo l'espressione delle grandezze cinematiche (velocità, accelerazione) del moto di un sistema S di n punti materiali  $P_i$  nelle terne  $T^a$  e  $T^r$ . Iniziamo scrivendo la relazione, valida per ogni  $P_i$ 

$$O^*P_i(t) = O^*O(t) + OP_i(t)$$
(4.18)

ovvero (indici ripetuti qui e nel seguito sottintendono una sommatoria da 1 a 3)

$$x_i^*(t)\mathbf{e}_i^* = x_{Oi}^*(t)\mathbf{e}_i^* + x_i(t)\mathbf{e}_i(t).$$

Tale relazione e la sua derivazione rispetto al tempo si basano su di un'ipotesi che supporremo sempre verificata, il *Postulato della Meccanica Classica o Galileiana*: Lunghezze dei vettori ed intervalli di tempo sono indipendenti dall'osservatore.

Derivando la (4.18) rispetto a t

$$v_P^a = \dot{x}_i^* \mathbf{e}_i^* = \dot{x}_{Oi}^* \mathbf{e}_i^* + \dot{x}_i \mathbf{e}_i + x_i \dot{\mathbf{e}}_i$$

e ricordando le formule di Poisson  $\dot{\mathbf{e}}_i = \omega \wedge \mathbf{e}_i$ , ricaviamo la relazione (Formula di Galileo) tra la velocità assoluta  $v^a$  e relativa  $v^r = \dot{x}_i \mathbf{e}_i$ 

$$v_P^a = v_P^r + v_P^\tau \tag{4.19}$$

ove

$$v_P^{\tau} = v_O^a + \omega^{\tau} \wedge OP$$

è detta velocità di trascinamento. Essa è la velocità del punto P' sovrapposto a P e solidale al moto di  $T^r$ .

Deriviamo la (4.19) per ottenere la relazione tra le accelerazioni, usando ancora le formule di Poisson

$$\frac{d}{dt}v_P^r = a_P^r + \omega^\tau \wedge v_P^r$$

$$\frac{d}{dt}v_P^{\tau} = \frac{d}{dt}(v_O^a + \omega^{\tau} \wedge OP) = a_O^a + \dot{\omega}^{\tau} \wedge OP + \omega^{\tau} \wedge (v_P^r + \omega^{\tau} \wedge OP)$$

Pertanto

$$a_P^a = \frac{d}{dt}v_P^a = a_O^a + \dot{\omega}^\tau \wedge OP + 2\omega^\tau \wedge v_P^r + \omega^\tau \wedge (\omega^\tau \wedge OP)$$

che si compendia nella Formula di Coriolis

$$a_P^a = a_P^r + a_P^\tau + a_P^c (4.20)$$

ove i termini al secondo membro sono detti rispettivamente accelerazione relativa, di trascinamento e complementare o di Coriolis e valgono

$$a_P^r = \ddot{x}_i \mathbf{e}_i, \qquad a_P^\tau = a_O^a + \dot{\omega}^\tau \wedge OP + \omega^\tau \wedge (\omega^\tau \wedge OP), \qquad a_P^c = 2\omega^\tau \wedge v_P^r$$

Anche ora  $a_P^{\tau}$  ha il significato di accelerazione del punto P' sovrapposto a P e solidale al moto di  $T^r$ .

Osservazione. La velocità angolare  $\omega^{\tau}$  del moto (di trascinamento) di  $T^r$  rispetto a  $T^a$  è un vettore libero. La sua derivata temporale gode della proprietà seguente: da

$$\omega^{\tau} = \omega_i^* \mathbf{e}_i^* = \omega_i \mathbf{e}_i,$$

usando ancora le formule di Poisson, si trova

$$\frac{d}{dt}\omega^{\tau} = \dot{\omega}_i^* \mathbf{e}_i^* = \dot{\omega}_i \mathbf{e}_i + \omega_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\omega} + \omega \wedge \omega = \dot{\omega}_i \mathbf{e}_i.$$

**Proposizione 4.2.1** Se il moto di S è rigido rispetto a  $T^a$ , ovvero esiste un vettore  $\omega^a$  tale che

$$v_{P_j}^a = v_{P_i}^a + \omega^a \wedge P_i P_j, \quad \forall i, j = \dots n,$$

allora il moto di S è rigido rispetto ad ogni  $T^r$ .

**Dimostrazione**. Applichiamo la formula di Galileo al moto di  $P_i, P_j$ 

$$\begin{array}{lcl} v_{P_i}^a & = & v_{P_i}^\tau + v_{P_i}^r = v_O^a + \omega^\tau \wedge OP_i + v_{P_i}^r \\ v_{P_j}^a & = & v_{P_j}^\tau + v_{P_j}^r = v_O^a + \omega^\tau \wedge OP_j + v_{P_j}^r \end{array}$$

e sottraiamo membro a membro le relazioni precedenti

$$v_{P_{j}}^{r} - v_{P_{i}}^{r} = v_{P_{j}}^{a} - v_{P_{i}}^{a} + \omega^{\tau} \wedge (OP_{j} - OP_{i}) = \omega^{a} \wedge P_{i}P_{j} + \omega^{\tau} \wedge P_{j}P_{i} = (\omega^{a} - \omega^{\tau}) \wedge P_{i}P_{j}$$

$$(4.21)$$

ovvero, il moto di  $\mathcal{S}$  rispetto a  $T^r$  è rigido con  $\omega^r = \omega^a - \omega^\tau$ 

La Proposizione dimostrata si enuncia anche dicendo che la proprietà di rigidità del moto di  $\mathcal{S}$  è indipendente dall'osservatore. La (4.21) fornisce anche la legge di composizione delle velocità angolari di moti rigidi

$$\omega^a = \omega^\tau + \omega^r. \tag{4.22}$$

### Disco che rotola senza strisciare sul piano

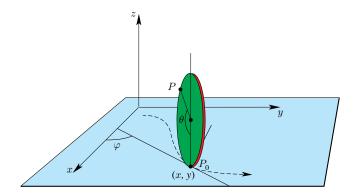


Figura 4.1: Disco che rotola senza strisciare sul piano

Come esercizio sulla legge di composizione delle velocità angolari esplicitiamo le relazioni cinematiche che descrivono la condizione di moto di puro rotolamento per un disco omogeneo di raggio r che i) rimane costantemente verticale (parallelo a  $\mathbf{e}_3$ ) e ii) mantiene il piano che contiene il disco sempre parallelo al vettore velocità del baricentro (o equivalentemente alla velocità del punto di contatto). Introduciamo la terna  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  ove  $\mathbf{t}$ ) è il versore orizzontale parallelo al piano che contiene il disco,  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$  è il versore parallelo al vettore  $P_0G$  e  $\mathbf{n}$  è definito dalla condizione  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ . La varietà delle configurazioni del disco è  $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$  riferita alle coordinate  $x, y, \varphi, \theta$  ove (x, y) sono le coordinate del baricentro coincidenti con le coordinate del punto di contatto  $P_0$ ,  $\varphi$  è l'angolo che il versore  $\mathbf{t}$  forma con  $\mathbf{e}_1$  e  $\theta$  è l'angolo tra  $\mathbf{e}_3$  ed il vettore GP. La velocità angolare del disco rispetto al riferimento  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  è semplicemente  $\omega^r = \dot{\theta}\mathbf{n}$  mentre la velocità angolare del disco rispetto al sistema Oxyz è  $\omega^\tau = \dot{\varphi}\mathbf{b}$ . Si ha quindi che la velocità angolare del disco rispetto alla terna fissa è

$$\omega^a = \omega^\tau + \omega^r = \dot{\varphi}\mathbf{t} + \dot{\theta}\mathbf{n}.$$

La condizione di puro rotolamento è  $v_{P_0} = v_G + \omega \wedge GP_0 = 0$  ovvero

$$v_G = \omega \wedge P_0 G$$

ove  $v_G = \dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2$ ,  $P_0G = r\mathbf{b}$  e  $\mathbf{t} = \cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_2$ . Sostituendo troviamo due equazioni che coinvolgono posizioni e velocità del moto, le equazioni del vincolo non olonomo<sup>1</sup> di puro rotolamento

$$\dot{x} = r\cos\varphi\dot{\theta}, \qquad \dot{y} = r\sin\varphi\dot{\theta}.$$

Mostriamo invece che se il disco verticale rotola senza strisciare su una traiettoria curvilinea assegnata  $OP_0 = OP_0(s)$  ove s = s(t) è l'ascissa curvilinea, allora, il vincolo è integrabile. In questo caso il sistema ha due sole coordinate  $s, \theta$  poichè

$$v_G = \frac{d}{dt} OP_0(s(t)) = \dot{s}\mathbf{t}(s)$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Un vincolo che coinvolge le posizioni e le velocià del sistema si dice non olonomo o non integrabile se tali relazioni *non* si possono ottenere per differenziazione rispetto al tempo di una relazione –il vincolo olonomo– che coinvolge le sole posizioni del sistema

e quindi l'angolo  $\varphi$  è individuato dalla relazione  $\cos \varphi = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{e}_1$ . La condizione di puro rotolamento si traduce in questo caso semplicemente come

$$v_G = \dot{s}\mathbf{t}(s) = r\dot{\theta}\mathbf{t}(s)$$

e quindi  $s(t) = r\theta(t) + \theta_0$ 

# 4.3 Dinamica in un riferimento non inerziale

Le formula trovate, la formula di Galileo (4.19) per le velocità e la formula di Coriolis (4.20) per le accelerazioni, unitamente alla legge di Newton (4.1) permettono di risolvere il problema posto ad inizio del paragrafo (4.2) della scrittura delle equazioni del moto in un rifermento non inerziale. Si ha infatti in un riferimento inerziale

$$ma_P^a = m(a_P^r + a_P^\tau + a_P^c) = F$$

per cui in un riferimento non inerziale la relazione tra l'accelerazione misurata e la forza agente deve essere modificata come segue

$$ma_P^r = F - m(a_P^\tau + a_P^c) = F + F^{in}$$
 (4.23)

introducendo le forze fittizie o forze d'inerzia. Nella maggior parte delle applicazioni si considerano sistemi non inerziali aventi origine in comune con il sistema inerziale e con velocità angolare di trascinamento costante, per cui delle forze d'inerzia sopravvivono solo la forza di Coriolis, dipendente dalla velocità relativa

$$F^{cor} = -2m\omega^{\tau} \wedge v_P^r$$

e la forza centrifuga, posizionale,

$$F^{cf} = -m\omega^{\tau} \wedge (\omega^{\tau} \wedge OP).$$

### Energia potenziale centifuga

Come esercizio, mostriamo che la forza centrifuga è conservativa e ammette l'energia potenziale x=OP

$$U(x) = -\frac{m}{2}(\omega \wedge x)^2 \tag{4.24}$$

Sia  $\Omega$  la matrice emisimmetrica associata a  $\omega$ . E' facile controllare che  $\Omega^2=\Omega\Omega$  è simmetrica. Si ha allora

$$(\omega \wedge x)^2 = (\Omega x)^2 = (\Omega x, \Omega x) = (\Omega \Omega^T x, x) = -(\Omega^2 x, x)$$

da cui

$$\vec{\nabla}U(x) = -\frac{m}{2}\vec{\nabla}(\omega \wedge x)^2 = m\Omega^2 x = m\omega \wedge (\omega \wedge x) = -F^{cf}.$$

#### 4.3.1 Forza di marea

Come applicazione della teoria sulla dinamica in un riferimento non inerziale, consideriamo il fenomeno della forza di marea che si esercita su un corpo celeste esteso (cioè non considerato in prima approssimazione come puntiforme) soggetto ad un centro di attrazione gravitazionale. Diamo qui una trattazione semplificata del fenomeno (che è veramente molto complesso) avente lo scopo di far capire la natura della forza di marea. Consideriamo un corpo massivo (per esempio il sole) di massa M e un pianeta di massa molto inferiore m in orbita, non necessariamente circolare, attorno ad esso. Supponiamo che il centro di massa del sistema coincida con il centro S del pianeta massivo e che il sistema non sia soggetto ad influenze esterne. Introduciamo una terna assoluta  $\mathcal{E}^*$  con origine coincidente con il centro del corpo massivo e avente assi fissi rispetto al sistema delle stelle lontane e una terna mobile  $\mathcal{E}$  solidale con il pianeta orbitante e avente origine nel centro O del pianeta. L'orbita del pianeta è piana, la velocità angolare assoluta della terna mobile  $\omega^{\tau} = \omega$  è diretta come il terzo versore e le due terne hanno il terzo versore  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^*$  ortogonale al piano dell'orbita. Consideriamo un punto P del pianeta orbitante descritto dal raggio vettore  $\mathbf{r} = OP$ , una porzione dm di massa attorno a P e studiamo la dinamica di P nel riferimento non inerziale  $\mathcal{E}$ . Infine, indichiamo con  $\mathbf{R} = SO$  il vettore che descrive la posizione del centro del pianeta per cui  $OP = SO + OP = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ . Questa impostazione quindi permette di studiare l'effetto della attrazione gravitazionale del sole su un corpo esteso come la terra. Dalla (4.23) possiamo scrivere

$$dma_P^r = F^{grav}(P) - dm(a_P^\tau + a_P^c)$$

$$\tag{4.25}$$

dove, in questo caso  $a_P^c \equiv 0$  perchè il punto è solidale alla terna mobile e

$$a_P^{\tau} = a_O^a + \omega^{\tau} \wedge (\omega^{\tau} \wedge OP) = a_O^a + a_P^{cf}$$

perchè la velocità angolare di trascinamento è costante. Facciamo l'ipotesi che il corpo orbitante  $\mathcal C$  abbia una densità di massa  $\rho$  a simmetria sferica. Il moto del suo baricentro G -che coincide con il centro 0- è determinato solo dalla risultate delle forze esterne, in questo caso la forza di attrazione gravitazionale. Un risultato dimostrato per la prima volta da Newton nei suoi Principia dice che la risultante della forza di gravità su un corpo esteso a simmetria sferica coincide con l'attrazione gravitazionale su un punto avete la stessa massa e posto nel centro O del corpo esteso. Pertanto

$$ma_O^a = \int_{\mathcal{C}} f^{grav}(p)\rho(p)dv = F^{grav}(O) = -\frac{GMm}{(\mathbf{R})^2}vers(\mathbf{R})$$

Dalla (4.25) si ha

$$dma_{P}^{r} = F^{grav}(P) - dma_{O}^{a} - dma_{P}^{cf}$$

$$= -\frac{GMdm}{(\mathbf{R} + \mathbf{r})^{2}}vers(\mathbf{R} + \mathbf{r}) + \frac{GMdm}{(\mathbf{R})^{2}}vers(\mathbf{R}) - dma_{P}^{cf}$$

$$= F^{grav}(P) - F^{grav}(O) - dma_{P}^{cf}$$

A parte la forza centrifuga dovuta alla rotazione del pianeta su se stesso, la porzione dm è soggetta ad una forza esterna pari alla differenza della forza di attrazione

gravitazionale nel punto generico P e nel centro O del corpo orbitante. Questa differenza è detta forza di marea nel punto P e vale

$$f_{mar}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = -\frac{GMdm}{(\mathbf{R} + \mathbf{r})^2} vers(\mathbf{R} + \mathbf{r}) + \frac{GMdm}{(\mathbf{R})^2} vers(\mathbf{R})$$
(4.26)

La traiettoria del corpo orbitante è nota; l'assegnazione di  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$  in (4.26) viene considerata come la restrizione di una forza conservativa a un vincolo mobile, pertanto la forza di marea è essa stessa conservativa (si veda in proposito la Proposizione 5.1.2).

Calcoliamo ora l'espressione della forza di marea nell'ipotesi comunemente verificata che  $R\gg r$ . Riscriviamo la (4.26) come

$$f_{mar}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = -\frac{GMdm}{(\mathbf{R} + \mathbf{r})^3} (\mathbf{R} + \mathbf{r}) + \frac{GMdm}{(\mathbf{R})^3} \mathbf{R}$$
(4.27)

Vale  $(\mathbf{R} + \mathbf{r})^2 = R^2 + r^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}$  da cui

$$(\mathbf{R} + \mathbf{r})^{-3} = ((\mathbf{R} + \mathbf{r})^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{R^3} (1 + (\frac{r}{R})^2 + 2\frac{r}{R}\cos(\mathbf{R}, \mathbf{r}))^{-\frac{3}{2}}$$

Posto  $\epsilon = \frac{r}{R}$ , facciamo uno sviluppo di Taylor della funzione sopra scritta attorno a  $\epsilon = 0$  e consideriamo solo i termini del primo ordine. Si trova

$$(\mathbf{R} + \mathbf{r})^{-3} = \frac{1}{R^3} (1 - 3\cos(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \frac{r}{R}) = \frac{1}{R^3} \left( 1 - 3\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} \right) + \mathcal{O}(\frac{r}{R})$$

Se sostituiamo nella (4.27) e approssimiamo  $\mathbf{R} + \mathbf{r}$  con  $\mathbf{R}$  nell'espressione risultante, otteniamo infine la forma approssimata della forza di marea

$$f_{mar}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \frac{GMdm}{R^3} \left[ 3\cos(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \frac{r}{R} \mathbf{R} - \mathbf{r} \right] = \frac{GMdm}{R^3} \left[ 3 \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} \mathbf{R} - \mathbf{r} \right]$$

Usando il prodotto tensore, vedi (4.28) possiamo riscrivere la forza di marea in una forma che mette in rilievo la dipendenza lineare da  $\mathbf{r}$  come

$$f_{mar}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \frac{GMdm}{R^3} \Big[ 3\mathbf{u}_R \otimes \mathbf{u}_R - \mathbb{I} \Big] \mathbf{r} = A(\mathbf{R}) \mathbf{r}$$

ove  $\mathbf{u}_R = \mathbf{R}/R$  è il versore della congiungente il centro di attrazione con il pianeta. Segue subito quindi che la forza di marea ammette il potenziale

$$U^{mar}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}A(\mathbf{R})\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}, \qquad f_{mar}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}U^{mar}(\mathbf{r})$$

Se nella terna mobile  $\mathbf{u}_R = \mathbf{e}_1$ , allora A = Diag[2, -1, -1]. Vediamo quindi che nel piano passante per il centro del pianeta e ortogonale a  $\mathbf{R}$  il contributo  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}$  è nullo e la forza di marea è diretta in direzione opposta ad  $\mathbf{r}$  e vale  $f = \frac{GMdm}{R^3}r$  mentre lungo  $\mathbf{R}$  ha direzione radiale e intensità doppia.

Se indichiamo con  $\gamma$  l'angolo tra i vettori  ${\bf R}$ e  ${\bf r},$  l'energia potenziale mareale si riscrive come

$$U^{mar}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \frac{GMdm}{R^3} (3\cos^2 \gamma - 1)\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

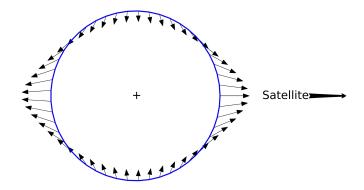


Figura 4.2: Forza di marea. Vista sul piano equatoriale

# 4.4 Cinematica dei sistemi particellari

Sia dato un sistema di riferimento inerziale  $(O, e_i)$ , i = 1, 2, 3 e consideriamo un sistema di punti materiali (sistema particellare)  $\mathcal{S} = \{(OP_i, m_i)\}$ ,  $i = 1, \ldots, n$ , ove  $m_i > 0$  è la massa del punto  $P_i$  e  $OP_i$  il raggio vettore dall'origine. Cominciamo introducendo alcune definizioni elementari. Il baricentro di  $\mathcal{S}$  è il vettore

$$OG := \frac{\sum_{i} m_{i} OP_{i}}{\sum_{i} m_{i}} = \frac{\sum_{i} m_{i} OP_{i}}{m}.$$

Una conseguenza immediata della definizione di baricentro è che

$$mv_G = m\frac{dOG}{dt} = \sum_i m_i v_i = P$$

ove P indica la quantità di moto di S. Definito il baricentro G, ha senso introdurre il sistema (non inerziale)  $(G, e_i)$  con origine coincidente con G ed assi sempre paralleli a quelli di  $(O, e_i)$ , detto sistema del baricentro per cui si ha (formula di composizione delle velocità)

$$\omega^{(\tau)} = 0, \quad v^{(\tau)} = v_G, \qquad v_i = v_i^{(\tau)} + v_i^{(r)} = v_G + v_i^{(r)}.$$

Si dimostrano facilmente le seguenti relazioni

$$\sum_{i} m_{i}GP_{i} = \sum_{i} m_{i}(OP_{i} - OG) = mOG - mOG = 0$$

da cui, derivando rispetto a t,

$$0 = \frac{d}{dt} \sum_{i} m_{i} G P_{i} = \sum_{i} m_{i} v_{i}^{(r)} = P^{(r)}.$$

Inoltre si ha per l'energia cinetica

$$2T = \sum_{i} m_i v_i^2 = \sum_{i} m_i (v_i^{(r)} + v_G)^2 = \sum_{i} m_i (v_i^{(r)^2} + m v_G^2 + 2v_G \cdot P^{(r)}),$$

da cui segue il Teorema di König

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}mv_G^2 + T^{(r)}.$$

Sia A un punto (fisso o mobile) nel riferimento inerziale; il momento angolare o momento della quantità di moto di S rispetto al polo A è

$$M_A = \sum_i AP_i \wedge m_i v_i;$$

usando la formula di variazione del momento di un sistema di vettori applicati al variare del polo si ha subito

$$M_A = AG \wedge P + M_G$$

ed essendo inoltre

$$M_G = \sum_i GP_i \wedge m_i v_i = \sum_i GP_i \wedge m_i (v_i^{(r)} + v_G) = \sum_i GP_i \wedge m_i v_i^{(r)} = M_G^{(r)}$$

si ha l'analogo del Teorema di König per il momento angolare

$$M_A = AG \wedge P + M_G^{(r)}$$
.

# 4.5 Cinematica dei sistemi particellari rigidi

Sia ora S sistema rigido e denotiamo con  $\omega$  la velocità angolare assoluta di S. Mostriamo preliminarmente che:

**Proposizione 4.5.1** Se S è rigido, allora G è solidale a S, ovvero

$$v_G = v_i + \omega \wedge P_i G, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Infatti, fissato  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$mv_G = \sum_i m_i v_i = \sum_i m_i (v_j + \omega \wedge P_j P_i) = mv_j + \omega \wedge \sum_i m_i P_j P_i,$$

ed essendo  $P_i P_i = GP_i - GP_j$ , si ha

$$mv_G = mv_j + \omega \wedge \sum_i m_i (GP_i - GP_j) = m(v_j + \omega \wedge P_j G).$$

Ne segue che il sistema  $S' = S \cup \{(OG, 0)\}$  è ancora un sistema rigido e in  $(G, e_i)$  il moto di S' ha un punto fisso G. Inoltre, da  $\omega^{(\tau)} = 0$ , usando la formula di composizione delle velocità angolari nei moti rigidi si ha che

$$\omega = \omega^{(\tau)} + \omega^{(r)} = \omega^{(r)}.$$

#### Tensore d'inerzia

Per un generico sistema rigido con un punto fisso A, il momento angolare e l'energia cinetica ammettono l'espressione seguente (si usa la formula del doppio prodotto vettore)

$$M_A = \sum_i AP_i \wedge m_i v_i = \sum_i m_i AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) =$$

$$= \sum_i m_i (AP_i^2 \omega - (AP_i \cdot \omega)AP_i) = \sum_i m_i (AP_i^2 \mathbb{I} - AP_i \otimes AP_i) \omega = I_A \omega$$

ove  $a \otimes b \in M(n)$  indica la matrice prodotto tensore dei due vettori  $a, b \in \mathbb{R}^n$ 

$$(a \otimes b)u := a(b \cdot u) \qquad \forall u \in \mathcal{R}^n \tag{4.28}$$

e

$$I_A = \sum_i m_i (AP_i \mathbb{I} - AP_i \otimes AP_i) \in M(n)$$

è il tensore d'inerzia del sistema (rigido) di punti materiali. Si tratta di un oggetto che dipende dalla sola geometria della distribuzione delle masse del sistema rigido.

Prima di studiare le proprietà del tensore d'inerzia, ricaviamo l'espressione dell'energia cinetica per un generico sistema rigido con un punto fisso

$$2T_{\mathcal{S}} = \sum_{i} m_{i} v_{i}^{2} = \sum_{i} m_{i} (\omega \wedge AP_{i})^{2} = \sum_{i} m_{i} \omega \wedge AP_{i} \cdot \omega \wedge AP_{i} =$$

$$= \sum_{i} m_{i} \omega \cdot AP_{i} \wedge (\omega \wedge AP_{i}) = \omega \cdot \sum_{i} m_{i} AP_{i} \wedge (\omega \wedge AP_{i}) = \omega \cdot I_{A} \omega.$$

Nel caso particolare di G punto fisso nel sistema del baricentro e  $\omega^{(r)}$  velocità angolare del sistema rispetto al riferimento del baricentro, otteniamo l'analogo delle formule di König per un sistema rigido

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\omega \cdot I_G\omega, \tag{4.29}$$

$$M_A = AG \wedge P + I_G \omega. \tag{4.30}$$

## Proprietà del tensore d'inerzia

1)  $I_A$  è operatore simmetrico (e quindi diagonalizzabile). Rispetto alla base  $(O, e_i)$  si ha infatti

$$(I_A)_{ij} = e_i \cdot I_A e_j = \sum_k m_k (AP_k^2 e_i \cdot e_j - AP_k \cdot e_i AP_k \cdot e_j) = (I_A)_{ji}$$

2) Sia  $\omega = |\omega|u$ , ove  $u = \text{vers } \omega$ . Allora

$$T = \frac{1}{2}\omega \cdot I_A \omega = \frac{\omega^2}{2} u \cdot I_A u = \frac{\omega^2}{2} I_u$$
 (4.31)

ove

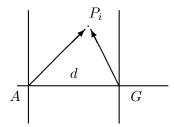
$$I_u := u \cdot I_A u = \sum_i m_i (u \wedge AP_i)^2 = \sum_i m_i d_i^2 \ge 0$$

è il momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta per A e parallela al versore u. Esso coincide con la somma delle masse per le distanze al quadrato dei punti  $P_i$  dalla retta per A. Come si vede subito,  $I_u$  non varia se si considera un altro punto A' sulla retta definita da (A, u). Dalla (4.31) si deduce che  $I_A$ , simmetrico è definito positivo ovvero

$$\omega \cdot I_A \omega \ge 0$$
,  $\omega \cdot I_A \omega = 0$   $\Leftrightarrow \omega = |\omega| u = 0$ ,

tranne che nel caso in cui esista  $u^*$  tale che  $I_u^* = 0$ . In tal caso i punti di  $\mathcal{S}$  sono disposti tutti lungo una retta parallela a  $u^*$  e  $\mathcal{S}$  è solido degenere (asta).

3) Formula di variazione del momento d'inerzia (Teorema di Huygens–Steiner). Consideriamo le rette parallele al versore u per i punti A e G, baricentro di S; non è restrittivo supporre che sia d = |AG| la distanza tra le rette. Allora (vedi figura)



$$I_u^{(A)} = \sum_i m_i (u \wedge AP_i)^2 = \sum_i m_i [(u \wedge AG) + (u \wedge GP_i)]^2 =$$

$$= \sum_i m_i [(u \wedge AG)^2 + (u \wedge GP_i)^2 + 2(u \wedge AG) \cdot (u \wedge GP_i)],$$

da cui

$$I_u^{(A)} = md^2 + I_u^{(G)}$$

Esercizio. Mostrare che la relazione precedente è un caso particolare della formula

$$I_O = I_G + mOG \otimes OG$$
.

4) Momenti principali d'inerzia. Supponiamo per semplicità A coincidente con l'origine del riferimento inerziale, per cui  $OP_i = (x_i, y_i, z_i)$ . I termini sulla diagonale di  $I_O$  sono detti momenti principali d'inerzia. Si ha ad esempio per  $e_3$ 

$$(I_O)_{33} = e_3 \cdot I_O e_3 = I_{e_3}^{(O)} = \sum_i m_i (OP_i \wedge e_3)^2 =$$

$$= \sum_i m_i (OP_i^2 - (OP_i \cdot e_3)^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - z_i^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

I termini extra-diagonali sono detti momenti deviatori

$$(I_O)_{23} = e_2 \cdot I_O e_3 = \sum_i m_i (-y_i z_i)$$

5) Solidi piani (lamine). Sia  $e_3$  perpendicolare al piano che contiene il sistema. Allora  $z_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots n$  e

$$I_1 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + 0 - x_i^2) = \sum_i m_i y_i^2, \qquad I_2 = \sum_i m_i x_i^2$$

e si ha

$$I_3^{(O)} = I_2^{(O)} + I_1^{(O)}.$$

6) Potenziale centrifugo. Ricordando l'espressione (4.24) dell'energia potenziale associata alla forza centrifuga agente su un punto materiale, possiamo calcolare l'energia potenziale della forza centrifuga agente su un sistema (particellare o continuo) rigido. Si ha facilmente, ponendo  $u = vers(\omega)$ 

$$U^{cf} = -\sum_{i=1}^{N} m_i (\omega \wedge OP_i)^2 = -\frac{\omega^2}{2} I_u^O = -\frac{\omega^2}{2} (I_u^G + md^2).$$
 (4.32)

# 4.6 Dinamica dei sistemi particellari: le Equazioni Cardinali

Sia S un sistema di n punti materiali di masse  $m_i$ , i = 1, ..., n. Suddividiamo le forze agenti sull' i-esimo punto del sistema in due classi: le forze  $interne F_i^{int}$ , ovvero dovute all'azione degli altri punti del sistema sul punto i-esimo, per le quali possiamo dare la rappresentazione

$$F_i^{int} = \sum_{i=1}^n f_{ij}, \qquad f_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

ove  $f_{ij}$  indica la forza agente su i dovuta all'azione di j; e le forze esterne  $F_i^{ext}$  che descrivono l'effetto sul punto i di corpi non appartenenti al sistema  $\mathcal{S}$ . Questa distinzione tra forze esterne e interne è complementare a quella di uso frequente tra forze attive e forze vincolari; la sua utilità sta nel fatto che per le forze interne si fa l'ipotesi, importantissima per gli sviluppi che vogliamo trarre, che esse siano un sistema equilibrato di forze, ovvero

$$R^{int} = 0, \qquad N_O^{int} = 0.$$

Da tale ipotesi si ricavano le equazioni cardinali per il sistema particellare S, ovvero un sistema di 3 più 3 equazioni differenziali scalari che sono necessariamente soddisfatte lungo i moti  $OP_i(t)$  dinamicamente possibili per il sistema ovvero soddisfacenti a

$$m_i \ddot{OP_i} = F_i^{ext} + F_i^{int}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sommando sull'indice i troviamo infatti che necessariamente (prima equazione cardinale)

$$ma_G = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{OP_i} = R^{ext} + R^{int} = R^{ext}.$$
 (4.33)

Sia ora OA(t) la traiettoria del polo A rispetto al sistema inerziale di origine O usato per descrivere il moto di S, di modo che si ha immediatamente che

$$OP_i = OA + AP_i,$$
 e  $v_i = v_A + \frac{d}{dt}(AP_i).$ 

Indichiamo con

$$M_A = \sum_{i=1}^n m_i A P_i \wedge v_i$$

il momento della quantità di moto rispetto al polo A; la sua derivata lungo un moto dinamicamente possibile vale

$$\dot{M}_{A} = \sum_{i=1}^{n} m_{i}(v_{i} - v_{A}) \wedge v_{i} + \sum_{i=1}^{n} m_{i}AP_{i} \wedge a_{i} =$$

$$= -v_{A} \wedge P + \sum_{i=1}^{n} AP_{i} \wedge (F_{i}^{ext} + F_{i}^{int}) =$$

$$= -v_{A} \wedge P + N_{A}^{ext} + N_{A}^{int} = -v_{A} \wedge P + N_{A}^{ext}$$

ovvero (seconda equazione cardinale)

$$\dot{M}_A = -v_A \wedge P + N_A^{ext}. \tag{4.34}$$

Osservazione. Come abbiamo detto, le equazioni cardinali costituiscono un sistema di 6 equazioni che devono essere necessariamente soddisfatte lungo il moto. E' chiaro intuitivamente che, se il sistema  $\mathcal S$  ha più di 6 gradi di libertà, le equazioni cardinali non possono essere sufficienti a determinare completamente il moto del sistema. Infatti, esse sono sufficienti a determinare solo il moto del baricentro G, attraverso la prima equazione cardinale, e l'evoluzione del momento della quantità di moto  $M_A$ . Per una particolare classe di sistemi, i corpi rigidi, le equazioni cardinali risulteranno essere in numero sufficente a determinare completamente il moto del sistema.

#### 4.6.1 Sistema della massa ridotta

Consideriamo un sistema di soli due punti materiali S e P di masse rispettive M e m soggetti a forze di mutua interazione che rispettino il principio di azione e reazione. Questo implica che la forza, per esempio posizionale e attrattiva, è diretta lungo la congiungente i due punti e quindi è una forza centrale. Possiamo scrivere  $F_{SP} + F_{PS} = 0$ . Invece di descrivere il moto del pianeta P rispetto ad un riferimento inerziale  $\mathcal{E}^*$ , scegliamo di descriverlo in un riferimento  $\mathcal{E}$  solidale con il sole S e avente assi costantemente paralleli a quelli di  $\mathcal{E}^*$ . La velocità angolare di trascinamento è quindi nulla. Nel riferimento inerziale l'equazione del moto del sistema isolato è

$$ma_P = F_{SP}, \qquad Ma_S = F_{PS}$$

mentre nel riferimento  $\mathcal{E}^*$ , usando la (4.20), abbiamo

$$ma_P = m(a_P^r + a_S) = F_{SP}$$

da cui

$$ma_P^r = F_{SP} + \frac{m}{M}F_{SP} = \frac{M+m}{M}F_{SP}.$$

L'equazione del moto nel riferimento non inerziale ha la forma  $\mu a_P^r = F_{SP}$  dell'equazione del moto di un punto soggetto a forza centrale  $F_{SP}$  di massa pari alla massa ridotta

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}} < m.$$

Nelle applicazioni di meccanica celeste si ha spesso la condizione  $M\gg m$ . In tal caso si ha conseguenza importantissima che anche  $\mathcal{E}^*$  è con ottima approssimazione un sistema inerziale: infatti il sistema dei due corpi, essendo soggetto a sole forze interne, ha il baricentro G che si muove con accelerazione nulla e quindi il sistema del baricentro è inerziale. Ora, per l'ipotesi fatta  $M\gg m$ , il baricentro G viene a coincidere con il centro di G:

$$OG = \frac{MOS + mOP}{m + M} \approx OS$$

# 5 Sistemi particellari vincolati

#### 5.1 Varietà vincolari

Consideriamo il moto di un punto P vincolato a muoversi su di una sfera di raggio dato. La sua posizione si può esprimere per mezzo delle tre coordinate cartesiane x,y,z, ma un sistema più efficente è costituito dai due angoli  $\phi,\theta$  rispettivamente longitudine rispetto ad un meridiano fissato e latitudine. Si noti però che in corrispondenza dei due poli, la longitudine perde di significato. Segue da questo semplice esempio che, per sistemi vincolati, le coordinate cartesiane non sono sempre le più adatte a descrivere il moto, sia perchè non mettono in evidenza particolari simmetrie del sistema o delle forze agenti, sia perchè risultano essere sovrabbondanti in numero. Viceversa, sistemi di coordinate particolari possono fallire nell'individuare univocamente la posizione del punto materiale.

L'apparato matematico che permette di districarsi tra queste difficoltà è la nozione di varietà differenziale. Consideriamo per esempio la circonferenza  $\mathcal{C}$  di equazione  $x^2+y^2=1$ . Essa può essere riguardata come sottoinsieme dei punti del piano  $\mathbb{R}^2$  che soddisfano l'equazione data, e in tal caso la pensiamo come sottovarietà immersa in  $\mathbb{R}^2$ , oppure possiamo sfruttare il fatto che ogni arco di tale circonferenza, purchè non troppo grande, si proietta biunivocamente su uno dei due assi coordinati. In questo caso pensiamo a  $\mathcal{C}$  come varietà astratta. In un certo senso, in questo secondo caso ci dimentichiamo del piano  $\mathbb{R}^2$  che 'ospita' il sottoinsieme. Le due nozioni devono essere coerenti tra loro e in realtà non è che una sia più generale dell'altra. Vediamo per prima la definizione di varietà astratta. Premettiamo che, ogni volta che parliamo di varietà, tutte le funzioni che intervengono nella definizione sono supposte essere di classe  $C^k$ , senza bisogno di specificare k, e la varietà stessa si dice differenziabile di classe  $C^k$ .

**Definizione 5.1.1 (Varietà astratta)** Un insieme  $\mathcal{M}$  (che deve essere uno spazio topologico separabile e connesso) è una varietà di dimensione n se

- i) possiamo definire una collezione, detta atlante, di carte locali  $(U_i, \phi_i)$ , finita o numerabile, ove gli  $U_i$  sono sottoinsiemi aperti che ricoprono  $\mathcal{M}$  e le funzioni  $\phi: U_i \to \mathbb{R}^n$  sono diffeomorfismi¹ con l'immagine  $\phi_i(U_i)$ ,
- ii) se un punto cade nell'intersezione di due domini  $U_i$  e  $U_j$ , anche un suo intorno cade nell'intersezione. Inoltre, la mappa  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  tra le immagini  $\phi_i(U_i \cap U_j)$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Il senso è questo: un aperto di uno spazio vettoriale non è mai diffeomorfo ad un insieme di uno spazio di dimensione inferiore, se è diffeomorfo ad un sottoinsieme di uno spazio della stessa dimensione, tale insieme è aperto

e  $\phi_j(U_i \cap U_j)$  deve essere un diffeomorfismo. Le due carte locali sono dette allora compatibili.

iii) L'atlante è massimale rispetto alle condizioni i) e ii), ovvero ogni coppia  $(U, \phi)$  che soddisfa i) e ii) appartiene all'atlante.

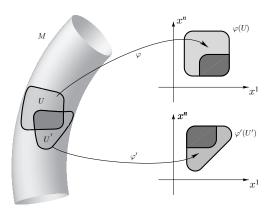


Figura 5.1: Carte locali, da Marsden-Ratiu, Introduction to Mechanics and Symmetry)

Nel linguaggio delle varietà differenziabili, i punti di  $\mathbb{R}^n$ 

$$q = (q_1, \dots, q_n) = \phi_i(x)$$

sono detti coordinate del punto  $x \in U_i \subset \mathcal{M}$  nella carta locale scelta. La mappa  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  è detta cambio di coordinate. Le inverse  $\psi_i = \phi^{-1}$  delle carte locali, con il loro dominio di definizione, sono dette parametrizzazioni locali della varietà.

La definizione di varietà data è elegante ma poco costruttiva. Risulta più maneggievole lavorare con le varietà immerse, pensate quindi come particolari sottoinsiemi di un  $\mathbb{R}^m$ , con m>n che si lasciano scrivere, almeno localmente, come insiemi di livello di una funzione. Lo strumento fondamentale è il Teorema del Dini (o Teorema della funzione implicita), in una versione adattata alle nostre esigenze

**Teorema 5.1.1** Sia  $S \subset \mathbb{R}^m$  l'insieme dei punti ove si annulla  $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ , il cui differenziale ha rango massimo su S

$$rank \ df(x) = max = m - n \quad \forall x \ tale \ che \quad f(x) = 0.$$

Allora, per ogni  $x \in \mathcal{S}$ , esistono un intorno  $U \subset \mathbb{R}^m$  e un aperto  $V \subset \mathbb{R}^n$  per cui l'insieme  $\mathcal{S}$  si scrive come grafico di una funzione biiettiva sull'immagine  $g: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m-n}$ 

$$U \cap \mathcal{S} = \{(q, g(q)) : q \in V\}, \qquad f(q, g(q)) = 0 \quad \forall \ q \in V.$$

Si capisce subito che  $\psi: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  definita da  $\psi(q) = (q, g(q))$  è una parametrizzazione locale della varietà n-dimensionale  $\mathcal{S}$ . La funzione f che implicitamente definisce la g è detta  $sistema\ di\ vincoli\ per la varietà.$ 

#### Esempio

Nel caso della circonferenza introdotta sopra, il sistema di vincoli è la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ,  $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ , il cui differenziale df(x,y) = 2(x,y) non si annulla mai su  $\mathcal{C}$  e quindi ha rango massimo. La parte di  $\mathcal{C}$  contenuta nel semipiano y > 0 (rispettivamente y < 0) è il grafico della funzione definita sull'aperto V = (-1,1)

$$g_{+}(q) = \sqrt{1 - q^2}$$
 (risp.  $g_{-}(q) = -\sqrt{1 - q^2}$ )

che definiscono le due parametrizzazioni locali del semicerchio superiore e inferiore rispettivamente

$$q \mapsto \psi_{\pm}(q) = (q, g_{\pm}(q)) \in \mathbb{R}^2.$$

I punti di  $\mathcal C$  sull'asse x non appartengono ai domini delle carte sopra definite. Per essi basta introdurre le parametrizzioni locali corrispondenti alle proiezioni sull'asse y

$$\hat{\psi}_{\pm}(q) = (g_{\pm}(q), q), \qquad q \in (-1/2, 1/2).$$

Data la parametrizzazione locale  $\psi$  della varietà, la velocità di un punto materiale che si muove rimanendo confinato sulla varietà si scrive come

$$v(t) = d\psi(q(t))\dot{q}(t)$$

Nel caso della circonferenza

$$v(t) = (\dot{x}, \dot{y}) = (1, \frac{-q}{\sqrt{1 - q^2}})\dot{q}.$$

### 5.1.1 Spazio tangente

Il vantaggio fondamentale di usare la parametrizzazione locale  $\psi: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  è che si tratta di una mappa tra spazi lineari. Il suo differenziale mappa  $\mathbb{R}^n$  in un sottospazio lineare di  $\mathbb{R}^m$  di dimensione n che interpretiamo come spazio tangente alla varietà in  $\psi(q)$  e indichiamo, con leggero abuso di notazione,  $T_q \mathcal{M}$ . Una base di  $T_q \mathcal{M}$  è data dagli n vettori di  $\mathbb{R}^m$ 

$$\mathbf{e}_{\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}}(q), \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

pertanto la velocità di un punto il cui moto sulla varietà è descritto dalla curva  $t\mapsto q(t)\in U$  si scrive semplicemente come

$$v = \frac{d\psi}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}}(q) = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}.$$
 (5.1)

Senza entrare in dettaglio, citiamo solo i fatti fondamentali, rinviando per ogni approfondimento ai testi classici di Geometria Differenziale: la collezione degli spazi tangenti definisce un insieme, detto fibrato tangente  $T\mathcal{M}$  che ha esso stesso natura di varietà differenziale di dimensione doppia 2n; una sua parametrizzazione locale naturale viene ereditata dalla parametrizzazione  $\psi$ 

$$T\mathcal{M} = \bigcup_q T_q \mathcal{M}, \qquad (q, c) \in U \times \mathbb{R}^n \mapsto (\psi(q), d\psi(q)c).$$

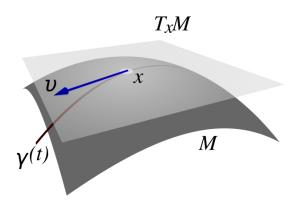


Figura 5.2: Spazio tangente alla varietà (immagine da Wikipedia)

Nel linguaggio classico della Meccanica, il fibrato tangente è detto *spazio degli* atti di moto.

Concludiamo osservando il fatto seguente, di notevole importanza. Se  $\mathcal{M}$  è varietà n-dimensionale immersa in  $\mathbb{R}^m$ , descritta dal sistema di m-n vincoli f e dalla parametrizzazione locale  $\psi$ , allora, dalla relazione  $f(\psi(q(t)) \equiv 0$ , segue subito che per ogni t

$$df(\psi(q(t))\frac{d\psi}{dt}(q(t)) = 0$$

per cui ker  $df \supset \mathrm{Range}(d\psi),$ ma per le ipotesi fatte sul rango di fe  $\psi$ si ha

$$\ker df(x) \equiv \operatorname{Range}(d\psi(q)), \text{ ove } x = \psi(q).$$

#### 5.1.2 Vincoli olonomi, mobili, anolonomi

Vediamo come si sfrutta la nozione di varietà per la meccanica. Ci interessa descrivere un sistema di N punti materiali  $P_1, \ldots, P_n$  soggetto a limitazioni, i vincoli appunto, sulle posizioni o sulle velocità. Fissato un riferimento, indichiamo con  $\mathbb{R}^m$ , m = 6N, lo spazio degli atti di moto (posizioni e velocità) del sistema non vincolato

$$(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (OP_1, \dots OP_N, \dot{OP}_1, \dots, \dot{OP}_N) \in \mathbb{R}^m$$
(5.2)

Si dice allora che

• 1 il sistema è soggetto ad un vincolo *olonomo fisso* se le configurazioni possibili per il sistema sono tutte e sole quelle per cui

$$f(\mathbf{x}) = 0, \qquad f: \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^{3N-n}.$$

• 2 il sistema è soggetto ad un vincolo *olonomo mobile* se le configurazioni possibili per il sistema sono tutte e sole quelle per cui

$$f(\mathbf{x},t) = 0, \qquad f: \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3N-n}.$$

• 3 il sistema è soggetto ad un vincolo *anolonomo* (fisso o mobile), se gli atti di moto possibili per il sistema sono tutte e soli quelli per cui

$$g(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0, \qquad f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}.$$

I vincoli olonomi definiscono quindi una varietà  $\mathcal{M}$ , detta varietà vincolare o varietà delle configurazioni del sistema vincolato, che può essere fissa o mobile, ed è sottovarietà n-dimensionale di  $\mathbb{R}^{3N}$ . Una varietà mobile è una famiglia differenziabile di varietà dipendenti dal parametro temporale. Conseguentemente, la parametrizzazione locale di una varietà mobile eredita una dipendenza temporale  $\psi = \psi(q, t)$ . E' importante capire la seguente nozione cinematica che ha rilevanza nel caso di vincoli olonomi mobili. Dato il moto  $\mathbf{x}(t)$  soddisfacente al vincolo, si ottiene per derivazione rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t),t) = df(\mathbf{x}(t),t)\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

quindi le velocità non sono vettori dello spazio tangente  $\ker df$ . Analogamente

$$v = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = d\psi(q(t))\dot{q} + \frac{\partial\psi}{\partial t}(q(t)) = w + u,$$

da cui segue che la velocità v è somma di un vettore w dello spazio tangente  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{M} = Range(d\psi)$  e di un vettore dipendente dal tempo u che rappresenta la velocità di trascinamento della varietà mobile. I vettori w sono detti velocità o spostamenti virtuali.

Infine, un vincolo olonomo definisce per derivazione un vincolo sulle velocità. Se, viceversa, un vincolo anolonomo dato si può dedurre per derivazione da un vincolo olonomo, si dice che il vincolo è *integrabile*.

#### 5.1.3 Moti dinamicamente possibili, vincoli olonomi ideali

Fino a qui abbiamo descritto la cinematica dei sistemi di punti soggetti a vincoli. Non è pensabile però che il sistema particellare rispetti il vincolo spontaneamente. Il postulato delle Reazioni Vincolari, afferma che l'effetto del vincolo sul sistema è descrivibile tramite forze supplementari, le reazioni vincolari appunto, che non sono assegnate, ma costituiscono delle incognite del moto. Si dice allora che

Definizione 5.1.2 (Moti dinamicamente possibili) Un moto  $\mathbf{x}(t)$  cinematicamente ammissibile, cioè che rispetta il vincolo, è detto dinamicamente possibile se soddisfa l'equazione di Newton

$$m_i \ddot{x}_i(t) = F_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \Phi_i, \quad i = 1, \dots, N$$
 (5.3)

ove le  $\Phi_i$ , incognite, appartengono all'insieme delle reazioni vincolari esplicabili dal vincolo nell'atto di moto  $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ .

A questo punto, il problema è matematicamente posto sotto forma di e.d.o. ma risulta indeterminato per la presenza delle reazioni vincolari incognite. Il modello che ora introduciamo permette di disaccoppiare il problema della determinazione del moto da quello della determinazione delle reazioni vincolari. Introduciamo una parametrizzazione locale

$$\psi: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$
,

$$(q,t) \mapsto \psi(q,t) = \psi(t,q) = (\psi_1(t,q), \dots, \psi_N(t,q)) = (x_1, \dots, x_N) = \mathbf{x},$$

con m = 3N della varietà vincolare del sistema di N punti soggetti a vincoli olonomi, fissi o mobili. Allora, il generico vettore dello spazio tangente si lascia scrivere come

$$w = (w_1, \dots, w_N) \in T_{\mathbf{x}} \mathcal{M} \quad \text{ove} \quad w_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} c_\alpha.$$
 (5.4)

Corollario Richiamiamo l'attenzione sul fatto, di frequentissima applicazione, che nel caso di vincoli olonomi *fissi* e solo in quello, le velocità permesse dai vincoli sono per la (5.1) (tutti e soli i) vettori dello spazio tangente.

Al di fuori del caso dei vincoli olonomi, fissi o mobili, l'insieme delle velocità virtuali non ha una descrizione geometrica così evidente, e questo porta a notevoli complicazioni, tali da escludere qui un loro approfondimento. Vediamo invece come sfruttare la proprietà di idealità del vincolo.

Definizione 5.1.3 (Vincoli olonomi ideali) Il vincolo olonomo è ideale o liscio se l'insieme delle reazione esplicabili è dato da tutti e soli i vettori  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)$  per cui

$$\Phi \cdot w = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i \cdot w_i = 0, \quad \forall \ w = (w_1, \dots, w_N) \in T_{\mathbf{x}} \mathcal{M}.$$
 (5.5)

Proposizione 5.1.1 (Condizione variazionale di D'Alembert) In un sistema a vincoli ideali, Il moto cinematicamente possibile  $\mathbf{x}(t)$  è dinamicamente possibile se solo se soddisfa, per ogni t lungo il moto, la condizione variazionale

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \cdot w_i = 0, \quad \forall \ w = (w_1, \dots, w_N) \in T_{\mathbf{x}(t)} \mathcal{M}.$$
 (5.6)

**Dimostrazione** Necessità. Se il moto è dinamicamente possibile, sostituendo (5.3) nella condizione variazionale (5.6), questa è soddisfatta per l'ipotesi di vincolo ideale. Sufficienza. Le quantità definite da  $\eta_i = m_i \ddot{x}_i - F_i$ , soddisfacenti la condizione variazionale, definiscono un insieme di reazioni vincolari esplicabili dal vincolo. Quindi un moto cinematicamente ammissibile è dinamicamente ammissibile con  $\Phi_i = \eta_i$ .  $\square$ 

L'utilità della condizione variazionale è che essa caratterizza i moti dinamicamente possibili senza far intervenire le reazioni vincolari. Nel prossimo capitolo vedremo che, sfruttando una parametrizzazione locale della varietà vincolare olonoma, la condizione variazionale si lascia scrivere come insieme di e.d.o. nelle coordinate q.

#### Componenti lagrangiane della sollecitazione.

Sia  $F=(F_1,\ldots,F_N)\in\mathbb{R}^{3N}$  il vettore delle forze agenti sui punti del sistema soggetto a vincoli olonomi. Il prodotto scalare di F con l' $\alpha$ -esimo vettore della base di  $T_q\mathcal{M}$  definisce la componente lagrangiana della sollecitazione

$$Q_{\alpha}(t, q, \dot{q}) = F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{i=1}^{N} F_{i}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \cdot \frac{\partial \psi_{i}}{\partial q_{\alpha}}$$

ove  $\mathbf{x} = \psi(q)$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = d\psi(q)\dot{q}$ . Di uso frequente nelle applicazioni è l'espressione della potenza delle forze lungo il moto permesso dai vincoli olonomi fissi  $\mathbf{x}(t) = \psi(q(t))$ 

$$F(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{N} F_i(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \cdot x_i = \sum_{i=1}^{N} F_i(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \cdot \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha(t, q, \dot{q}) \dot{q}_\alpha$$
(5.7)

Una prima conseguenza importante della nozione di vincolo ideale è espresso dalla proposizione seguente

Teorema 5.1.2 (T. di variazione dell'energia) Lungo i moti dinamicamente possibili dei sistemi a vincoli olonomi fissi ideali e soggetti a forze attive (conservative o non) e a reazioni vincolari vale la seguente versione del teorema di conservazione dell'energia

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{N} [m_i \ddot{x}_i + \vec{\nabla}_i \mathcal{U}(\mathbf{x})] \cdot \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{N} [F_i + R_i + \Phi_i - F_i] \cdot \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{N} R_i \cdot \dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} Q_{\alpha}^{nc}(t, q, \dot{q}) \dot{q}_{\alpha}$$

**Dimostrazione** Si usa la (5.3) e la condizione di idealità del vincolo (5.5) tenendo conto che, per vincoli ideali e fissi le velocità permesse dal vincolo sono vettori dello spazio tangente. L'ultima espressione è data dalla (5.7) e contiene le componenti lagrangiane delle sole forze *non conservative* 

Infine osserviamo che il carattere di una forza di essere posizionale conservativa non è alterato dal fatto che il sistema soggetto all'azione di tale forza sia vincolato. Vale infatti

**Proposizione 5.1.2** Il sistema di punti materiali sia soggetto al sistema di forze conservative di energia potenziale  $\mathcal{U}(\mathbf{x})$  e al vincolo olonomo fisso descritto dalla parametrizzazione locale  $\psi$ . Allora le componenti lagrangiane della sollecitazione ammettono l'energia potenziale  $V = \mathcal{U} \circ \psi$  e si scrivono come

$$Q_{\alpha}(q) = -\frac{\partial V}{\partial q_{\alpha}}(q).$$

**Dimostrazione** Basta usare la (4.6) e la regola di derivazione delle funzioni composte.

#### Idealità del vincolo di puro rotolamento

Riconsideriamo qui il vincolo di puro rotolamento di un disco su di una guida rettilinea (Definizione 4.2.2). Il disco è un sistema descritto dalla due coordinate lagrangiane  $s, \theta$ . Il vincolo di puro rotolamento  $v_C = 0$  ove C è il punto di contatto disco-guida è un vincolo anolonomo fisso in quanto limita le velocità possibili del sistema, ma integrabile e la sua integrazione prescrive un vincolo olonomo fisso  $s = R\theta + cost.$ , la formula (4.17). Abbiamo quindi un sistema uno-dimensionale. Mostriamo che la reazione vincolare  $\Phi$  che agisce unicamente nel punto di contatto C è un vincolo olonomo ideale. Infatti, dal momento che il vincolo è fisso, le velocità

virtuale coincidono con le velocità permesse dal vincolo, in questo caso  $w=v_C=0$ . Si ha allora

$$\Phi \cdot w = \Phi \cdot 0 = 0$$

e quindi il vincolo di puro rotolamento è ideale.

#### Calcolo delle componenti Lagrangiane della forza di Coriolis

Consideriamo un sistema di riferimento Oxyz non inerziale, rotante con velocità angolare costante  $\omega = \omega \mathbf{e}_3$  diretta come l'asse z. Un punto materiale P di massa m è vincolato in modo liscio a muoversi sul piano Oxy. Vogliamo determinare le componenti Lagrangiane della forza di Coriolis  $F = -2m\omega \wedge v_P^r$ . la varietà vincolare è il piano  $\mathbb{R}^2$  e quindi, usando x,y come coordinate lagrangiane, la velocità relativa di P e un generico vettore w dello spazio tangente si scrivono rispettivamente come  $\alpha = 1, 2$ 

$$v^r = \dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2, \qquad w = w_x\mathbf{e}_1 + w_y\mathbf{e}_2.$$

Si ha subito che

$$F = -2m\omega \wedge v^r = 2m\omega(\dot{y}\mathbf{e}_1 - \dot{x}\mathbf{e}_2)$$

e quindi che la forza di Coriolis è giroscopica

$$F \cdot v^r = 2m\omega(\dot{y}\mathbf{e}_1 - \dot{x}\mathbf{e}_2) \cdot (\dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2) \equiv 0$$

ma ha, per questo sistema vincolato, componenti lagrangiane non nulle. Per calcolarle basta calcolare il lavoro per un generico vettore dello spazio tangente

$$F \cdot w = 2m\omega(\dot{y}\mathbf{e}_1 - \dot{x}\mathbf{e}_2) \cdot (w_x\mathbf{e}_1 + w_y\mathbf{e}_2) = 2m\omega\dot{y}w_x - 2m\omega\dot{x}w_y = Q_xw_x + Q_yw_y$$

da cui

$$Q_x = 2m\omega \dot{y}, \qquad Q_y = -2m\omega \dot{x}.$$

Nel prossimo Capitolo vedremo che la forza di Coriolis ammette potenziale generalizzato.

# 6 Meccanica Lagrangiana

## 6.1 Equazioni di Lagrange

La condizione di idealità per vincoli olonomi afferma che le forze di reazione vincolare hanno componenti nulle sul locale spazio vettoriale tangente alla varietà che è sottospazio n-dimensionale dello spazio ambiente  $\mathbb{R}^{3N}$  nel quale si scrive l'equazione di Newton per ogni singolo punto. Ne segue che condizione variazionale di D'Alembert permette di caratterizzare i moti dinamicamente possibili senza far riferimento alla reazioni vincolari. Vedremo infatti che, usando la parametrizzazione locale

$$\psi: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \qquad (q,t) \mapsto \psi(q,t) = \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N),$$

con m=3N della varietà vincolare, sarà possibile trasformare il contenuto della condizione variazionale di D'Alembert in un sistema di equazioni differenziali, le equazioni di Lagrange appunto, completamente specificato e riferito agli effettivi gradi di libertà, o coordinate lagrangiane  $q=(q_1,\ldots,q_n)$  del sistema, che forniscono la descrizione dei moti del sistema particellare soggetto a vincoli olonomi, fissi o mobili, e lisci. Tali sistemi saranno detti per brevità sistemi Lagrangiani nel seguito.

Il primo passo consiste nella espressione dell'energia cinetica del sistema in coordinate lagrangiane. Indichiamo con

$$m = Diag[m_1, m_1, m_1, \dots, m_N, m_N, m_N] \in Mat(3N)$$
 (6.1)

la matrice diagonale delle masse degli N punti del sistema e con

$$\psi(t,q) = (\psi_1(t,q), \dots, \psi_N(t,q)), \qquad q \in U \subset \mathbb{R}^n$$

la parametrizzazione locale. Useremo indici latini i,j per le particelle e indici greci  $\alpha,\beta$  per le coordinate lagrangiane. La velocità dei punti del sistema ha quindi l'espressione vettoriale seguente

$$\dot{\mathbf{x}} = d\psi(t, q)\dot{q} + \frac{\partial\psi}{\partial t}(t, q) \tag{6.2}$$

Vale allora la

Proposizione 6.1.1 (Energia cinetica in coordinate lagrangiane) L'energia cinetica del sistema soggetto a vincoli olonomi mobili è una forma quadratica nelle velocità lagrangiane  $\dot{q}_{\alpha}$  i cui coefficienti dipendono dalle (q,t)

$$T: U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = T_2(t, q, \dot{q}) + T_1(t, q, \dot{q}) + T_0(t, q)$$

ove

$$T_{2}(t,q,\dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}, \qquad A_{\alpha,\beta}(q,t) = \sum_{i=1}^{N} m_{i} \frac{\partial \psi_{i}}{\partial q_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \psi_{i}}{\partial q_{\beta}},$$

$$T_{1}(t,q,\dot{q}) = \sum_{\beta} B_{\beta} \dot{q}_{\beta}, \qquad B_{\beta}(q,t) = \sum_{i=1}^{N} m_{i} \frac{\partial \psi_{i}}{\partial q_{\beta}} \cdot \frac{\partial \psi_{i}}{\partial t},$$

$$T_{0}(t,q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_{i} \frac{\partial \psi_{i}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi_{i}}{\partial t},$$

**Dimostrazione** Basta sviluppare il prodotto scalare  $m\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  tenendo conto della (6.2), ovvero

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (d\psi_i \dot{q} + \frac{\partial \psi_i}{\partial t}) \cdot (d\psi_i \dot{q} + \frac{\partial \psi_i}{\partial t}).$$

e della

$$d\psi_i \dot{q} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} (t, q) \dot{q}_\alpha.$$

Osservazione L'energia è una forma quadratica non degenere nelle velocità generalizzate  $\dot{q}$ . Per vederlo, basta considerare il caso di vincoli fissi. In tal caso l'energia cinetica si riduce al termine  $T_2$ ; la matrice  $A_{\alpha,\beta}$  è simmetrica e non degenere. Questo risulta dal fatto che (6.2) ha rango massimo perchè è iniettiva e quindi l'unico vettore per cui  $\dot{\mathbf{x}} = d\psi(q)\dot{q} = 0$  è il vettore nullo  $\dot{q} = 0$ .

Abbiamo ora tutti gli ingredienti necessari per dimostrare la seguente

Proposizione 6.1.2 (Equazioni di Lagrange) Il moto  $\mathbf{x}(t) = \psi(q(t), t)$  di un sistema a vincoli olonomi è dinamicamente possibile se e solo se q(t) soddisfa il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}}) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

**Dimostrazione** Si tratta di riscrivere la condizione variazionale di D'Alembert, che caratterizza i moti dinamicamente possibili, usando la parametrizzazione locale scelta. Scrivendo il generico vettore dello spazio tangente  $w_i$  con la  $(5.4)_2$ , la condizione variazionale si scrive

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{x}_i \cdot \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} c_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} (\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha}) c_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha c_\alpha, \quad \forall \ c \in \mathbb{R}^n$$

e quindi si deve avere, per ogni  $\alpha = 1, \ldots, n$ 

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha.$$

Usando la formula di Leibniz

$$\ddot{x}_i \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left[ \dot{x}_i \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} \right] - \dot{x}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} \right)$$

ed essendo

$$\dot{x}_i = \frac{d\psi_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

si ha

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha}$$

e infine, scambiando l'ordine di derivazione (supponiamo  $\psi$  sufficientemente regolare)

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha}) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(\frac{d\psi_i}{dt}) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\alpha}.$$

Questo basta per concludere che

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}.$$

#### Funzione di Lagrange

Nel caso in cui le componenti lagrangiane della sollecitazione ammettano energia potenziale V, le equazioni di Lagrange ammettono la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$
(6.3)

ove L è la funzione di Lagrange o Lagrangiana

$$L(t, q, \dot{q}) = T(t, q, \dot{q}) - V(q).$$

Lagrangiane di tipo L=T-V sono dette lagrangiane meccaniche. Si noti però che l'insieme dei sistemi le cui equazioni del moto si lasciano scrivre come equazioni di Lagrange di un'opportuna lagrangiana  $L(t,q,\dot{q})$  è strettamente più ampio dell'insieme dei sistemi conservativi a vincoli olonomi.

#### Potenziali generalizzati

Le equazioni di Lagrange possono assumere la forma (6.3) anche se il sistema non è soggetto a sole forze conservative descritte da un potenziale V(q) purchè le forze non conservative possibilmente anche dipendenti dalla velocità si possano scrivere nella forma specialissima

$$Q_{\alpha}(t, q, \dot{q}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial W}{\partial q_{\alpha}}$$

ove  $W = W(q, \dot{q}, t)$  è il potenziale generalizzato. In questo caso allora L = T - U - W.

Mostriamo che la forza di Coriolis, dipendente dalla velocità, ammette potenziale generalizzato se  $\omega$  è costante. Pensiamo alle coordinate x del punto materiale libero come coordinate lagrangiane. Poniamo

$$W(x, \dot{x}) = m(\omega \wedge \dot{x}) \cdot x$$

Vale, permutando circolarmente il prodotto misto,

$$\vec{\nabla}_x W = m(\omega \wedge \dot{x}), \ \vec{\nabla}_{\dot{x}} W = \vec{\nabla}_{\dot{x}} [m(x \wedge \omega) \cdot \dot{x}] = -m(\omega \wedge x)$$

e infine

$$Q(x, \dot{x}) = \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_{\dot{x}}W) - \vec{\nabla}_{x}W = -2m(\omega \wedge \dot{x}).$$

#### Forma normale delle equazioni di Lagrange

Consideriamo un lagrangiana meccanica L = T - V e scriviamo l'energia cinetica come forma quadratica non degenere

$$T(t,q,\dot{q}) = \frac{1}{2}A(t,q)\dot{q}\cdot\dot{q} + B(t,q)\cdot\dot{q} + C(t,q).$$

Supponiamo che oltre a forze conservative siano presenti anche forze non conservative aventi componenti lagrangiane

$$Q_{\alpha} = Q_{\alpha}(t, q, \dot{q}).$$

Le equazioni di Lagrange assumono quindi la forma più generale

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha}(t, q, \dot{q}). \tag{6.4}$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}}) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = -\frac{\partial V}{\partial q_{\alpha}} + Q_{\alpha}(t, q, \dot{q})$$
(6.5)

Nel termine  $\partial L/\partial q$  compaiono al massimo derivate *prime* rispetto al tempo delle q mentre le derivate seconde rispetto al tempo delle q compaiono nella forma seguente

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}) = \frac{d}{dt}(A\dot{q} + B) = A\ddot{q} + \frac{d}{dt}(A(t,q))\dot{q} + \frac{dB}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}(t,q,\dot{q}) + Q(t,q,\dot{q})$$

Poichè A è matrice invertibile, possiamo esplicitare le equazioni rispetto alle derivate di ordine massimo, le  $\ddot{q}$ , mettendo quindi l'equazioni in forma normale

$$\ddot{q} = A^{-1}(t,q)\left[-\frac{d}{dt}(A(t,q))\dot{q} - \frac{d}{dt}B(t,q) + \frac{\partial L}{\partial q}(t,q,\dot{q}) + Q(t,q,\dot{q})\right] = G(t,q,\dot{q}).$$
(6.6)

Nel caso generale di Lagrangiana non meccanica, la condizione necessaria e sufficiente, verificata nel caso meccanico, è

$$\det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}) \neq 0.$$

Se il sistema è in forma normale, per esso vale il teorema di esistenza e unicità della soluzione.

#### Moto geodetico su una superficie fissa

In questo paragrafo ricaviamo le equazioni del moto di un punto mobile su di una superficie bidimensionale fissa, che consideriamo come un vincolo liscio. Partiamo quindi dalla (5.1) per N=1 e n=2: la velocità del punto il cui moto sulla varietà è descritto dalla curva  $t\mapsto q(t)\in U$  si scrive come

$$v = \frac{d\psi}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}}(q) = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}.$$
 (6.7)

e l'accelerazione come

$$a = \frac{dv}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \ddot{q}_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}}(q) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^{2} \psi}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}}(q) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}$$

Ora, procedendo come nella deduzione delle equazioni di Lagrange, proiettiamo l'equazione di Newton

$$ma = F + \Phi$$
.

sullo spazio tangente alla superficie  $T\mathcal{M}$ . Si ha allora

$$ma \cdot \mathbf{e}_{\gamma} = F \cdot \mathbf{e}_{\gamma} + \Phi \cdot \mathbf{e}_{\gamma} = Q_{\gamma}$$

trasformiamo il primo membro

$$ma \cdot \mathbf{e}_{\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{n} \ddot{q}_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_{\gamma}} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^{2} \psi}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_{\gamma}} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}$$

che riscriviamo, ricordando l'espressione dell'energia cinetica, come

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A_{\gamma\alpha} \ddot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \{\alpha\beta,\gamma\} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = Q_{\gamma}.$$

Ora moltiplichiamo per  $A_{\rho\gamma}^{-1}$  e sommiamo su  $\gamma$  ottenendo

$$\ddot{q}_{\rho} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} \frac{\partial^{2} \psi}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_{\gamma}} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = \sum_{\gamma} A_{\rho\gamma}^{-1} Q_{\gamma}$$

che riscriviamo come

$$\ddot{q}_{\rho} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} \Gamma_{\gamma}^{\alpha\beta}(q) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = \tilde{Q}_{\rho} = \sum_{\gamma} A_{\rho\gamma}^{-1} Q_{\gamma}. \tag{6.8}$$

Le quantità  $\Gamma_{\gamma}^{\alpha\beta}(q)$  sono dette *simboli di Christoffel*. Nel caso di moto su di una superficie in assenza di forze attive, le equazioni di Lagrange hanno la forma

$$\ddot{q}_{\rho} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} \Gamma_{\gamma}^{\alpha\beta}(q) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = 0$$
 (6.9)

Esse costituiscono la generalizzazione al caso di uno spazio curvo (la varietà vincolare) dell'equazione  $\ddot{\mathbf{x}}=0$  valida per il moto inerziale i.e. in assenza di forze attive, di un punto materiale. La (6.9) è un punto di partenza per introdurre la nozione di derivata covariante, che generalizza al caso di uno spazio curvo la nozione di derivata ordinaria.

#### 6.1.1 Equilibrio e stabilità per sistemi lagrangiani

Restringiamoci al caso di vincoli olonomi fissi e sollecitazione anche non solo conservativa ma indipendente dal tempo. Questa è la situazione più generale per studiare il problema della stabilità degli equilibri. Allora l'energia cinetica si riduce alla parte quadratica  $2T_2 = A(q)\dot{q} \cdot \dot{q}$ . Le equazioni di Lagrange in forma normale si scrivono da (6.6)

$$\ddot{q} = A^{-1}(q) \left[ -\frac{\partial A(q)}{\partial q} \dot{q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} A(q) \dot{q} \cdot \dot{q} - V(q) \right) + Q(q, \dot{q}) \right]$$

Se mettiamo il sistema al primo ordine,

$$\begin{cases}
\dot{q} = v, \\
\dot{v} = A^{-1}(q)\left[-\frac{\partial A(q)}{\partial q}v \cdot v + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}A(q)v \cdot v - V(q)\right) + Q(q, v)\right].
\end{cases} (6.10)$$

gli equilibri sono le (q, v) che annullano il secondo membro delle equazioni sopra scritte e quindi hanno la forma  $(q^*, 0)$  ove le configurazioni di equilibrio  $q^*$  verificano

$$-\frac{\partial V}{\partial q}(q^*) + Q(q^*, 0) = 0. \tag{6.11}$$

Teorema 6.1.1 (di variazione dell'energia) Per un sistema Lagrangiano a vincoli mobili e sollecitazione conservativa e dissipativa, lungo le soluzioni delle equazioni di Lagrange (6.4) la quantità scalare, detta integrale di Jacobi

$$E(t,q,\dot{q}) = \dot{q} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L(t,q,\dot{q})$$
(6.12)

varia come

$$\dot{E} = -\frac{\partial L}{\partial t} + Q(t, q, \dot{q}) \cdot \dot{q}.$$

Dimostrazione. Per verifica diretta usando le (6.4)

$$\begin{split} \dot{E} &= \ddot{q} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q} \cdot \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - [\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}] \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t} + \dot{q} \cdot [\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q}] = -\frac{\partial L}{\partial t} + Q(t, q, \dot{q}) \cdot \dot{q} \end{split}$$

Nel caso di sistemi a vincoli fissi e sollecitazione conservativa, la quantità E è dunque integrale primo del moto. Questo vale per una generica lagrangiana  $L(q,\dot{q})$  indipendente dal tempo. Per lagrangiane meccaniche L=T-V indipendenti dal tempo la quantità E ha il significato di energia totale del moto E=T+V. Si ha infatti

$$E = \dot{q} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \dot{q} \cdot A(q)\dot{q} - (T - V) = 2T - T + V = T + V.$$

Il risultato trovato induce a pensare che l'energia totale del E=T+V possa essere usata come funzione di Lyapunov per indagare la stabilità degli equilibri dei sistemi lagrangiani a vincoli fissi e sollecitazione indipendente dal tempo. La questione viene precisata attraverso questo classico teorema che porge condizioni sufficienti per la stabilità

Teorema 6.1.2 (Lagrange-Dirichlet) Sia  $q^*$  configurazione di equilibrio -vedi (6.11)-per il sistema lagrangiano a vincoli fissi e sollecitazione indipendente dal tempo descritto da (6.10). Supponiamo che la sollecitazione non conservativa sia giroscopica o dissipativa

$$Q(q, \dot{q}) \cdot q \le 0.$$

Se  $q^*$  è minimo stretto locale di V, allora  $(q^*,0)$  è equilibrio stabile.

Dimostrazione. Mostriamo che la funzione

$$W(q, v) = E(q, v) = T(q, v) + V(q)$$

definita in un intorno di  $(q^*,0)$  nello spazio delle fasi (q,v) è una funzione di Lyapunov. Si ha  $W(q^*,0) = V(q^*)$ . Inoltre  $T(q,v) = \frac{1}{2}A(q)v \cdot v > 0$  i.e. è strettamente positiva in un intorno di  $(q^*,0)$  ove sia  $v \neq 0$ , ovvero fuori del sottospazio v=0. Ma in tale sottospazio  $W(q,v) \equiv V(q)$  che ha minimo stretto in  $q^*$ , quindi  $W > W(q^*,0)$  in un intorno  $D - \{(q^*,0)\}$ . Inoltre, per il teorema di conservazione dell'energia<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}(W) = \dot{W} = Q(q, \dot{q}) \cdot q \le 0.$$

Osservazione Il Teorema di Lagrange-Dirichlet vale anche per sistemi non lagrangiani, usando la versione del Teorema di conservazione dell'energia data dal Teorema 5.1.2.

Enunciamo senza dimostrazione il seguente teorema che, sotto ipotesi più restrittive, dà condizioni *necessarie* e sufficenti per la stabilità.

Teorema 6.1.3 (dell'Hessiano non degenere) Sia q\* configurazione di equilibrio -vedi (6.11)- per il sistema lagrangiano a vincoli fissi e sollecitazione solo conservativa descritto da (6.10). Sia la matrice hessiana del potenziale valutata nell'equilibrio non degenere

$$\det H_V(q^*) = \det \frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q}(q^*) \neq 0.$$

La configurazione  $q^*$  è equilibrio stabile se e solo se la matrice  $H_V(q^*)$  è definita positiva

$$H_V(q^*)u \cdot u > 0 \qquad \forall \ u \in \mathbb{R}^n.$$

#### 6.1.2 Lagrangiana ridotta di Routh

Presentiamo una versione del metodo di Routh detta elementare perchè basata sulle proprietà della Lagrangiana espresse in una carta locale. Questa presentazione è sufficente a dare un'idea del metodo anche se una versione più approfondita, che usi oggetti geometrici intrinseci, indipendenti quindi dalla rappresentazione scelta in una

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Lo studente attento si sarà accorto che qui non verifichiamo "alla lettera" l'enunciato del T. di Lyapunov e cioè non controlliamo che  $\mathcal{L}(W)$  sia non positiva in tutto un intorno dell'equilibrio, ma solo che W è monotona non crescente lungo le soluzioni. Questo, riguardando bene la dimostrazione del Teorema, è sufficiente per mostrare la stabilità semplice e in effetti avremmo potuto optare per questa formulazione più generale. Tale condizione non è però sufficiente per la stabilità asintotica.

carta locale sarebbe preferibile. Supponamo che le coordinate locali  $q \in U \subset \mathbb{R}^n$  si possano suddividere in due gruppi

$$q = (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

e che la Lagrangiana dipenda solo dalle coordinate x, ovvero  $L = L(t, x, \dot{x}, \dot{y})$ . Allora i momenti coniugati alla coordinate  $ignorabili\ y$  sono costanti, ovvero

$$\begin{cases}
0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right), \\
0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right)
\end{cases} (6.13)$$

Inoltre, supponiamo che gli n-k integrali primi di ciclicità

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(t, x, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(t_0, x_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = c. \tag{6.14}$$

siano invertibili rispetto alle variabili  $\dot{y}$ . Una condizione sufficente per questo è che la matrice hessiana della L rispetto a tutte le velocità  $\dot{q}$  sia non degenere. Allora, relativamente al loro dominio di definizione, possiamo considerare le n-k funzioni che invertono le (6.14)

$$\dot{y} = \varphi(t, x, \dot{x}, c)$$

e, sempre nel dominio considerato, introdurre la funzione di Routh o Routhiano (si tratta in effetti di una classe di Lagrangiane dipendente dal valore scelto c per gli integrali primi)

$$\mathcal{R}^{c}(t, x, \dot{x}) = L(t, x, \dot{x}, \varphi(t, x, \dot{x}, c)) - c \cdot \varphi(t, x, \dot{x}, c).$$

In sostanza, la presenza di n-k coordinate ignorabili permette di descrivere i moti del sistema per mezzo di una nuova lagrangiana che contiene solo le coordinate x; l'effetto delle altre coordinate entra attraverso i valori degli integrali primi. Vale infatti il seguente teorema

**Teorema 6.1.4 (Routh)** Sia x(t) soluzione delle k equazioni di Lagrange per  $\mathcal{R}^c$  relativa alle condizioni iniziali  $(x_0, \dot{x}_0)$  e per un fissato valore c degli integrali primi. Allora la curva q(t) = (x(t), y(t)) ove y(t) è data da

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t \varphi(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau), c) d\tau$$
(6.15)

risolve le equazioni di Lagrange per L con dati iniziali  $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \varphi(x_0, \dot{x}_0, c))$ .

**Dimostrazione**. La (6.15) derivata rispetto al tempo assicura che  $\dot{y} = \varphi(x, \dot{x}, c)$  e quindi che  $\partial L/\partial \dot{y} = c$ . Quindi

$$\frac{\partial \mathcal{R}^c}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} - c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

e analogamente

$$\frac{\partial \mathcal{R}^c}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

quindi la curva x(t) risolvente le equazioni di Lagrange per  $\mathcal{R}^c$  risolve anche le equazioni di Lagrange relativamente alle variabili x per L. Inoltre, come già visto, la (6.15) è equivalente a dire che  $\partial L/\partial \dot{y} = c$  lungo la curva (x(t), y(t)) definita da (6.15).

#### 6.1.3 Teorema di Noether

Il teorema di Noether afferma che simmetrie del sistema, ovvero invarianze in forma della Lagrangiana rispetto a cambi di coordinate, sono indici dell'esistenza di integrali primi dei moti del sistema. L'esistenza di integrali primi può essere sfruttata, con un procedimento detto riduzione che generalizza quello di Routh presentato, per ottenere una descrizione del sistema in termini delle sole coordinate effettive del sistema. Cominciamo introducendo un generico cambio di coordinate (diffeomorfismo) nell'aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$  dipendente da un parametro  $\lambda \in I \subset \mathbb{R}$ , con I aperto contenente  $0 \in I$ .

$$Q = Q(q, \lambda),$$
  $Q(q, 0) = q.$ 

Teorema 6.1.5 (Emmy Noether) Se la Lagrangiana  $L(t, q, \dot{q})$  è invariante per il cambio di coordinate dipendente dal parametro  $\lambda$ , ovvero

$$L(t, Q(q, \lambda), \frac{\partial Q}{\partial q}(q, \lambda)\dot{q}) = L(t, q, \dot{q}) \quad \forall \lambda \in I$$
 (6.16)

allora la quantità

$$\mathcal{I}(q,\dot{q},t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q},t) \frac{\partial Q}{\partial \lambda}(q,0)$$

è un integrale primo del moto del sistema.

**Dimostrazione** Deriviamo la (6.16) rispetto a  $\lambda$  per  $\lambda = 0$ . Si ha allora, scambiando ove serve l'ordine di derivazione e usando la regola di derivazione del prodotto

$$0 = \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda \partial q} \dot{q} \right]_{\lambda=0} =$$

$$= \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\frac{\partial Q}{\partial \lambda}) \right]_{\lambda=0} =$$

$$= \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} + \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial Q}{\partial \lambda}) - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} =$$

$$= \left[ (\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})) \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} + \left[ \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial Q}{\partial \lambda}) \right]_{\lambda=0} =$$

Se q(t) è soluzione delle equazioni di Lagrange per L allora il primo addendo dell'ultima relazione scritta è nullo e si ha che lungo il moto

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}(q,\dot{q},t) = \left[\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial Q}{\partial \lambda})\right]_{\lambda=0} = 0$$

#### **Applicazioni**

Facciamo vedere che per un sistema di N punti materiali soggetti a forze interne di mutua interazione dipendenti solo dalla distanza, la conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto si possono leggere come conseguenze

dell'invarianza della Lagrangiana rispetto a traslazioni e rotazioni del sistema di riferimento –si vedano le (5.2) e (6.1) per le notazioni–

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \sum_{i,j=1}^{N} U(|x_i - x_j|).$$

Una generica traslazione di un vettore  $\lambda a \in \mathbb{R}^3$  del riferimento  $(O, \mathbf{e}_i)$  in cui sono descritte le posizioni degli N punti genera il diffeomorfismo dipendente dal parametro  $\lambda \in I$ 

$$Q(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \quad \mathbf{a} = (a, \dots, a)$$

ed è immediato constatare che L è invariante per il cambio di coordinate. L'integrale primo corrispondente ha la forma

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = m\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = a \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i$$

e quindi corrisponde alla quantità di moto del sistema, per l'arbitrarietà di a.

Vediamo ora le rotazioni. Sia  $\omega \in \mathbb{R}$  un generico vettore e  $\Omega$  la matrice antisimmetrica associata all'applicazione lineare  $x \mapsto \omega \wedge x = \Omega x$  (si veda il Teorema 4.2.1). Si può dimostrare che la matrice  $R(\lambda) = e^{\lambda\Omega}$  è una rotazione propria  $(R = R^T, \det R = 1)$ . Con essa costruiamo la famiglia di diffeomorfismi dipendenti dal parametro  $\lambda$ 

$$\mathbf{X} = Q(\mathbf{x}, \lambda) = (e^{\lambda \Omega} x_1, \dots, e^{\lambda \Omega} x_N)$$

Le rotazioni conservano la norma del vettore, quindi si ha

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \qquad |X_i - X_j| = |x_i - x_j|, \quad \forall i, j$$

e la lagrangiana è invariante. Vediamo la quantità conservata. Si ha

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} = \left[\left(\Omega e^{\lambda \Omega} x_1, \dots, \Omega e^{\lambda \Omega} x_N\right)\right]_{\lambda=0} = \left(\Omega x_1, \dots, \Omega x_N\right)$$

da cui

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i \cdot \Omega x_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i \cdot \omega \wedge x_i = \omega \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i x_i \wedge \dot{x}_i$$

che corrisponde al momento della quantità di moto del sistema.

#### 6.1.4 Invarianza in forma delle equazioni di Lagrange

Il sistema di equazioni di Lagrange ha il vantaggio evidente di tradurre il problema della determinazione del moto di un sistema di punti materiali vincolati in un sistema di equazioni diferenziali non contenente termini incogniti (le reazioni vincolari appunto). Tale sistema è minimale, nel senso che il numero di variabili, le coordinate generalizzate q, è il minimo necessario per descrivere un generico moto permesso dai vincoli. Rimane il fatto che tali equazioni sono relative ad una parametrizzazione locale  $\psi$  della varietà vincolare, nella quale sono espressi i termini T e V che intervengono in L. Basta però pensare che l'ipotesi fondamentale per dedurre

le equazioni, e cioè che i vettori  $m_i a_i - F_i$  abbiano proiezione nulla sul locale piano tangente, esprime una proprietà geometrica intrinseca del sistema di vettori, indipendente quindi dalla parametrizzazione scelta. Questo si traduce nella proprietà seguente: le equazioni del moto hanno la forma (6.3) indipendentemente dalla parametrizzazione scelta. Vediamo la dimostrazione. Il punto  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{M}$  sia descritto dalle coordinate q e q' nelle parametrizzazioni  $\psi$  e  $\psi'$  ovvero

$$\mathbf{x} = \psi(q, t) = \psi'(q', t)$$

Per definizione di carte compatibili, rimane allora definito un diffeomorfismo locale tra aperti di  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\varphi = \psi'^{-1} \circ \psi, \qquad q' = \varphi(q, t), \quad \psi(q, t) \equiv \psi'(\varphi(q, t), t) \quad \forall q$$
 (6.17)

per cui vale la seguente relazione tra vettori della base locale di  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ 

$$\mathbf{e}_{\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \psi'}{\partial q_{\beta}'} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^{n} \varphi_{\alpha\beta}^{T} \mathbf{e}' \beta$$

ove  $\varphi_{\alpha\beta}$  è matrice invertibile, con determinante quindi non nullo. Ora, le equazioni di Lagrange si scrivono a partire dalla condizione variazionale di D'Alembert che possiamo esprimere nella forma compatta (il prodotto scalare è quello in  $\mathbb{R}^{3N}$ )

$$(m\ddot{\mathbf{x}} - F) \cdot \mathbf{e}_{\alpha} = 0 \quad \forall \ \alpha = 1, \dots, n.$$

Sostituendo

$$0 = (m\ddot{\mathbf{x}} - F) \cdot \mathbf{e}_{\alpha} = (m\ddot{\mathbf{x}} - F) \cdot \sum_{\beta=1}^{n} \varphi_{\alpha\beta}^{T} \mathbf{e}' \beta = \sum_{\beta=1}^{n} \varphi_{\alpha\beta}^{T} [(m\ddot{\mathbf{x}} - F) \cdot \mathbf{e}'_{\beta}]$$

ed essendo  $\varphi_{\alpha\beta}$  invertibile, questo equivale alla validità delle equazioni di Lagrange nelle nuove coordinate

$$(m\ddot{\mathbf{x}} - F) \cdot \mathbf{e}'_{\beta} = 0 \quad \forall \ \beta = 1, \dots, n.$$

Il risultato visto ha un formulazione, geometricamente meno evidente ma di uso frequente nelle applicazioni, in termini di funzioni lagrangiane.

**Proposizione 6.1.3** Il moto  $t \mapsto q'(t)$  soddisfa le equazioni di Lagrange (6.3) per la Lagrangiana  $L'(t, q', \dot{q}')$  se e solo se, avendo posto –vedi (6.17)–

$$L(t, q, \dot{q}) = L'(t, \varphi(q, t), d\varphi(q, t)\dot{q} + \frac{\partial \varphi}{\partial t})$$

ove

$$q' = \varphi(q, t), \quad \dot{q}' = d\varphi(q, t)\dot{q} + \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

il moto  $t \mapsto q(t)$  implicitamente definito da  $q'(t) = \varphi(q(t), t)$  soddisfa le equazioni di Lagrange per  $L(t, q, \dot{q})$ .

**Dimostrazione** Si scrivono le equazioni di Lagrange per L, indici ripetuti si intendono sommati

$$\frac{\partial L}{\partial q_h} = \frac{\partial L'}{\partial q_k'} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k'} \left( \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial q_m' \partial q_h} \dot{q}_m' + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t \partial q_h} \right)$$

e inoltre

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h}$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k'}\right) \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k'} \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial q_m' \partial q_h} \dot{q}_m' + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t \partial q_h}\right).$$

Pertanto

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k'} - \frac{\partial L'}{\partial q_k'}\right]\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_h}$$

ed essendo la matrice  $\partial \varphi(q)/\partial q$  invertibile quindi non singolare, [L] = 0 se e solo se [L'] = 0.

## 6.2 Equazioni di Hamel

Il risultato del paragrafo precedente apre la strada, percorsa da Boltzmann e Hamel (Hamel, 1904), ad una generalizzazione delle equazioni di Lagrange maggiore di quella vista sopra relativa al cambio di carte locali della varietà. L'idea che vogliamo mettere in pratica è di scrivere la velocità di un generico moto compatibile con i vincoli q(t), espressa da (5.1), in una base diversa da quella detta base canonica o coordinata dello spazio tangente  $T_q\mathcal{M}$ . Introduciamo quindi n campi vettoriali  $\mathbf{u}_{\sigma}(q)$  linearmente indipendenti in ogni punto q della carta locale, che costituiscono la cosiddetta base locale o anolonoma e indichiamo con  $v_{\sigma}$  le componenti del vettore velocità nella base locale. La (5.1) quindi si riscrive come

$$\mathbf{v} = \frac{d\psi}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}}(q) = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{\sigma=1}^{n} v_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma}.$$
 (6.18)

Indichiamo con  $\alpha, \beta, \gamma$  le quantità relative alla base coordinata e con  $\rho, \sigma, \tau$  le quantità relative alla base locale. Le relazioni tra le componenti del vettore  $\mathbf{v}$  nelle due basi si descrivono per mezzo di due matrici  $n \times n$   $\Lambda$  e X con  $X\Lambda = \mathbb{I}$  tramite le formule solite (indici ripetuti si intendono sommati)

$$v_{\sigma} = \Lambda_{\sigma\alpha}\dot{q}_{\alpha}, \qquad \dot{q}_{\alpha} = X_{\alpha\sigma}v_{\sigma}$$
 (6.19)

mentre  $X^T$  è la matrice che dà le componenti di  $\mathbf{u}_{\sigma}$  nella base  $\mathbf{e}_{\alpha}$ 

$$\mathbf{u}_{\sigma} = X_{\sigma\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}; \tag{6.20}$$

inoltre, le n righe della matrice  $\Lambda_{\sigma\alpha}$  possono essere viste come n 1-forme

$$\Lambda_{\sigma} = \Lambda_{\sigma\alpha}(q)dq_{\alpha}$$

che costituiscono la base duale delle  $\mathbf{u}_{\sigma}$  nel senso che

$$\Lambda_{\sigma}(\mathbf{u}_{\rho}) = \sum_{\alpha} \Lambda_{\sigma\alpha} dq_{\alpha} \left( \sum_{\beta} X_{\beta\rho} \mathbf{e}_{\beta} \right) = \sum_{\alpha\beta} \Lambda_{\sigma\alpha} X_{\beta\rho} \delta_{\alpha\beta} = (\Lambda X)_{\rho\sigma} = \delta_{\rho\sigma}. \tag{6.21}$$

Inoltre, ricordando la definizione di Parentesi di Lie  $[X,Y](q) \in T_q\mathcal{M}$  di due campi vettoriali  $X(q), Y(q) \in T_q\mathcal{M}$ ,

$$[X,Y](q)_i = \sum_j X_j \frac{\partial Y_i}{\partial q_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial q_j}$$
 (6.22)

possiamo scrivere

$$[\mathbf{u}_{\sigma}, \mathbf{u}_{\rho}](q) = \sum_{\tau} c_{\sigma\rho}^{\tau}(q) \mathbf{u}_{\tau}(q)$$

ove i coefficenti  $c_{\sigma\rho}^{\tau}(q)$  sono detti costanti di struttura associati alla base locale. Infine, abbiamo bisogno della nozione di derivata esterna di una 1-forma  $\omega = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}(q) dq_{\alpha}$ 

$$\mathbf{d}\omega = \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} - \frac{\partial \omega_{\beta}}{\partial q_{\alpha}}\right) dq_{\alpha} \otimes dq_{\beta} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} dq_{\alpha} \otimes dq_{\beta};$$

l'azione di  $\mathbf{d}\omega$  su due campi vettoriali  $X(q), Y(q) \in T_q \mathcal{M}$  è

$$\mathbf{d}\omega(X,Y) = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} X_{\alpha} X_{\beta}.$$

#### Proposizione 6.2.1 Vale

$$\mathbf{d}\Lambda_{\sigma}(\mathbf{u}_{\rho}, \mathbf{u}_{\tau}) = -\Lambda_{\sigma}([\mathbf{u}_{\rho}, \mathbf{u}_{\tau}]) = -c_{\rho\tau}^{\sigma}$$
(6.23)

Dimostrazione. Usando la (6.20)

$$\mathbf{d}\Lambda_{\sigma}(\mathbf{u}_{\rho}, \mathbf{u}_{\tau}) = \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \Lambda_{\sigma\alpha}}{\partial q_{\beta}} - \frac{\partial \Lambda_{\sigma\beta}}{\partial q_{\alpha}}\right) (\mathbf{u}_{\rho})_{\alpha} (\mathbf{u}_{\tau})_{\beta} = \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \Lambda_{\sigma\alpha}}{\partial q_{\beta}} - \frac{\partial \Lambda_{\sigma\beta}}{\partial q_{\alpha}}\right) X_{\alpha\rho} X_{\beta\tau}$$
(6.24)

derivando la relazione  $\Lambda X = \mathbb{I}$  si ha

$$\sum_{\alpha} \Lambda_{\sigma\alpha,\beta} X_{\alpha\rho} = -\sum_{\alpha} \Lambda_{\sigma\alpha} X_{\alpha\rho,\beta}, \qquad \sum_{\beta} \Lambda_{\sigma\beta,\alpha} X_{\beta\tau} = -\sum_{\beta} \Lambda_{\sigma\beta} X_{\beta\tau,\alpha}$$

per cui, ricordando la definizione di parentesi di Lie e la (6.21)

$$\mathbf{d}\Lambda_{\sigma}(\mathbf{u}_{\rho},\mathbf{u}_{\tau}) = -\Lambda_{\sigma}([\mathbf{u}_{\rho},\mathbf{u}_{\tau}]) = -\Lambda_{\sigma}(\sum_{\nu} c_{\rho\tau}^{\nu} \mathbf{u}_{\nu}) = -c_{\rho\tau}^{\sigma}.$$

La maggiore generalità delle formulazione di Hamel delle equazioni di Lagrange consiste nello scrivere l'atto di moto  $(q, \dot{q})$  nelle base locale o anolonoma (q, v) usando la  $(6.19)_2$ . Data la lagrangiana  $L(q, \dot{q})$ , possiamo sempre considerare la lagrangiana  $\tilde{L}(q, v)$  tale che  $\tilde{L}(q, v) \equiv L(q, \dot{q})$  se  $v = \Lambda \dot{q}$ . Allora

$$p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_{\sigma}} \frac{\partial v_{\sigma}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \pi_{\sigma} \Lambda_{\sigma\alpha}$$

Abbiamo quindi la legge di trasformazione nello spazio delle fasi  $v=\Lambda\dot{q},\pi=\Lambda^{-T}p.$  Allora

$$\dot{p}_{\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) = \dot{\pi}_{\sigma} \Lambda_{\sigma\alpha} + \pi_{\sigma} \frac{\partial \Lambda_{\sigma\alpha}}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\beta}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\beta}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_{\beta}} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_{\rho}} \frac{\partial v_{\rho}}{\partial q_{\beta}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_{\beta}} + \pi_{\rho} \frac{\partial \Lambda_{\rho\alpha}}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\alpha}.$$

da cui, cambiando ove serve gli indici muti,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = \dot{\pi}_{\sigma}\Lambda_{\sigma\alpha} + \pi_{\sigma}\left(\Lambda_{\sigma\alpha,\beta}X_{\beta\tau} - \Lambda_{\sigma\beta,\alpha}X_{\beta\tau}\right)v_{\tau} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_{\alpha}} = 0$$

se moltiplichiamo a destra per  $X_{\alpha\rho}$  e sommiamo su  $\alpha$  otteniamo

$$\dot{\pi}_{\rho} + \pi_{\sigma} \mathbf{d} \Lambda_{\sigma} (\mathbf{u}_{\rho}, \mathbf{u}_{\tau}) v_{\tau} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_{\alpha}} X_{\alpha \rho} = 0$$

ovvero, le equazioni di Hamel

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_{\rho}}) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_{\alpha}} X_{\alpha\rho} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_{\sigma}} c_{\rho\tau}^{\sigma} v_{\tau}. \tag{6.25}$$

Osservazione. Si noti che, se la base locale è costituita da campi vettoriali che commutano, cioè  $[\mathbf{u}_{\rho}, \mathbf{u}_{\sigma}] = 0$ , i coefficenti di struttura sono tutti nulli e le equazioni di Hamel perdono il termine aggiuntivo che proviene dal considerare una base di  $T_q \mathcal{M}$  anolonoma, cioè che non si può scrivere come base coordinata rispetto ad un'opportuna carta locale. La condizione di commutatività dei campi vettoriali è proprio (Teorema di Frobenius) la condizione necessaria e sufficiente per poter integrare la distribuzione  $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ .

#### 6.3 Piccole oscillazioni

Vogliamo linearizzare il sistema di equazioni di Lagrange ridotto al primo ordine (6.10) per un sistema a vincoli fissi e sollecitazione conservativa nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile che possiamo scrivere come  $q^* = 0$  effettuando una traslazione del sistema di coordinate. Supponiamo inoltre che  $H_V(0)$ , simmetrica, sia anche definita positiva. Il sistema (6.10) si scrive nella forma

$$\dot{q} = f(v) = v, \qquad \dot{v} = g(q, v).$$

Dobbiamo calcolare le derivate parziali di f e g e valutarle nell'equilibrio (0,0). Si ha allora immediatamente  $\partial f/\partial q \equiv 0$ ,  $\partial f/\partial v \equiv \mathbb{I}$  mentre

$$\frac{\partial g}{\partial q}(q,v) = \frac{\partial}{\partial q} (A^{-1}(q))[\ldots] + A^{-1}(q)[-\frac{1}{2}H_A(q)v \cdot v - \frac{\partial^2}{\partial q\partial q}V(q)].$$

La quantità sopra scritta valutata nell'equilibrio  $V_q(0) = 0$  e per velocità nulle vale

$$\frac{\partial g}{\partial a}(0,0) = -A^{-1}(0)H_V(0)$$

Rimane dal calcolare  $\frac{\partial g}{\partial v}(q, v)$ . Essendo g quadratica in v, la sua derivata rispetto a v è una funzione lineare nelle v e quindi è nulla per velocità nulle. Il campo vettoriale X(q, v) linearizzato nell'equilbrio coincidente con l'origine ha quindi la seguente struttura

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -A^{-1}(0)H_V(0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} = X'(0,0) \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \tag{6.26}$$

ovvero

$$\dot{q} = v, \qquad \dot{v} = -A^{-1}(0)H_V(0)q$$

corrispondenti alla riduzione al primo ordine del sistema di secondo ordine

$$\ddot{q} = -A^{-1}(0)H_V(0)q, \quad i.e. \quad A(0)\ddot{q} + H_V(0)q = 0.$$
 (6.27)

**Esercizio**. Mostrare che le equazioni (6.27) sono le equazioni di Lagrange relative alla Lagrangiana *linearizzata* 

$$L'(q,v) = \frac{1}{2}A(0)v \cdot v - \frac{1}{2}H_V(0)q \cdot q.$$

#### Frequenze delle piccole oscillazioni

Occupiamoci dello studio delle soluzioni q(t) del sistema di equazioni del secondo ordine (6.27) che riscriviamo per semplicità

$$A\ddot{q} + Bq = 0$$

ove A = A(0) e  $B = H_V(0)$  sono matrici simmetriche e definite positive. Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine, quindi vale il principio di sovrapposizione e il sistema ha 2n soluzioni indipendenti che costituiscono una base e che possiamo classificare in base ai dati iniziali  $q_0, \dot{q}_0$ . Cerchiamo un cambio di coordinate lineare  $q = \Gamma u$ , definito da un matrice invertibile  $\Gamma \in Lin(n)$  che muti il sistema in uno equivalente nel quale le coordinate u evolvono indipendentemente le une dalle altre, ovvero il sistema risulta disaccoppiato. Ricordiamo che le equazioni di Lagrange sono invarianti in forma rispetto a cambi di coordinate e quindi dobbiamo aspettarci che le nuove equazioni siano anch'esse equazioni di Lagrange di un'opportuna Lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Dalla proposizione 6.1.3 essendo  $\dot{q} = \Gamma \dot{u}$  sappiamo che  $\mathcal{L}$  deve essere

$$\mathcal{L}(u,\dot{u}) = L'(\Gamma u, \Gamma \dot{u}) = \frac{1}{2}(A\Gamma \dot{u}, \Gamma \dot{u}) - \frac{1}{2}(B\Gamma u, \Gamma u) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}\dot{u}, \dot{u}) - \frac{1}{2}(\mathcal{B}u, u)$$

ove

$$\mathcal{A} = \Gamma^T A \Gamma, \qquad \mathcal{B} = \Gamma^T B \Gamma.$$

Limitandoci a trasformazioni lineari, questa è la semplificazione che possiamo ottenere. Un risultato classico di geometrica dice che è possibile trovare una trasformazione  $\Gamma$  lineare che muta una delle due matrici per esempio la A nella matrice identica  $A = \mathbb{I}$  e l'altra in una matrice diagonale avente tutti autovalori reali positivi (i termini sulla diagonale), dal momento che la matrice B era simmetrica definita positiva.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Costruiamo la Γ come prodotto di più trasformazioni lineari: una prima matrice ortogonale  $R \in SO(3)$  diagonalizza A in  $A' = R^{-1}AR = Diag[a_i]$   $a_i > 0$  per ogni i e trasforma B in un'altra matrice B' ancora simmetrica. Una seconda matrice diagonale  $D = Diag[1/\sqrt{a_i}]$  trasforma la A' nella matrice identità e la B' in un'altra matrice B'' ancora simmetrica. Una terza matrice  $Q \in SO(3)$  lascia inalterata l'identità e trasforma la B'' in una matrice diagonale  $\Omega = Q^{-1}B''Q$ .

Allora nelle coordinate u che vengono dette coordinate normali la lagrangiana è

$$\mathcal{L}(u, \dot{u}) = \frac{1}{2}(\dot{u}, \dot{u}) - \frac{1}{2}(\Omega u, u), \qquad \Omega = Diag[\omega_1^2, \dots, \omega_n^2]$$

e le equazione di Lagrange associate sono quelle di n oscillatori armonici disaccoppiati aventi soluzioni

$$\ddot{u}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 u = 0, \qquad u_{\alpha}(t) = a_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t + \beta_{\alpha}).$$

Se ci limitiamo al problema della determinazione delle frequenze di piccola oscillazione  $\omega_{\alpha}$  dette anche frequenze caratteristiche, non è necessario conoscere la  $\Gamma$ . Le frequenze sono infatto gli autovalori di  $\Omega$  e quindi le n soluzioni di

$$\det(\Omega - \lambda \mathbb{I}) = 0.$$

Ora, sapendo che  $\Omega = \Gamma^T B \Gamma$  e che  $\Gamma^T A \Gamma = \mathbb{I}$  possiamo sostituire e usare la proprietà che  $\det(MN) = \det M \det N$ ,  $\det M = \det M^T$  per cui

$$0 = \det(\Omega - \lambda \mathbb{I}) = \det(\Gamma^T B \Gamma - \lambda \Gamma^T A \Gamma) = \det \Gamma \det(B - \lambda A) \det \Gamma.$$

Le frequenze caratteristiche, pertanto, sono le n soluzioni dell'equazione agli autovalori generalizzata

$$\det(H_V(0) - \lambda A(0)) = 0 \tag{6.28}$$

che coinvolge solo quantità meccaniche e non la trasformazione di coordinate  $\Gamma$ .

### 6.4 Principio variazionale di Hamilton

Le equazioni di Lagrange sono le equazioni di Eulero associate ad un principio variazionale. Questo permette di caratterizzare le traiettorie dinamiche q(t), ovvero risolventi le equazioni di Lagrange per condizioni iniziali fissate, come quelle che rendono stazionario un certo funzionale sull'insieme delle traiettorie. Il principio variazionale di Hamilton può essere così posto alla base della meccanica dei sistemi vincolati, al posto del principio di D'Alembert. Esso ha il vantaggio di fornire una caratterizzazione delle traiettorie dinamiche indipendente dal sistema di coordinate locali scelto; esso è stato generalizzato in molteplici direzioni (meccanica dei Continui, Teorie di Campo, teorie relativistiche). La forma in cui enunciamo il principio è locale dal punto di vista della geometria della varietà.

Il punto di partenza è una lagrangiana definita nelle coordinate locali q come  $L(q, \dot{q}, t)$ . Fissati due istanti  $t_0, t_1$  con  $t_0 < t_1$ , e due configurazioni  $q_0, q_1$  sia

$$\Gamma = \{q(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n, \ q(\cdot) \in \mathcal{C}^2, q(t_i) = q_i, \quad i = 0, 1\}$$

la famiglia (spazio affine) di curve tra le configurazioni iniziale e finale e

$$\Gamma_0 = \{h(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n, \ q(\cdot) \in \mathcal{C}^2, h(t_i) = 0, i = 0, 1\}$$

la famiglia (spazio vettoriale) di vettori di variazione. Introduciamo il funzionale d'azione definito su  $\Gamma$ 

$$\mathcal{F}[q(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\tau, q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau$$

e la sua variazione lungo il vettore  $h \in \Gamma_0$  (è un funzionale lineare su  $\Gamma_0$ )

$$\delta \mathcal{F}[q(\cdot)]h = \frac{d}{ds} \mathcal{F}[q(\cdot) + sh(\cdot)]_{s=0}$$

detta anche derivata direzionale del funzionale. Possiamo ora enunciare il Principio di Hamilton

**Teorema 6.4.1 (Principio di Hamilton)** La curva  $q(\cdot)$  risolve le equazioni di Lagrange per L se e solo se rende stazionario il funzionale d'azione  $\mathcal{F}$  ovvero

$$\delta \mathcal{F}[q(\cdot)]h = 0 \quad \forall h \in \Gamma_0.$$

**Dimostrazione**. Esplicitiamo dapprima la derivata direzionale (indici ripetuti si intendono sommati) e poi usiamo la regola di derivazione del prodotto

$$\begin{split} \delta \mathcal{F}[q(\cdot)]h &= \frac{d}{ds} \int_{t_0}^{t_1} L(q(\tau) + sh(\tau), \dot{q}(\tau) + s\dot{h}(\tau), \tau) d\tau \Big|_{s=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, \tau) h_i(\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, \tau) \dot{h}_i(\tau)] d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial L}{\partial q_i}(q, \dot{q}, \tau) h_i(\tau) + \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i) - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) h_i(\tau)] d\tau \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} [\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i}] h_i(\tau) d\tau + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) h_i(\tau)\right]_{\tau=t_0}^{\tau=t_1} \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} [\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i}] h_i(\tau) d\tau. \end{split}$$

La sufficienza è quindi ovvia: se  $q(\cdot)$  soddisfa alle equazioni di Lagrange, l'integrando è nullo per ogni vettore di variazione. Viceversa, la necessità si dimostra ragionando per assurdo: supponiamo esista un indice j e un istante  $\hat{\tau}$  per i quali il termine tra parentesi quadre è non nullo, per esempio (indici non sommati)

$$\varphi(\hat{\tau}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) (q(\hat{\tau}), \dot{q}(\hat{\tau}), \hat{\tau}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} (q(\hat{\tau}), \dot{q}(\hat{\tau}), \hat{\tau}) > 0.$$

Siccome  $q(\cdot)$  è di classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\varphi$  è continua e per il teorema di permanenza del segno esiste un intorno aperto  $I = (\hat{\tau} - \alpha, \hat{\tau} + \alpha)$  di  $\hat{\tau}$  in cui  $\varphi$  è positiva. Basta allora considerare un vettore di variazione  $\hat{h}$  avente componenti  $\hat{h}_i$  identicamente nulle per  $i \neq j$  mentre  $\hat{h}_j$  è nulla fuori dell'intorno I e positiva in I. Si avrà cura di costruire il raccordo tra la funzione che descrive  $\hat{h}_j$  in I e lo zero in modo che il vettore di variazione si almeno  $\mathcal{C}^2$ . Si ha allora che

$$\delta \mathcal{F}[q(\cdot)]\hat{h} = \int_{\hat{\tau}-\alpha}^{\hat{\tau}+\alpha} \varphi(\tau)\hat{h}_j(\tau)d\tau > 0$$

contro l'ipotesi che  $q(\cdot)$  renda stazionario il funzionale d'azione.

## 7 Dinamica del corpo rigido

Il modello di corpo rigido è uno dei più importanti in Fisica matematica per le sue numerosissime applicazioni. Per semplicità, invece di pensare ad un corpo continuo, consideriamo un insieme di punti materiali di massa  $m_i$  per i quali sono possibili solo moti rigidi, definiti al 4.2.4. Per quanto visto nella cinematica dei sistemi rigidi, se il sistema rigido è costituito da almeno tre punti non allineati, ad esso è possibile associare una terna  $T_m = (O, e_i)$ , detta terna mobile, solidale al sistema, e descrivere il moto del corpo rigido attraverso il moto di  $T_m$  rispetto ad una terna inerziale  $T_f = (O^*, e_i^*)$  che chiamiamo terna fissa. In alcuni casi l'origine della terna mobile sarà il baricentro G del sistema.

#### 7.0.1 Dal principio di D'Alembert alle equazioni Cardinali

In questo paragrafo mostriamo che il vincolo di rigidità è olonomo fisso e liscio e che la validità della condizione variazionale di D'Alembert, necessaria e sufficiente per determinare i moti dinamicamente possibili coincide con la validità delle equazioni cardinali. Schematizziamo il corpo rigido con un insieme di n punti materiali di massa  $m_i$ . L'ipotesi fondamentale che garantisce l'idealità del vincolo è supporre che le reazioni vincolari siano un sistema equilibrato di forze che soddisfano il principio di azione e reazione in forma forte, ovvero che per ogni coppia di punti i, j, individuata dai vettori posizione  $x_i$ ,  $x_j$  la forza  $\phi_{ij}$  che il punto i esercita sul punto j soddisfi a

$$\phi_{ij} + \phi_{ji} = 0,$$
  $\phi_{ij} \wedge (x_i - x_j) = 0.$  (7.1)

Segue quindi, ponendo per semplicità  $\phi_{ii} = 0$  che la reazione vincolare dell'intero corpo sul punto i è

$$\Phi_i = \sum_{i=1}^n \phi_{ji} \tag{7.2}$$

e l'insieme dei vettori  $\Phi_i$  è un sistema equilibrato di forze, ovvero

$$R^{\Phi} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i = 0, \qquad M^{\Phi} = \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge \Phi_i = 0.$$

Dimostrazione: Esercizio. In particolare mostrare che se un sistema ha risultante nulla, il momento *non* dipende dal polo.

La condizione di rigidità del vincolo, si scrive nella forma

$$|x_i - x_j| = c_{ij} \quad \text{per ogni} \quad i, j \tag{7.3}$$

e quindi il vincolo è olonomo e fisso. Ne segue che le velocità permesse dal vincolo sono vettori virtuali. Inoltre, un classico risultato di analisi permette di affermare

che i moti cinematicamente possibili individuati da (7.3) sono tutte e sole le isometrie di  $\mathbb{R}^3$  e quindi ogni configurazione del corpo rigido si ottiene da una configurazione data mediante una roto-traslazione che porta la terna inerziale o terna fissa  $T_f$  a sovrapporsi con la terna mobile  $T_m$  avente origine in un punto del corpo rigido. Ne segue che la varietà della configurazioni del corpo rigido libero è isomorfa alla varietà (è un gruppo di Lie) delle rototraslazioni  $Q = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$  mentre nel caso di un corpo rigido con un punto fisso Q = SO(3). Mediante la formula fondamentale dei moti rigidi, la velocità di un punto i del corpo rigido si scrive in funzione della velocità di un suo punto O

$$v_i = v_O + \omega \wedge (x_i - x_O) = v_O + \omega \wedge OP_i$$
.

Abbiamo quindi che i vettori virtuali sono della forma  $w=(v_1,\ldots,v_n)$  con  $v_i$  velocità permesse dal vincolo mentre le reazioni vincolari sono espresse da  $\Phi=(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$  con componenti date da (7.2). La condizione di idealità del vincolo (5.5) si scrive allora

$$\Phi \cdot w = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \cdot w_i = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \cdot (v_O + \omega \wedge (x_i - x_O)) = R^{\Phi} \cdot v_O + \omega \cdot M_O^{\Phi} = 0$$

e quindi è verificata.

Scriviamo allora la condizione variazionale di D'Alembert (5.6) e permutiamo circolarmente il prodotto misto

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \cdot w_i = \sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \cdot (v_O + \omega \wedge (x_i - x_O))$$

$$= ma_G \cdot v_O + \omega \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_O) \wedge m_i \ddot{x}_i - v_O \cdot R - \omega \cdot N_O$$

$$= [usando la regola di Leibnitz]$$

$$= ma_G \cdot v_O + \omega \cdot [\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} ((x_i - x_O) \wedge m_i \dot{x}_i) - (v_i - v_O) \wedge m_i v_i] - v_O \cdot R - \omega \cdot N_O$$

$$= ma_G \cdot v_O + \omega \cdot [\dot{M}_O + v_O \wedge mv_G] - v_O \cdot R - \omega \cdot N_O$$

$$= (ma_G - R) \cdot v_O + \omega \cdot [\dot{M}_O + v_O \wedge mv_G - N_O] = 0 \quad \forall v_O, \ \omega$$

e quindi la condizione variazionale è soddisfatta se e solo se valgono le equazioni cardinali

$$ma_G = R,$$
  $\dot{M}_O = -v_O \wedge mv_G + N_O.$ 

La seconda equazione cardinale assume la forma  $\dot{M}_O = N_O$  nel caso in cui il polo sia fisso  $v_O = 0$ , oppure si muova con velocità parallela a  $v_G$  oppure sia coincidente con G. Osserviamo il fatto importante seguente: nel caso di un corpo rigido con un punto fisso O, il termine  $N_O$  non contiene il momento della reazione vincolare incognita  $\Phi_O$  che realizza il vincolo di punto fisso perchè rispetto al polo O essa ha momento nullo. E' quindi indispensabile scegliere O come polo. Una volta determinata la velocità angolare (vedi sotto), il moto del punto G è determinato dalla formula  $v_G = \omega \wedge OG$  e quindi anche  $a_G$ . Ne segue che la prima equazione cardinale

$$ma_G = R^{ext} + \Phi_O$$

permette di determinare la reazione vincolare incognita.

## 7.1 L'equazione di Eulero

La seconda equazione cardinale  $\dot{M}_O = N_O$  scritta nella terna solidale al corpo, o terna mobile, si dice equazione di Eulero. Indichiamo con  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$  le componenti del momento angolare nella base solidale

$$M_0 = \mathbf{m} = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{e}_i.$$

Ricordando la formula della derivata temporale dei vettori non solidali (4.12) abbiamo quindi

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m}' + \omega \wedge \mathbf{m} = N_O. \tag{7.4}$$

Se ora supponiamo che la terna mobile  $T_m = (O, \mathbf{e}_i)$  sia una base principale d'inerzia, allora

$$\mathbf{m} = I_O \omega, \qquad I_O = Diag[I_1, I_2, I_3]$$

e otteniamo l'equazione di Eulero per la velocità angolare

$$I_O\omega' + \omega \wedge I_O\omega = N_O \tag{7.5}$$

la stessa equazione, scritta in componenti diviene

$$\begin{cases}
I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= N_1, \\
I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= N_2, \\
I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= N_3.
\end{cases}$$
(7.6)

Analogamente, ponendo  $\omega = I_O^{-1} \mathbf{m}$ otteniamo l'equazione di Eulero nelle sole incognite  $\mathbf{m}$ 

$$\mathbf{m}' + I_O^{-1}\mathbf{m} \wedge \mathbf{m} = N_O \tag{7.7}$$

e in componenti

$$\begin{cases}
\dot{m}_1 - (I_2^{-1} - I_3^{-1}) m_2 m_3 &= N_1, \\
\dot{m}_2 - (I_3^{-1} - I_1^{-1}) m_3 m_1 &= N_2, \\
\dot{m}_3 - (I_1^{-1} - I_2^{-1}) m_1 m_2 &= N_3.
\end{cases}$$
(7.8)

#### Studio qualitativo delle soluzioni

L'equazione di Eulero è non lineare. Una espressione completa delle soluzioni è possibile usando le funzioni ellittiche. Ci limitiamo qui a mostrare alcune caratteristiche delle soluzioni, seguendo il metodo generale di indagine di un'equazione differenziale ordinaria, individuando quindi gli equilibri, studiandone la stabilità e cercando di tracciare il ritratto in fase delle orbite nel caso di corpo rigido non soggetto a momenti  $N_O = 0$ . Si vede subito che una soluzione dell'equazione di Eulero  $\omega = \omega(t)$  permette di determinare, risolvendo un'equazione quasi lineare, la matrice  $\mathcal{R}(t)$  che applica la terna fissa nella terna mobile:

$$\omega(t) \leftrightarrow \Omega(t) \qquad \Omega = \mathcal{R}^T \dot{\mathcal{R}} \qquad \dot{\mathcal{R}}(t) = \mathcal{R}(t) \Omega.$$

Nel caso di un corpo rigido con un punto fisso, Q = SO(3) e il moto è completamente determinato. Nel caso di un corpo rigido libero,  $Q = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ , è conveniente

mettere l'origine della terna mobile nel baricentro. Allora la prima equazione cardinale interviene a determinare il moto del baricentro e nuovamente il moto del corpo rigido è completamente determinato. Iniziamo quindi lo studio dell'equazione di Eulero che riscriviamo come campo vettoriale

$$\omega' = X(\omega) = I_O^{-1}(\omega \wedge I_O\omega)$$

Gli equilibri, detti anche rotazioni stazionarie del corpo rigido sono  $\omega=0$  oppure le soluzioni di

$$I_{O}\omega = \lambda\omega$$

e quindi sono gli autovettori di  $I_O$ . Avendo scelto una base principale d'inerzia, otteniamo che le rotazioni attorno ad un asse principale d'inerzia sono stazionarie  $\omega' = 0$ . Per la specialissima proprietà (4.14) della velocità angolare  $\dot{\omega} = \omega'$ , segue che la velocità angolare ha componenti costanti anche nella terna fissa e quindi le rotazioni stazionarie sono tali anche nel riferimento inerziale  $T_f$ .

Per studiare la stabilità degli equilibri trovati, facciamo uso degli integrali primi del sistema. Essi sono: l'energia cinetica del sistema e il momento angolare. Infatti si ha

$$T = \frac{1}{2}\omega \cdot I_O \omega = \frac{1}{2}I_O^{-1}\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}$$

da cui, derivando e sostituendo l'espressione (7.7) per  $\mathbf{m}'$  si ha

$$\dot{T} = I_O^{-1} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' = I_O^{-1} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \wedge I_O^{-1} \mathbf{m} \equiv 0.$$

Inoltre, da  $\dot{M}_O=0$  si ha che il vettore  $M_O$  ha componenti costanti in  $T_f$  e quindi il suo modulo  $m^2={\bf m}^2$  è costante anche nella terna mobile. Computazionalmente

$$\frac{d}{dt}m^2 = 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' = 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \wedge I_O^{-1}\mathbf{m} \equiv 0.$$

L'insieme dei due integrali primi, funzionalmente indipendenti nel caso di un corpo rigido non sferico  $I_O \neq \lambda \mathbb{I}$  individua la traiettoria del vettore  $\mathbf{m}$  senza specificarne la legge oraria. Abbiamo infatto un sistema in tre variabili  $\mathbf{m}(t) \in \mathbb{R}^3$  soggetto a due vincoli. La punta del vettore  $\mathbf{m}$  si deve muovere quindi su di una varietà di dimensione 3-2=1. E' facile vedere che tale varietà è l'intersezione della sfera  $m^2=cost$  con l'ellisse T=e. Infatti

$$\begin{cases}
 m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= \mathbf{m}^2, \\
 \frac{m_1^2}{2eI_1} + \frac{m_1^2}{2eI_1} + \frac{m_1^2}{2eI_1} &= 1.
\end{cases}$$
(7.9)

Non è restrittivo supporre che  $I_1 < I_2 < I_3$ . Si vede allora (si veda la Figura 7.1) dallo studio delle orbite in un intorno degli equilibri (rotazioni stazionarie attorno agli assi principali d'inerzia) che le rotazioni attorno all'asse di momento intermedio  $I_2$  sono *instabili*, mentre quelle attorno agli assi estremali  $I_1, I_3$  sono *stabili*. Tali affermazioni dedotte dallo studio qualitativo delle orbite possono essere verificate usando i teoremi sulla stabilità visti nel capitolo di Meccanica Lagrangiana.

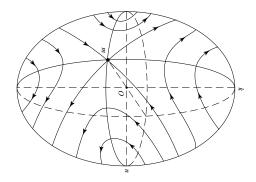


Figura 7.1: Orbite del corpo rigido (da Greenwood D.T., Advanced Dynamics)

#### Stabilità e instabilità delle rotazioni stazionarie

La stabilità delle rotazioni attorno agli assi d'inerzia estremali si accerta esibendo un'opportuna funzione di Lyapunov per il campo vettoriale X ove

$$\omega' = X(\omega) = I_O^{-1}(\omega \wedge \omega) \tag{7.10}$$

Sia  $\omega^* = (\lambda, 0, 0)$  la rotazione stazionaria attorno ad  $\mathbf{e}_1$  e supponiamo  $I_1 > I_2 > I_3$ . La candidata funzione di Lyapunov è

$$W(\omega) = \left(\frac{1}{2}\omega \cdot I_O\omega - \frac{1}{2}\omega^* \cdot I_O\omega^*\right)^2 - (I_O\omega)^2 + I_1\omega \cdot I_O\omega$$

che si riscrive come

$$W(\omega) = \left(\frac{1}{2}\omega \cdot I_O \omega - \frac{1}{2}\omega^* \cdot I_O \omega^*\right)^2 + I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2 + I_3(I_1 - I_2)\omega_3^2.$$

Si tratta quindi di una funzione definita positiva e nulla nell'equilibrio. La sua derivata lungo i moti del corpo rigido non soggetto a momenti, essendo W una combinazione di integrali primi di costanti, è necessariamente nulla e quindi l'equilibrio è stabile. Analogamente si procede per le rotazioni attorno ad  $\mathbf{e}_3$ .

Vediamo ora l'instabilità delle rotazioni stazionarie attorno all'asse intermedio usando il metodo spettrale, il più utile per accertare l'instabilità. L'equazione di Eulero (7.10) sopra scritta si dettagli in componenti –vedi (7.6)–

$$\begin{cases}
\dot{\omega}_1 = A\omega_2\omega_3, \\
\dot{\omega}_2 = B\omega_3\omega_1, \\
\dot{\omega}_3 = C\omega_1\omega_2.
\end{cases}$$
(7.11)

ove, supponendo  $I_1 < I_2 < I_3$  si è posto

$$A = \frac{I_2 - I_3}{I_1} < 0, \qquad B = \frac{I_3 - I_1}{I_2} > 0 \qquad C = \frac{I_1 - I_2}{I_3} < 0.$$

Linearizziamo il campo vettoriale  $X(\omega)$  attorno all'equilibrio  $\omega^* = (0, \eta, 0)$  ottenendo

$$JX(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & A\omega_3 & A\omega_2 \\ B\omega_3 & 0 & B\omega_1 \\ C\omega_2 & C\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad JX(\omega^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A\eta \\ 0 & 0 & 0 \\ C\eta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono dati da

$$\det(JX(\omega^*) - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda(\lambda^2 - AC\eta^2) = 0$$

e quindi

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm |\eta| \sqrt{AC}.$$

Avendo un autovalore reale positivo, l'equilibrio è instabile anche per il sistema nonlineare.

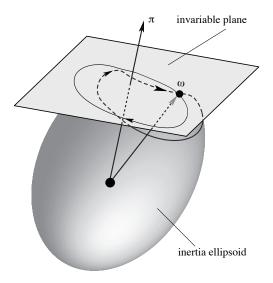


Figura 7.2: Ellissoide d'inerzia (da Marsden-Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*)

#### Teorema di Poinsot

Il teorema che enunciamo caratterizza i moti di un corpo rigido anche non simmetrico non soggetto a momenti. Detto O il punto fisso, l'ellissoide d'inerzia del corpo rigido rispetto al punto O è la superficie (ellissoide)  $\mathcal{Q}_0 \subset \mathbb{R}^3$  descritta nel riferimento principale d'inerzia  $T_m$  dall'equazione

$$Q_0 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot I_O \mathbf{x} = 1 \}.$$

Consideriamo i due piani  $\pi, \pi'$  della giacitura perpendicolare a **m** che sono tangenti all'ellissoide  $Q_0$  e siano  $P, P' \in Q_0$  i due punti di tangenza. Che vi siano solo due punti segue dal fatto che l'ellissoide è un convesso. Si ha allora il risultato seguente (vedi Figura 7.2)

Teorema 7.1.1 (Poinsot) L'ellissoide d'inerzia rotola senza strisciare sui due piani  $\pi$ ,  $\pi'$  perpendicolari a  $\mathbf{m}$  e posti a distanza fissa da O.

**Dimostrazione**. I piani  $\pi$  e  $\pi'$  sono i piani tangenti alla superficie; ne segue che nei punti P, P' la normale alla superficie, ossia il gradiente alla superficie di livello f=1 è parallelo a  $\mathbf{m}$ . Si ha

$$n(P) = \nabla_{\mathbf{x}} f(P) = 2I_O \mathbf{x} \parallel \mathbf{m}$$

quindi il punto di contatto è  $\hat{\mathbf{x}} = \lambda \omega$ . Lo scalare si fissa imponendo che  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{Q}_0$ , ovvero

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = f(\lambda \omega) = \lambda^2 \omega \cdot I_O \omega = \lambda^2 2e = 1 \quad \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

da cui  $\hat{\mathbf{x}} = \pm \omega / \sqrt{2e}$ . La distanza dei piani  $\pi, \pi'$  dal punto fisso O vale

$$d(\pi, O) = \hat{x} \cdot \frac{\mathbf{m}}{m} = \pm \frac{\omega}{\sqrt{2e}} \cdot \frac{\mathbf{m}}{m} = \pm \frac{2e}{m\sqrt{2e}} = \pm \frac{\sqrt{2e}}{m}$$

ed è costante come afferma il teorema. Infine mostriamo che nei punti di contatto la velocità è nulla (condizione di puro rotolamento). Si ha infatti

$$v_P = v_O + \omega \wedge OP = \omega \wedge \frac{\omega}{\sqrt{2e}} = 0$$

e analogamente per P'.

#### Il corpo rigido simmetrico

Nel caso in cui il corpo abbia due momenti d'inerzia uguali  $I_1 = I_2 = I$  le equazioni di Eulero risultano drasticamente semplificate in virtù dell'ulteriore integrale primo  $m_3 = cost$  che si ottiene subito dalla terza delle (7.8) quando  $I_1 = I_2 = I$ . Si noti però che non siamo di fronte ad un nuovo integrale primo, cosa dimensionalmente impossibile per quanto visto sopra, ma ad un integrale primo funzionalmente dipendente dagli altri due. Si ha infatti

$$2T = 2e = \mathbf{m} \cdot I_O^{-1} \mathbf{m} \pm \frac{m_3^2}{I} = \frac{1}{I} m^2 + m_3^2 (\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I}).$$

Derivando una delle prime due di (7.8) e sostituendo l'altra si vede che le altre due componenti del momento angolare soddisfano l'equazione lineare

$$\ddot{m}_i + \bar{m}_3^2 (\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I})^2 m_i = 0, \quad i = 1, 2$$

Ne segue quindi che le due componenti  $m_i$  seguono dei moti armonici

$$m_i(t) = A_i \cos(\gamma t + \varphi_i). \tag{7.12}$$

di frequenza

$$\gamma^2 = \bar{m}_3^2 (\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I})^2 = \bar{m}_3^2 (\frac{I - I_3}{II_2})^2.$$

La terna solidale al corpo si deve muovere quindi in modo che la proiezione di  $\mathbf{m}$  – fisso nello spazio, i.e. nella terna fissa– sull'asse di versore  $\mathbf{e}_3$  sia costante  $m_3 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_3$ , e quindi essendo

$$m_3 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_3 = m \cos(\mathbf{m}, \mathbf{e}_3)$$

l'angolo tra  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{e}_3$  è costante. Visto dal riferimento solidale al corpo, il vettore  $\mathbf{m}$  si muove descrivendo un cono di asse  $\mathbf{e}_3$  e in modo che la proiezione sul piano  $\mathbf{e}_1, e_2$  avanzi con velocità angolare costante  $\gamma$ . In realtà il vettore  $\mathbf{m}$  è fisso nello spazio e quindi è la terna  $T_m$  che ruota attorno all'asse  $\mathbf{e}_3$  con velocità angolare  $-\gamma$ . Ora vedremo che il versore  $\mathbf{e}_3$  esegue un'ulteriore rotazione di asse  $\mathbf{m}$  con velocità

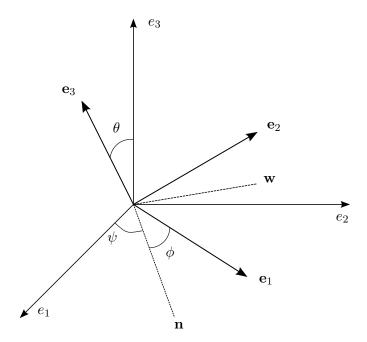


Figura 7.3: angoli di Eulero

angolare  $I^{-1}\mathbf{m}$  per cui la velocità angolare che descrive il moto della terna  $T_m$  rispetto a  $T_f$  è la somma delle due. Scriviamo l'espressione della velocità angolare sfruttando la costanza di  $\bar{m}_3$ 

$$\mathbf{m} = I_O \omega = I(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2) + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3 \pm I \omega_3 \mathbf{e}_3 = I \omega + (I_3 - I) \frac{\bar{m}_3}{I_3} \mathbf{e}_3$$

da cui

$$\omega = \frac{1}{I}\mathbf{m} + (I - I_3)\frac{\bar{m}_3}{II_3}\mathbf{e}_3 = \frac{1}{I}\mathbf{m} + \gamma^2\mathbf{e}_3.$$

Si vede subito che i vettori  $\mathbf{m}, \omega, \mathbf{e}_3$  sono complanari

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{m} \wedge \omega = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{m} \wedge I_O^{-1} \mathbf{m} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{m} = m_3' = 0.$$

Il piano che li contiene ruota attorno a  $\mathbf{m}$  e, per il teorema di composizione delle velocità angolari, il riferimento ad esso solidale ruota con velocità angolare  $\frac{1}{I}\mathbf{m}$ . Un moto di un sistema rigido che sia la somma di due rotazioni uniformi, una rispetto ad un asse fisso nel corpo e una rispetto ad un asse fisso nello spazio si dice una precessione regolare: Ne segue che

**Proposizione 7.1.1** I moti del corpo rigido simmetrico sono tutti e soli precessioni regolari.

#### Angoli di Eulero

Una carta locale della varietà delle configurazioni SO(3) del corpo rigido con un punto fisso O si ottiene attraverso i cosidetti angoli di Eulero, una maniera di scrivere una successione di tre rotazioni rigide attorno a tre assi che porta la terna fissa  $(O, e_1, e_2, e_3)$  a coincidere con la terna mobile solidale al corpo rigido  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Con riferimento alla figura, eseguiamo nell'ordine

- 1) una rotazione della terna mobile di un angolo  $\psi$  attorno all'asse  $e_3$ ,
- 2) una rotazione della terna mobile di un angolo  $\theta$  attorno all'asse  $e_1$ , che individua –in questa posizione– la cosiddetta linea dei nodi, di versore  $\mathbf{n}$  coincidente con  $\mathbf{e}_1$ . Indichiamo anche con  $\mathbf{w}$  il versore  $\mathbf{e}_2$  in questa posizione.
- 3) una rotazione della terna mobile di un angolo  $\phi$  attorno all'asse  $\mathbf{e}_3$  che rende distinti  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  da  $(\mathbf{n}, \mathbf{w})$

La composizione delle tre rotazione è anch'essa una rotazione. Per il teorema di composizione delle velocità angolari (4.22), la velocità angolare della terna mobile rispetto alla terna fissa si scrive

$$\omega = \dot{\psi}e_3 + \dot{\theta}\mathbf{n} + \dot{\phi}\mathbf{e}_3. \tag{7.13}$$

Per avere l'espressione della velocità angolare nella terna mobile dobbiamo esprimere  $\mathbf{n}$  e  $e_3$  nella terna mobile. Si vede subito che  $\mathbf{n}$  è nel piano  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  quindi  $\mathbf{n} = \cos \phi \mathbf{e}_1 - \sin \phi \mathbf{e}_2$ ; il versore  $e_3$  è nel piano  $\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{w}$  quindi  $e_3 = \cos \theta \mathbf{e}_3 + \sin \theta \mathbf{w}$ ; infine  $\mathbf{w}$  è nel piano  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  pertanto  $\mathbf{w} = \cos \phi \mathbf{e}_2 + \sin \phi \mathbf{e}_1$ . L'espressione della velocità angolare nella terna mobile è

$$\omega = (\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi)\mathbf{e}_1 + (\dot{\psi}\sin\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi)\mathbf{e}_2 + (\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\mathbf{e}_3. \quad (7.14)$$

Osservazione. Si noti che la linea dei nodi è definita solo se  $\theta \neq 0$  e  $\theta \neq \pi$ . Il dominio della carta data dagli angoli di Eulero è quindi

$$\theta \in (0, \pi), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \psi \in [0, 2\pi).$$

#### 7.1.1 Equazioni di Hamel del corpo rigido

Mostriamo che il formalismo delle equazioni di Hamel permette di ricavare l'equazione di Eulero del moto del corpo rigido con un punto fisso. So ottiene quindi che l'equazione di Eulero ammette formulazione Lagrangiana, sia pure con la generalizzazione di utilizzare le coordinate (q, v) con  $v = \omega$  nello spazio delle fasi invece che  $(q, \dot{q})$ , ove  $q = (\psi, \theta, \phi)$  sono gli angoli di Eulero. Scegliamo pertanto come base locale o anolonoma  $\mathbf{u}_{\sigma}$  proprio la base mobile  $\mathbf{e}_{i}$ . Allora, in assenza di forze esterne, la lagrangiana del corpo rigido è  $(\dot{v}_{i} = \omega \wedge OP_{i})$ 

$$L = T = \frac{1}{2} \sum_{i} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i} m_i (\omega \wedge OP_i)^2 = \frac{1}{2} I_O \omega \cdot \omega = \tilde{L}(\omega)$$

ove con  $v=\omega$  data da (7.14) abbiamo indicato le componenti della velocità espresse nella base anolonoma. I versori della base anolonoma espressi nella base coordinata sono le colonne della matrice  $\Lambda$  ove  $\omega=\Lambda\dot{q}$ 

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi & \cos \phi & 0\\ \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi & 0\\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con inversa

$$X = \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \phi \csc \theta & \cos \phi & -\sin \phi \cot \theta \\ \csc \theta \cos \phi & -\sin \phi & -\cos \phi \cot \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se si calcolano i coefficenti di struttura usando le formule

$$-c_{\rho\tau}^{\sigma} = \mathbf{d}\Lambda_{\sigma}(\mathbf{u}_{\rho}, \mathbf{u}_{\tau}) = \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \Lambda_{\sigma\alpha}}{\partial q_{\beta}} - \frac{\partial \Lambda_{\sigma\beta}}{\partial q_{\alpha}}\right) X_{\alpha\rho} X_{\beta\tau}$$

si trova

$$c_{\rho\tau}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_{\rho\tau}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_{\rho\tau}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Infine, possiamo calcolare le equazioni di Hamel per il corpo rigido usando la (6.25)

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_{\rho}}) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_{\alpha}} X_{\alpha\rho} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_{\sigma}} c_{\rho\tau}^{\sigma} v_{\tau}$$

tenendo conto che in questo caso  $\partial \tilde{L}/\partial q \equiv 0$  e  $\partial \tilde{L}/\partial v = \partial \tilde{L}/\partial \omega = I_O \omega$ . Svolgendo il conto si trova proprio l'equazione di Eulero

$$I_O\dot{\omega} + \omega \wedge I_O\omega = 0.$$

## 8 Meccanica Hamiltoniana

La formulazione Lagrangiana della meccanica permette di scrivere le equazioni del moto di un sistema a vincoli olonomi mobili nelle coordinate locali  $q \in U \subset \mathbb{R}^n$  per mezzo di una funzione, la Lagrangiana L = L(q, v, t) definita in  $U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Il nostro scopo in questo capitolo è di ridurre al primo ordine le equazioni di Lagrange, che sono del secondo ordine, per poter beneficiare degli strumenti geometrici di indagine disponibili per sistemi del primo ordine. Tutta la trattazione sarà locale, ossia dipendente dalla rappresentazione per L scelta nell'aperto U. Si può dimostrare, ma non lo faremo, che i risultati sono indipendenti dalla rappresentazione locale scelta. L

#### Equazioni di Hamilton

Supponiamo che la lagrangiana L(q, v, t) abbia matrice hessiana non degenere rispetto alle v ovvero

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial v}(q, v, t) \neq 0 \qquad \forall \ (q, v, t) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

allora le n equazioni

$$\frac{\partial L}{\partial v_i}(q, v, t) = p_i \tag{8.1}$$

hanno una soluzione unica<sup>2</sup> per (q,t) fissati che indichiamo con

$$v_i = \breve{v}_i(q, p, t) \qquad \forall \ (q, p, t) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Definiamo allora una funzione  $H:U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  che chiamiamo Hamiltoniana associata a L tramite la

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \check{v}_i(q, p, t) - L(q, \check{v}(q, p, t), t).$$
(8.2)

Le quantità definite in (8.1) sono dette i momenti coniugati associati alle velocità lagrangiane v. Esse sono le ulteriori n variabili nelle quali scriveremo il sistema ridotto al primo ordine associato alle equazioni di Lagrange, come espresso dal seguente teorema

 $<sup>^{1}</sup>$  Per esempio, abbiamo visto che le equazioni di Lagrange sono invarianti in forma per un cambio della parametrizzazione locale della varietà fatta nell'aperto U.

 $<sup>^2</sup>$ Così come introdotta qui, abbiamo invertibilità solo locale, in un aperto del dominio. Per avere l'invertibilità su convessi di  $\mathbb{R}^n$  bisogna chiedere che la matrice Hessiana di L rispetto alle velocità sia definita (per esempio definita positiva) in tutto un convesso nelle v. Per motivi di spazio omettiamo la dimostrazione; una trattazione più ampia dovrebbe considerare la H come trasformata di Legendre di L.

Teorema 8.0.1 (Equivalenza tra equazioni di Lagrange e di Hamilton) La funzione q(t) risolve le equazioni di Lagrange della Lagrangiana L se e solo se detti

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(q(t), \dot{q}(t), t) \tag{8.3}$$

i momenti coniugati, le funzioni q(t), p(t) risolvono il sistema del primo ordine delle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases}
\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\
\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.
\end{cases} (8.4)$$

**Dimostrazione**. Se vale (8.3) allora necessariamente  $\dot{q}(t) = \breve{v}(q(t), p(t), t)$ . Supponamo che q(t) risolva le equazioni di Lagrange. Allora

$$\dot{p}(t) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial v}(q(t), \dot{q}(t), t)) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t) \tag{8.5}$$

poichè stante la relazione (8.1) o la sua inversa, vale che

$$\frac{\partial H}{\partial q} = p \cdot \frac{\partial \breve{v}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial v} \cdot \frac{\partial \breve{v}}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}$$

Allo stesso modo, essendo

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \breve{v}(q,p,t) + p \cdot \frac{\partial \breve{v}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial v} \cdot \frac{\partial \breve{v}}{\partial p} = \breve{v}(q,p,t)$$

si ha

$$\dot{q}(t) = \breve{v}(q, p, t) = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Si vede quindi che il secondo gruppo delle equazioni di Hamilton altro non è che l'inversa della trasformazione (8.1), che definisce le nuove n variabili che servono per porre il sistema al primo ordine.

Supponiamo ora che q(t), p(t) sia una soluzione delle equazioni di Hamilton. Allora per (8.5) q(t) soddisfa alle equazioni di Lagrange. La relazione (8.1) permette di far corrispondere i dati iniziali nei due problemi di Cauchy e specificare completamente la soluzione.

Proposizione 8.0.1 Lungo le soluzioni delle equazioni di Hamilton (8.4) si ha

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

quindi se H è indipendente dal tempo, essa è integrale primo del moto.

Esercizio. Per una lagrangiana meccanica della forma cioè

$$L(q,v) = T - V = \frac{1}{2}A(q)v \cdot v - V(q), \qquad A(q) \in Sym^+$$

mostrare che l'Hamiltoniana corrispondente ha la forma

$$H(q,p) = \frac{1}{2}A(q)^{-1}p \cdot p + V(q) = T + V.$$

e corrisponde quindi all'energia totale del moto.

#### 8.0.1 Principio variazionale di Hamilton-Helmholtz

In analogia con quanto fatto per le equazioni di Lagrange, mostriamo che anche le equazioni di Hamilton si possono dedurre come condzioni necessarie di estremo per un principio variazionale. Il punto di partenza è una Hamiltoniana definita nelle coordinate locali x = (q, p) come H(x, t). Fissati due istanti  $t_0, t_1$  con  $t_0 < t_1$ , e due configurazioni  $x_0, x_1$  sia

$$\Gamma = \{x(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{2n}, \ x(\cdot) \in \mathcal{C}^2, x(t_i) = x_i, i = 0, 1\}$$

la famiglia (spazio affine) di curve tra le configurazioni iniziale e finale e

$$\Gamma_0 = \{h(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{2n}, \ h(\cdot) \in \mathcal{C}^2, h(\cdot) = (u(\cdot), w(\cdot)), \ u(t_i) = 0, i = 0, 1\}$$

la famiglia (spazio vettoriale) di vettori di variazione. Si noti che a differenza del principio di Hamilton, qui è sufficiente richiedere che le curve variate abbiano variazione nulla agli estremi nella sola componente q,  $u(t_i) = 0$ . Introduciamo il funzionale d'azione definito su  $\Gamma$ 

$$\mathcal{F}[x(\cdot)] = \mathcal{F}[q(\cdot), p(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} [p(\tau) \cdot \dot{q}(\tau) - H(\tau, q(\tau), p(\tau))] d\tau$$

e la sua variazione lungo il vettore  $h \in \Gamma_0$  (è un funzionale lineare su  $\Gamma_0$ )

$$\delta \mathcal{F}[x(\cdot)]h = \frac{d}{ds}\mathcal{F}[x(\cdot) + sh(\cdot)]_{s=0}.$$

detta anche derivata direzionale del funzionale. Possiamo ora enunciare il Principio di Hamilton–Helmholtz (è un teorema)

Teorema 8.0.2 (Principio di Hamilton–Helmholtz) La curva  $x(\cdot)$  risolve le equazioni di Hamilton per H se e solo se rende stazionario il funzionale d'azione  $\mathcal{F}$  ovvero

$$\delta \mathcal{F}[x(\cdot)]h = 0 \quad \forall h \in \Gamma_0.$$

**Dimostrazione**. Esplicitiamo dapprima la derivata direzionale (indici ripetuti si intendono sommati)

$$\begin{split} \delta \mathcal{F}[x(\cdot)]h &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{ds} [(p+sw)(\dot{q}+s\dot{u}) - H(q+su,p+sw,\tau)] d\tau_{\Big|_{s=0}} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}w + p\dot{u} - \frac{\partial H}{\partial q}u - \frac{\partial H}{\partial p}w] d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}w - \dot{p}u - \frac{\partial H}{\partial q}u - \frac{\partial H}{\partial p}w] d\tau + \Big[p(\tau)u(\tau)\Big]_{\tau=t_0}^{\tau=t_1} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p})w - (\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q})u] d\tau. \end{split}$$

La sufficienza è quindi ovvia: se  $x(\cdot)$  soddisfa alle equazioni di Hamilton, l'integrando è nullo per ogni vettore di variazione. Viceversa, la necessità si dimostra ragionando per assurdo come nel principio di Hamilton.

### 8.1 Trasformazioni canoniche

Le trasformazioni canoniche sono particolari cambi di coordinate (diffeomorfismi) nello spazio delle fasi y=f(x) che permettono di sostituire al sistema di equazioni di Hamilton un'altro sistema di equazioni ad esso equivalente la cui soluzione sia più facile da trovare. Si sposta quindi la difficoltà del problema dal risolvere il sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine di Hamilton alla ricerca della trasformazione canonica che faccia il servizio richiesto. Fondalmentalmente, tale nuovo problema consiste nella soluzione di una equazione alle derivate parziali, l'equazione di Hamilton–Jacobi. Cominciamo riscrivendo il sistema di equazioni di Hamilton in una forma più compatta. Posto  $x=(q,p)\in W\subset \mathbb{R}^{2n}$ , introduciamo la matrice  $E\in Mat(2n)$  dette unità simplettica data da (qui  $\mathbb{I}=\mathbb{I}_n$  è la matrice identità in  $\mathbb{R}^n$ )

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$
 vale  $E^2 = -\mathbb{I}_{2n}$ ,  $E^T = -E$ .

Se indichiamo con  $\nabla_x H=(H_q,H_p)^T$  il gradiente dell'Hamiltoniana, le equazioni di Hamilton prendono la forma compatta

$$\dot{x} = E\nabla_x H = X_H(x, t)$$

ove  $X_H(x,t)$  è detto campo vettoriale Hamiltoniano. Il primo passo consiste nel vedere come si trasforma una generica equazione del primo ordine  $\dot{x} = X(x,t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$  per un cambio di coordinate locali (diffeomorfismo) dipendente dal tempo y = w(x,t). Indichiamo con

$$J(x,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(x,t)$$

la matrice Jacobiana della w e con  $w^{-1}(y,t)$  la sua inversa a t fissato. Vale allora la seguente proposizione:

**Proposizione 8.1.1** Una curva x(t) è soluzione del sistema differenziale  $\dot{x} = X(x,t)$  se se solo se la sua immagine tramite w, y(t) = w(x(t),t) è soluzione del sistema

$$\dot{y} = Y(y,t) = J(w^{-1}(y,t),t)X(w^{-1}(y,t),t) + \frac{\partial w}{\partial t}(w^{-1}(y,t),t).$$

Dimostrazione La sufficienza si ha per verifica diretta

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}w(x(t), t) = \left[J(x(t), t)X(x(t), t) + \frac{\partial w}{\partial t}(x(t), t)\right]_{x(t) = w^{-1}(y(t), t)}; \tag{8.6}$$

la necessità come segue: sia y(t) soluzione di (10.1), ponendo  $x(t) = w^{-1}(y(t), t)$ , derivando e sostituendo (10.1) si ha

$$\dot{x} = J^{-1}\dot{y} + \frac{\partial}{\partial t}w^{-1} = J^{-1}\left[JX + \frac{\partial w}{\partial t}\right] + \frac{\partial}{\partial t}w^{-1} = X$$

poichè da  $x \equiv w^{-1}(w(x,t),t)$ , derivando rispetto a t si ha

$$0 = J^{-1} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} w^{-1}.$$

Il campo vettoriale

$$Y(w(x,t),t) = J(x,t)X(x,t) + \frac{\partial w}{\partial t}(x,t)$$
(8.7)

si dice coniugato a X tramite w. Si noti che un cambio di coordinate dipendente dal tempo trasforma un sistema autonomo  $\dot{x} = X(x)$  in un sistema non autonomo. Le trasformazioni canoniche sono particolari diffeomorfismi per i quali il sistema coniugato è ancora Hamiltoniano. Abbiamo infatti la seguente definizione:

**Definizione 8.1.1 (Trasformazioni canoniche)** Un cambio di coordinate dipendente dal tempo y = w(x,t) è una trasformazione canonica se e solo se per ogni Hamiltoniana H(x,t) il campo vettoriale Y coniugato a  $X_H(x,t)$  è Hamiltoniano per una Hamiltoniana K(y,t), i.e.  $Y = Y_K$ .

La definizione data esprime la condizione di canonicità nel senso più generale. Nel seguito, fino al paragrafo 8.1.3 ci limitiamo a considerare un sottoinsieme di trasformazioni canoniche sufficentemente ampio per illustrarne l'utilità in Meccanica, le trasformazioni canoniche indipendenti dal tempo. Per queste ultime, è facile trovare una condizione sufficiente su w perchè il campo vettoriale coniugato sia ancora Hamiltoniano. Vale infatti la seguente proposizione

**Proposizione 8.1.2** Un cambio di coordinate y = w(x) soddisfacente alla condizione

$$JEJ^{T} = cE$$
  $ove J(x) = \frac{\partial w}{\partial x}, c \neq 0.$  (8.8)

è una trasformazione canonica e l'Hamiltoniana associata ad H è  $K = cH \circ w^{-1}$ . Lo scalare c è detto valenza<sup>3</sup> della trasformazione. Le trasformazioni canoniche con c = 1 sono dette univalenti.

**Dimostrazione** Scriviamo la condizione di coniugazione (8.7) tra  $Y \in X_H$ 

$$Y = JX_H = JE\nabla_x H$$

Per ipotesi K(w(x)) = cH(x) per cui

$$c\nabla_x H = J^T \nabla_y K$$

e quindi il campo vettoriale coniugato è ancora Hamiltoniano se vale (8.8)

$$Y = JE\nabla_x H = c^{-1}JEJ^T\nabla_y K = E\nabla_y K = Y_K$$

#### Esercizio

Sia x = (q, p) e y = (Q, P). Consideriamo la trasformazione indipendente dal tempo Q = aq, P = bp. Mostrare che è canonica e calcolarne la valenza.

109

 $<sup>^3</sup>$ Si può mostrare che ogni trasformazione canonica con valenza c è una trasformazione univalente composta con un riscalamento della variabile temporale. Il restringersi a trasformazioni univalenti non rappresenta quindi una grossa limitazione di applicabilità della teoria.

# 8.1.1 Parentesi di Poisson

Siano f, g due funzioni definite nel dominio  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  di una parametrizzazione della varietà (spazio delle fasi) di un sistema hamiltoniano e ivi differenziabili con continuità tante volte quante richiesto. Si ottiene una nuova funzione definita su U detta parentesi di Poisson di f e g nella maniera seguente ove x = (q, p)

$$\{f, g\}(x) = \nabla_x f(x) \cdot E \nabla_x g(x). \tag{8.9}$$

In coordinate

$$\{f,g\} = \nabla_q f \cdot \nabla_p g - \nabla_p f \cdot \nabla_q g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Le parentesi di Poisson godono delle proprietà seguenti

- 1) antisimmetria  $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- 2) linearità  $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha \{f, h\} + \beta \{g, h\} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- 3) Leibnitz  $\{fq, h\} = f\{q, h\} + q\{f, h\}$
- 4) Jacobi  $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$

Il formalismo delle parentesi di Poisson, a prima vista un po' misterioso, risulta molto utile per esprimere compattamente molte proprietà della dinamica dei sistemi Hamiltoniani. Osserviamo dapprima che un'eventuale dipendenza dal tempo delle funzioni f,g,h non altera in alcun modo il comportamento delle parentesi se non per fornire a sua volta un oggetto dipendente dal tempo. Sottointendendo ove serve questa innocua generalizzazione, cominciamo a calcolare la variazione di una funzione f = f(t,x) lungo le soluzioni delle equazioni di Hamilton. Si ha allora

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{L}_{X_H}(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

e si possono fare le seguenti interessanti constatazioni, in parte già viste:

 $\alpha$ ) se H = H(t, x) è un'Hamiltoniana dipendente dal tempo,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

 $\beta$ ) K(x) è integrale primo del moto per il campo vettoriale  $X_H$  associato all'Hamiltoniana H(x) se e solo se K commuta con H e in tal caso H è integrale primo del moto per  $X_K$ 

$$0 = \mathcal{L}_{X_H}(K) = \{K, H\} = -\{H, K\} = -\mathcal{L}_{X_K}(H)$$

 $\gamma$ ) se f e g sono integrali del moto per H anche  $\{f,g\}$  è integrale del moto (non necessariamente indipendente dai primi due). Usando Jacobi

$$0 = \{\{f,g\},H\} + \{\{H,f\},g\} + \{\{g,H\},f\} = \{\{f,g\},H\}.$$

**Esercizio**. Sia  $\mathcal{M} = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$  lo spazio delle fasi di una particella libera riferita alle coordinate cartesiane x. Consideriamo la funzione vettoriale  $\mathbf{m} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$  che descrive il momento della quantità di moto della particella

$$\mathbf{m}(x,p) = x \wedge p.$$

Mostrare che si ha

$$\{m_1, m_2\} = m_3, \quad \{m_i, m^2\} = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

# 8.1.2 Parentesi di Poisson e trasformazioni canoniche univalenti

Scriviamo una generica trasformazione unidimensionale  $q \in \mathbb{R}$  come

$$Q = f(q, p), \qquad P = g(q, p)$$

avente matrice jacobiana  $(\partial f/\partial q = f_q)$ 

$$J(q, p, t) = \begin{pmatrix} f_q & f_p \\ g_q & g_p \end{pmatrix}$$

La condizione (8.8)  $JEJ^T = E$  si scrive

$$\begin{pmatrix} f_q & f_p \\ g_q & g_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_q & g_q \\ f_p & g_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_q f_p - f_p f_q & f_q g_p - f_p g_q \\ g_q f_p - g_p f_q & g_q g_p - g_p g_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{f, f\} & \{f, g\} \\ \{g, f\} & \{g, g\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto è soddisfatta se e solo se

$${Q, P} = {f, g} = -{P, Q} = -{g, f} = 1$$
 (8.10)

in quanto la condizione  $\{f,f\}=0$  e  $\{g,g\}=0$  è automaticamente soddisfatta. Con calcoli analoghi, ma un po' più laboriosi si può generalizzare il risultato trovato al caso  $q\in\mathbb{R}^n$  ottenendo la seguente caratterizzazione delle trasformazioni canoniche univalenti

**Proposizione 8.1.3** Il diffeomorfismo Q = f(q, p), P = g(q, p) tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  è una trasformazione canonica univalente se e solo se per ogni t valgono le condizioni sulle parentesi di Poisson

$${Q_h, P_k} = \delta_{hk}, \quad {Q_h, Q_k} = 0, \quad {P_h, P_k} = 0 \quad \forall h, k = 1, \dots, n.$$

#### Trasformazioni simplettiche nel piano

Nel caso unidimensionale, la condizione (8.10) sulle parentesi di Poisson delle coordinate coniugate P, Q ha un'interessante interpretazione geometrica. Vale infatti

$$1 = \{Q, P\} = \{f, g\} = f_q g_p - f_p g_q \equiv \det J.$$

Ne segue che le trasformazioni canoniche univalenti sono diffeomorfismi nello spazio delle fasi che conservano l'area. Anche questa proposizione si può generalizzare, con qualche cautela al caso n-dimensionale. Infatti quello che si conserva è la due-forma  $\omega = \sum_{i=1}^{n} = dp_i \wedge dq_i$  che in dimensione uno  $q \in \mathbb{R}$  coincide con la conservazione dell'area nel piano delle fasi. La conservazione della due forma implica anche la conservazione del volume nello spazio delle fasi.

# 8.1.3 Condizione di Lie per la canonicità

Il principio variazionale di Hamilton-Helmholtz permette di enunciare una condizione sufficiente<sup>4</sup> per la canonicità di una trasformazione canonica generale, ossia dipendente dal tempo y=w(x,t) con x=(q,p) e y=(Q,P) coordinate locali in un aperto di  $\mathbb{R}^{2n}$ . Scriviamo in dettaglio la trasformazione, che supporremo essere un diffeomorfismo

$$Q = f(q, p, t),$$
  $P = q(q, p, t).$ 

Se w è canonica, per definizione, data un'Hamiltoniana H(x,t), esiste un'Hamiltoniana K(y,t) tale che tutte e sole le soluzioni di  $\dot{y} = Y_K(y,t)$  sono della forma y(t) = w(x(t),t) ove x(t) è soluzione della  $\dot{x} = X_H(x,t)$  per le condizioni iniziali corrispondenti attraverso w.

Sfruttiamo il fatto che le soluzioni delle equazioni di Hamilton per H e K sono punti stazionari per il funzionale di Hamilton-Helmholtz relativo a H e K, che riscriviamo come

$$\mathcal{F}[x(\cdot)] = \mathcal{F}[q(\cdot), p(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} [p(\tau) \cdot \dot{q}(\tau) - H(\tau, q(\tau), p(\tau))] d\tau$$
$$\mathcal{G}[y(\cdot)] = \mathcal{G}[Q(\cdot), P(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} [P(\tau) \cdot \dot{Q}(\tau) - K(\tau, Q(\tau), P(\tau))] d\tau$$

definiti rispettivamente sui domini

$$\Gamma = \{x(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{2n}, \ x(\cdot) \in \mathcal{C}^2, \quad x(t_i) = x_i, i = 0, 1\}$$
$$\Delta = \{y(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{2n}, \ y(\cdot) \in \mathcal{C}^2, \quad y(t_i) = w(x_i, t_i), i = 0, 1\}$$

Ora osserviamo che tutti i punti stazionari di  $\mathcal{G}$  sono della forma  $\hat{y}(\cdot) = w(\hat{x}(\cdot), \cdot)$  ove  $\hat{x}$  rende stazionario  $\mathcal{F}$  (ossia è soluzione di  $\dot{x} = X_H(x,t)$ ) poichè  $\hat{y}$  è soluzione di  $\dot{y} = X_K(y)$  se w è canonica. Ma allora anche il funzionale  $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{G} \circ w$  definito su  $\Gamma \times [t_0, t_1]$  ha  $\hat{x}$  come punto stazionario. Essendo le precedenti doppie implicazioni, quest'ultima condizione è necessaria e sufficiente perchè w sia canonica. Una condizione sufficiente perchè  $\mathcal{F}$  e  $\tilde{\mathcal{F}}$  abbiano gli stessi punti stazionari è che<sup>5</sup>

$$\mathcal{F}[x(\cdot)] = \tilde{\mathcal{F}}[x(\cdot)] + costante \quad \forall \ x(\cdot) \in \Gamma$$
 (8.11)

costante che possiamo riscrivere, visto che  $\Gamma$  è composto da traiettorie aventi gli stessi estremi, come

$$\mathcal{F}[x(\cdot)] = \tilde{\mathcal{F}}[x(\cdot)] + \int_{t_0}^{t_1} dR(\tau, x(\tau)) d\tau = \tilde{\mathcal{F}}[x(\cdot)] + \left[ R(\tau, x(\tau)) \right]_{\tau = t_0}^{\tau = t_1} \quad \forall \ x(\cdot) \in \Gamma$$
(8.12)

e in maggior dettaglio come, avendo posto  $\breve{x} = (x, t)$ 

$$\mathcal{F}[x(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} [p(\tau) \cdot \dot{q}(\tau) - H(\tau, q(\tau), p(\tau)] d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} g(\check{x}(\tau)) \cdot \dot{f}(\check{x}(\tau)) - K(\tau, f(\check{x}(\tau)), g(\check{x}(\tau))) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} dR(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>La condizione è anche necessaria, ma la dimostrazione è complessa e la omettiamo

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Ad onor del vero, una condizione sufficiente più generale sarebbe che  $\mathcal{F}(x) = \lambda \tilde{\mathcal{F}}(x) + cost$ . per qualche  $\lambda \neq 0$ , ma tale maggiore generalità corrisponde ad effettuare un ulteriore cambio di scala sulle coordinate  $x \mapsto \beta x$  e quindi non ha un forte significato fisico. Per semplicità faremo economia di questa ulteriore generalità

Il punto fondamentale è far vedere che la relazione sopra scritta permette di determinare R e contemporaneamente di determinare l'Hamiltoniana K associata ad una data H. Per fare questo è necessario riscrivere la (8.12) come una relazione tra uno-forme differenziali definite sul dominio esteso

$$\check{\Gamma} = \Gamma \times [t_0, t_1], \qquad \check{x} = (x, t) = (q, p, t)$$

$$\omega(\check{x})d\check{x} := pdq - H(q, p, t)dt$$

e analogamente

$$\check{\Delta} = \Delta \times [t_0, t_1], \qquad \check{y} = (y, t) = (Q, P, t)$$

$$\Omega(\check{y})d\check{y} := PdQ - K(Q, P, t)dt$$

In tal modo, i funzionali  $\mathcal{F}(x)$  e  $\mathcal{G}(y)$  si possono riscrivere come integrali delle unoforme differenziali  $\omega$  e  $\Omega$  sui cammini

$$s \mapsto \breve{x}(s) = (q(s), p(s), s), \qquad s \mapsto \breve{y}(s) = (Q(s), P(s), s), \qquad s \in [t_0, t_1]$$

essendo  $\dot{x} = d\tilde{x}(s)/ds = (\dot{q}, \dot{p}, \dot{t}) = (\dot{q}, \dot{p}, 1)$ 

$$\mathcal{F}(x) = \int_{\check{x}} \langle \omega, \dot{\check{x}} \rangle ds = \int_{t_0}^{t_1} \langle p(s)dq - Hdt, (\dot{q}, \dot{p}, \dot{t}) \rangle ds = \int_{t_0}^{t_1} [p\dot{q} - H]ds$$

e analogamente per  $\mathcal{G}$ . Allora la condizione (8.12) richiede l'eguaglianza tra le unoforme corrispondenti

$$\omega(\breve{x}) = \Omega(w(\breve{x})) + dR(\breve{x})$$

e in maggior dettaglio come

$$pdq - H(q, p, t)dt = q(x, t)df(x, t) - K(t, f(x, t), q(x, t))dt + dR(t, x).$$
(8.13)

La relazione tra uno-forme differenziali trovata è detta condizione di Lie (dal matematico Sophus Lie). Si noti che poichè l'inversa di una trasformazione canonica è ancora una trasformazione canonica, è possibile rovesciare il ruolo delle hamiltoniane H e K e quindi la (8.13) può essere espressa nelle variabili y rimanenendo una condizione sufficiente per la canonicità della trasformazione. Per questo, solitamente si omette di esplicitare le variabili x o y nella quale la condizione è espressa, sottointendendo che un gruppo di variabili sia espresso in funzione delle altre e si enuncia la condizione di Lie nella forma

$$pdq - H(q, p, t)dt = PdQ - K(t, Q, P)dt + dR(t, \cdot).$$
(8.14)

Rimane da far vedere che l'esistenza di una funzione R soddisfacente alla (8.14) permette di determinare l'Hamiltonana K e anche la trasformazione canonica. Per questo la funzione R è detta funzione generatrice della trasformazione canonica. Questo sarà l'oggetto del prossimo paragrafo nel quale, come è d'uso indicheremo la funzione generatrice R con la lettera F.

# 8.1.4 Funzioni generatrici

La condizione di Lie nella forma astratta (8.14) non assegna un ruolo particolare ad alcuna delle variabili x o y. E' quindi possibile, e si rivelerà comodo nel seguito per le applicazioni a problemi specifici, pensare alla trasformazione canonica come un diffeomorfismo dipendente dal tempo che permette di esprimere 2n delle variabili q, p, Q, P in funzione delle 2n rimanenenti. Abbiamo quindi oltre alla y = w(x) anche le altre possibili trasformazioni indicate in tabella 8.1. L'ultima colonna indica la forma più utile per la funzione generatrice.

$$p = p(q, Q, t) P = P(q, Q, t) F_1(q, Q, t)$$

$$p = p(q, P, t) Q = Q(q, P, t) F_2(q, P, t) - Q(q, P, t) \cdot P$$

$$q = q(p, Q, t) P = P(p, Q, t) F_3(p, Q, t) + Q \cdot P(p, Q, t)$$

$$q = q(p, P, t) Q = Q(p, P, t) F_4(p, P, t) + q \cdot p - Q \cdot P$$

Tabella 8.1: Trasformazioni e funzioni generatrici corrispondenti

Supponiamo per esempio che la trasformazione canonica abbia (q, Q) come variabili indipendenti, detta anche trasformazione di tipo  $F_1$ . Se inseriamo le espressioni corrispondenti nella (8.14) e eguagliamo i coefficienti dei differenziali delle variabili indipendenti (q, Q, t) otteniamo

$$pdq - Hdt = PdQ - Kdt + \frac{\partial F_1}{\partial q}dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q}dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt$$

e quindi

$$\begin{cases}
p = \frac{\partial F_1}{\partial q}(q, Q, t), \\
P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}(q, Q, t). \\
K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}(q, Q, t)
\end{cases} (8.15)$$

Per ottenere la trasformazione canonica tra le variabili iniziali y = w(x) è sufficiente poter invertire la prima delle (8.15) rispetto alle Q ottenendo una Q = Q(q, p, t). A tale scopo dobbiamo richiedere la condizione di invertibilità almeno locale

$$\det \frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q}(q, Q, t) \neq 0 \quad \forall \ (q, Q, t).$$

Sotto tale ipotesi, l'ultima delle (8.15) permette di determinare, come sopra annunciato, l'Hamiltoniana K corrispondente alla H sotto la trasformazione canonica w generata dalla  $F_1$ 

$$K(Q, P, t) = H(w^{-1}(Q, P), t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(q(Q, P, t), Q, t)$$

ove la q = q(Q, P, t) si può sempre ottenere dalla prima delle (8.15) stante la condizione di invertibilità locale.

Lo stesso procedimento, applicato alle trasformazioni canoniche di tipo  $F_2$  permette di ottenere le equazioni alle derivate parziali che individuano la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice  $F_2$  data. Esse sono

$$\begin{cases}
p = \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P, t), \\
Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}(q, P, t). \\
K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}(q, P, t)
\end{cases} (8.16)$$

e la condizione di invertibilità associata, che coinvolge tutte le variabili indipendenti è

$$\det \frac{\partial^2 F_2}{\partial q \partial P}(q, P, t) \neq 0 \quad \forall \ (q, P, t).$$

I casi discussi sono quelli di uso più frequente. I rimanenti si ricavano con analogo procedimento; si invita lo studente a consultare i manuali di Meccanica Hamiltoniana.

Come avevamo affermato all'inizio del capitolo, la teoria delle trasformazioni canoniche sostituisce il problema della soluzione delle equazioni di Hamilton del moto con quello della ricerca di una trasformazione canonica che muti il sistema hamiltoniano di partenza in uno di di più facile soluzione. In base agli sviluppi visti, questo richiede di determinare un'opportuna funzione generatrice. L'efficacia massima di questo modo di procedere si ottiene quando l'hamiltoniana trasformata è nella forma

$$K = \varphi(P)$$

che conduce alle equazioni di Hamilton

$$\dot{Q} = \frac{\partial \varphi}{\partial P}(P), \quad \dot{P} = -\frac{\partial \varphi}{\partial Q}(P) = 0$$

aventi soluzione triviale,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$Q_i(t, Q_0, P_0) = \omega_i t + (Q_0)_i, \qquad P_i(t, Q_0, P_0) = (P_0)_i, \quad \omega_i = \frac{\partial \varphi}{\partial P_i}(P_0).$$
 (8.17)

Come caso particolare, se  $\varphi(P) \equiv 0$ , si ha  $\omega_i = 0$  e il moto nelle variabili trasformate è di quiete.

# 8.2 L'equazione di Hamilton-Jacobi

Cerchiamo una trasformazione canonica con funzione generatrice tipo  $F_2$  che muti l'Hamiltoniana H(q, p, t) nella Hamiltoniana  $K \equiv 0$ . Sulla base delle (8.16), la funzione generatrice S(q, P, t) deve essere soluzione dell'equazione alle derivate parziali seguente, detta equazione di Hamilton–Jacobi

$$H(q, \frac{\partial}{\partial q}S(q, P, t), t) + \frac{\partial}{\partial t}S(q, P, t) = 0$$
(8.18)

e verificare l'ulteriore condizione di invertibilità locale

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P}(q, P, t) \neq 0 \quad \forall \ (q, P, t).$$

In tal caso, la trasformazione canonica si costruisce dalle relazioni

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P}(q, P, t), \qquad p = \frac{\partial S}{\partial g}(q, P, t)$$

invertendo l'ultimo gruppo di n equazioni. Risulta più utile invertire il primo gruppo di equazioni per ottenere direttamente il moto q(t), p(t) nelle variabili originarie a partire dal moto triviale nelle variabili trasformate  $P(t) = P_0, Q(t) = Q_0$ 

$$q = \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)^{-1}(Q_0, P_0, t) \qquad p = \frac{\partial S}{\partial q}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)^{-1}(Q_0, P_0, t), P_0, t\right)$$

Si vede che le coordinate P hanno il ruolo di parametri. Una funzione  $S(q, \beta, t)$  dipendente da n parametri  $\beta$  e soddisfacente all'equazione di Hamilton-Jacobi e alla condizione di invertibilità locale è detta integrale completo dell'equazione di H-J. Nel seguito esponiamo vari casi particolari di concreta applicazione, nei quali il calcolo di un integrale completo è possibile e la soluzione viene indicata esplicitamente, ovviamente a meno di operazioni come il calcolo di primitive di integrali e inversione di funzioni. Si dice in tal caso che il problema del moto è risolto a meno di quadrature.

# 8.2.1 Il caso di Hamiltoniana indipendente dal tempo

Nel caso  $\partial H/\partial t = 0$  si può prendere una funzione generatrice nella forma separata (t ha il ruolo di variabile ciclica come vedremo più avanti)

$$S(q, P, t) = W(q, P) - \varphi(P)t$$

ove, come già detto, le  ${\cal P}$ hanno il ruolo di parametri. L'equazione di HJ corrispondente diventa

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q, P)) = \varphi(P).$$
 (8.19)

e si verifica subito che la W(q, P) soluzione di (8.19) è la funzione generatrice di una trasformazione canonica indipendente dal tempo di tipo  $F_2$  che muta l'Hamiltoniana H in  $K = \varphi(P)$  e il moto associato è dato dalle (8.17). Di solito negli esercizi si procede nel modo seguente, chiamando  $P_n = E$  e chiedendo che  $\varphi$  abbia la forma particolare

$$\varphi(P_1,\ldots,P_n)=P_n=E.$$

Allora, dalle (8.17) il moto delle Q, essendo  $\omega_i=0$  per  $i=1,\ldots n-1$  e  $\omega_n=1$  è

$$Q_i(t, Q_0, P_0) = (Q_0)_i, \qquad Q_n(t, Q_0, P_0) = t + (Q_0)_n.$$

Il moto nelle variabili originarie si ricava dalle trasformazioni canoniche

$$p_{i} = \frac{\partial W}{\partial q_{i}}(q, P_{1}, \dots P_{n-1}, E), \qquad i = 1, \dots n$$

$$(Q_{0})_{i} = \frac{\partial W}{\partial P_{i}}(q, P_{1}, \dots P_{n-1}, E)$$

$$t + (Q_{0})_{n} = \frac{\partial W}{\partial E}(q, P_{1}, \dots P_{n-1}, E)$$

Alle stesse conclusioni si arriva scrivendo la trasformazione canonica generata dalla S a partire dal moto corrispondente all'Hamiltoniana  $K \equiv 0$  e cioè  $Q = Q_0$ ,  $P = P_0$ .

#### Sistemi unidimensionali conservativi

Nel caso di un sistema lagrangiano unidimensionale soggetto a sole forze conservative il procedimento esposto può essere applicato fino a determinare il moto a meno di quadrature. Consideriamo un sistema lagrangiano descritto da

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}a(x)\dot{x}^2 - V(x)$$

con hamiltoniana associata indipendente dal tempo

$$H(x,p) = \frac{1}{2}a^{-1}(x)p^2 + V(x) = \frac{1}{2a(x)}p^2 + V(x).$$

L'equazione di HJ associata per la funzione generatrice W(x, E) è -vedi (8.19)-

$$\frac{1}{2a(x)}(\frac{\partial W}{\partial x})^2 + V(x) = E$$

che può essere messa in forma normale ottenendo il momento coniugato

$$p = \frac{\partial W}{\partial x} = \pm \sqrt{2a(x)[E - V(x)]}.$$

La scelta del segno si fa in base alle condizioni iniziali p(0) ed è valida fino a quando il momento cambia segno, incontrando l'asse delle x. La relazione trovata permette di ricavare l'integrale completo

$$W(x, E) = \operatorname{sgn} p(0) \int \sqrt{2a(x)[E - V(x)]} dx.$$

Calcoliamo la trasformazione canonica associata (a(x) > 0 sempre)

$$p = \frac{\partial W}{\partial x} = \operatorname{sgn} p(0) \sqrt{2a(x)[E - V(x)]}$$

$$Q_0 + t = \frac{\partial W}{\partial E} = \operatorname{sgn} p(0) \int \frac{a(x)dx}{\sqrt{2a(x)[E - V(x)]}}$$

Dalla seconda, a meno del calcolo della primitiva e dell'inversione di funzione, si ottiene il moto  $x = x(t, Q_0)$ 

#### L'oscillatore armonico

Come caso concreto consideriamo l'oscillatore armonico unidimensionale di Lagrangiana

$$L(x, \dot{x}) = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}hx^2.$$

Il moto nella coordinata x si ricava dalla trasformazione canonica associata calcolando la primitiva dell'integrale e invertendo la funzione. Si ha allora, supponendo p(0) > 0

$$Q_0 + t = \int \frac{md\xi}{\sqrt{2m(E - \frac{1}{2}h\xi^2)}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{h}{2E}\xi^2}}$$

la cui primitiva è nota

$$Q_0 + t = \sqrt{\frac{m}{2E}} \left[\arcsin\left(x\sqrt{\frac{h}{2E}}\right) + cost.\right]$$

ed è invertibile. Si vede che la costante di integrazione cost. può essere inglobata nella scelta di  $Q_0$  e quindi la poniamo uguale a zero. Pertanto

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{h}} \sin\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}t + \sqrt{\frac{2E}{m}}Q_0\right)$$

 $\mathbf{e}$ 

$$p(t) = \sqrt{2m(E_V(x))} = \sqrt{2mE}\cos\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}t + \sqrt{\frac{2E}{m}}Q_0\right).$$

L'Hamiltoniana è una costante del moto per sistemi indipendenti dal tempo e quindi

$$H = T + V = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{hx_0^2}{2} = E$$

da cui

$$\frac{2E}{h} = x_0^2 + \frac{p_0^2}{mh}, \qquad \frac{2E}{m} = \frac{p_0^2}{m} + \frac{h}{m}x_0^2.$$

# 8.2.2 Sistemi con variabli cicliche

Supponiamo di avere un'Hamiltoniana indipendente dal tempo e da una delle coordinate, per esempio  $q_1$ . Allora il momento coniugato è costante

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0, \qquad p_1(t) = p_1(0) = P_1.$$

Cerco S della forma (come prima  $P_n = E$ )

$$S(q, P_1, \dots, P_{n-1}, E, t) = W_1(q_1, P_1, \dots, P_{n-1}, E) + W_2(q_2, \dots, q_n, P_1, \dots, P_{n-1}, E) - Et.$$

Dovendo essere

$$p_1 = \frac{\partial W_1}{\partial q_1}(q_1, P_1, \dots, P_{n-1}, E) = p_1(0) = P_1$$

si ha necessariamente

$$W_1(q_1, P_1) = P_1 q_1.$$

L'equazione di HJ associata si scrive allora, tenendo conto che  $\partial H/\partial q_1=0$ 

$$H(q_2, \dots q_n, P_1, \frac{\partial W_2}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial W_2}{\partial q_n}) = E.$$

Se vi sono più coordinate cicliche si aggiungono altrettanti termini del tipo  $P_lq_l$ . Nel caso in cui le coordinate sono tutte cicliche tranne una, la  $q_n$  per esempio, e si ha  $\partial H/\partial p_n \neq 0$ , il problema è completamente risolubile a meno di quadrature. Si usa infatti la funzione generatrice

$$S(q, P_1, \dots, P_{n-1}, E, t) = \sum_{l=1}^{n-1} P_l q_l + W(q_n, P_1, \dots, P_{n-1}, E) - Et$$

la cui equazione di HJ è

$$H(q_n, P_1, \dots, P_{n-1}, E, \frac{\partial W}{\partial q_n}) = E$$
(8.20)

che può essere messa in forma normale per l'ipotesi  $\partial H/\partial p_n \neq 0$ . La soluzione si scrive allo stesso modo del caso dei sistemi conservativi unidimensionali. Verifichiamo che la S è un integrale completo, ovvero è soddisfatta la condizione

$$rk\frac{\partial^2}{\partial P\partial q} = max = n.$$

Esplicitando  $\partial W/\partial q_n$  in (8.20) si ha

$$\frac{\partial W}{\partial q_n} = \varphi(q_n, P_1, \dots, P_{n-1}, E)$$

e quindi

$$W(q_n, P_1, \dots, P_{n-1}, E) = \int_{q_n(0)}^{q_n} \varphi(\xi, P_1, \dots, P_{n-1}, E) d\xi$$

Si ha allora

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = P_k, \quad k = 1, \dots, n - 1, \qquad \frac{\partial S}{\partial q_n} = \frac{\partial W}{\partial q_n}$$

е

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial P_h} = \frac{\partial P_k}{\partial P_h} = \delta_{hk}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_n \partial P_h} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial P_h} = \frac{\partial \varphi}{\partial P_h}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_n \partial E} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial E} = \frac{\partial \varphi}{\partial E}.$$

Osserviamo però che da  $H(q_n, P_1, \dots, P_{n-1}, \varphi(q_n, P_1, \dots, P_{n-1}, E)) = E$  si ha

$$\frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial \varphi}{\partial E} = \frac{\partial E}{\partial E} = 1$$

da cui  $\partial \varphi / \partial E \neq 0$  poichè  $\partial H / \partial p_n \neq 0$ . Allora la matrice hessiana di S si scrive

$$\frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-1} & \frac{\partial \varphi}{\partial P} \\ (\frac{\partial \varphi}{\partial P})^T & \frac{\partial \varphi}{\partial E} \end{pmatrix}$$

e si vede quindi che l'ipotesi sul rango è soddisfatta. La trasformazione canonica associata è

$$\begin{cases}
p_l = \frac{\partial S}{\partial q_l} = P_l, \quad l = 1, \dots n - 1, \\
p_n = \frac{\partial S}{\partial q_n} = \frac{\partial W}{\partial q_n} (q_n, P, E). \\
Q_l = \frac{\partial S}{\partial P_l} = q_l + \frac{\partial W}{\partial P_l} \\
Q_n = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E} - t
\end{cases} (8.21)$$

# 8.2.3 Il caso di Hamiltoniana separabile

Supponiamo che l'Hamiltoniana indipendente dal tempo sia della forma

$$H(q,p) = f(H_1(q_1, p_1), \dots, H_n(q_n, p_n)), \qquad \frac{\partial H_i}{\partial p_i} \neq 0 \quad \forall i$$

Allora ogni funzione  $H_i$  è un integrale primo del moto come si verifica direttamente (indici ripetuti non si intendono sommati)

$$\frac{dH_i}{dt} = \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \dot{p}_k = \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial H_i}{\partial p_k} (-\frac{\partial H}{\partial q_k}) = \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial H_i}{\partial p_k} - \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial H_i}{\partial p_k} = 0.$$

Scelgo una funzione generatrice del tipo

$$S(q, P, t) = \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i, P_i) - f(P)t.$$

Ne segue che l'equazione di HJ associata si separa nelle n equazioni di HJ unidimensionali

$$H_i(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, P_i)) = P_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per l'ipotesi  $\partial H_i/\partial p_i \neq 0$  le n equazioni si possono mettere in forma normale come già visto

$$W_i(q_i, P_i) = \int_{q_i(0)}^{q_i} \varphi(\xi_i, P_i) d\xi_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

e si vede che ma matrice hessiana della S è diagonale

$$\frac{\partial^2 S}{\partial P_h \partial q_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial P_k} \delta_{kh}.$$

Infine, esattamente come nel caso precedente, essendo per ognii

$$H_i(q_i, \varphi_i(q_i, P_i)) = P_i$$

si ha

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial P_i} = \frac{\partial P_i}{\partial P_i} = 1$$

da cui  $\partial \varphi_i/\partial P_i \neq 0$  per ogni i e quindi il rango della matrice hessiana è massimo. In virtù degli n integrali primi, il moto di ogni coordinata è dipendente dalle altre solo attraverso i valori degli integrali  $P_1, \ldots, P_n$ . La trasformazione canonica si scrive

$$\begin{cases}
p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, P_i), \\
(Q_0)_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial W_i}{\partial P_i}(q_i, P_i) - \frac{\partial f}{\partial P_i}(P)t.
\end{cases} (8.22)$$

# 9 Esempi classici

# Il problema dei due corpi Hamiltoniano

Come applicazione del metodo di HJ studiamo il moto di un punto materiale di massa  $\mu$  (la massa ridotta del problema a due corpi) in coordinate polari sferiche  $(r, \theta, \phi)$  con r > 0,  $\theta \in (0, \pi)$  e  $\phi \in [0, 2\pi)$  soggetto al potenziale gravitazionale

$$V(r) = -\frac{G}{r}, \qquad G > 0.$$

La scelta delle coordinate polari già mette in luce la simmetria del potenziale. La lagrangiana del sistema è del tipo L=T-V con

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}A\dot{q} \cdot \dot{q} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

con Hamiltoniana associata del tipo  $H = T + V = \frac{1}{2}A^{-1}p \cdot p + V$ e quindi

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2\mu} (p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta}) - \frac{G}{r}.$$

Si tratta quindi di un'hamiltoniana indipendente dal tempo ma con n-2 coordinate cicliche che non ricade nei casi trattati in precedenza. Visto il carattere indipendente dal tempo, poniamo  $P_r = E$  e cerchiamo una funzione generatrice di tipo  $F_2$  nelle variabili q, P, E del tipo 'separabile'  $W(r, \theta) = W^r(r) + W^{\theta}(\theta)$ 

$$S(t, r, \theta, \phi, P_{\theta}, P_{\phi}, E) = -Et + P_{\phi}\phi + W^{r}(r, P_{\theta}, P_{\phi}, E) + W^{\theta}(\theta, P_{\theta}, P_{\phi}, E)$$

la cui equazione di HJ associata è

$$\frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial W^r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \left( \frac{\partial W^{\theta}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{P_{\phi}^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] - \frac{G}{r} = E.$$

Possiamo riscrivere l'equazione di HJ nella forma seguente

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial W^{\theta}}{\partial \theta}\right)^{2} + \frac{P_{\phi}^{2}}{\sin^{2}\theta} &= P_{\theta} \\ \left(\frac{\partial W^{r}}{\partial r}\right)^{2} + \frac{P_{\theta}}{r^{2}} &= 2\mu(E + \frac{G}{r}). \end{cases}$$

nella quale ognuna delle equazioni può essere messa in forma normale

$$\frac{\partial W^{\theta}}{\partial \theta} = \sigma(\theta) \sqrt{P_{\theta} - \frac{P_{\phi}}{\sin^2 \theta}}, \qquad \frac{\partial W^r}{\partial r} = \sigma(r) \sqrt{2\mu(E + \frac{G}{r}) - \frac{P_{\theta}}{r^2}}$$

ove  $\sigma(\theta) = sign(p_{\theta}(0)), \ \sigma(r) = sign(p_{r}(0)).$  La trasformazione canonica associata è

$$\begin{cases} p_{\theta} = \frac{\partial W^{\theta}}{\partial \theta} = \sigma(\theta) \sqrt{P_{\theta} - \frac{P_{\phi}}{\sin^{2}\theta}} \\ p_{r} = \frac{\partial W^{r}}{\partial r} = \sigma(r) \sqrt{2\mu(E + \frac{G}{r}) - \frac{P_{\theta}}{r^{2}}} \\ p_{\phi} = P_{\phi} \\ R = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W^{r}}{\partial E} = -t + \sigma(r) \int \frac{\mu d\xi}{\sqrt{2\mu(E + \frac{G}{r}) - \frac{P_{\theta}}{r^{2}}}} \\ \Theta = \frac{\partial W^{\theta}}{\partial P_{\theta}} + \frac{\partial W^{r}}{\partial P_{\theta}} = \sigma(\theta) \int \frac{d\theta}{2\sqrt{P_{\theta} - \frac{P_{\phi}^{2}}{\sin^{2}\theta}}} + \sigma(r) \int \frac{-\frac{1}{r^{2}}dr}{2\sqrt{2\mu(E + \frac{G}{r}) - \frac{P_{\theta}}{r^{2}}}} \\ \Phi = \phi + \frac{\partial W^{\theta}}{\partial P_{\phi}} = \phi + \sigma(\phi) \int \frac{-P_{\phi}}{\sqrt{P_{\theta} - \frac{P_{\phi}^{2}}{\sin^{2}\theta}}} \cdot \frac{d\theta}{\sin^{2}\theta}. \end{cases}$$

La  $(9.1)_4$  permette di ricavare r(t) effettuando le quadrature. Successivamente da  $(9.1)_5$  si ricava  $\theta = \theta(r)$  e infine da  $(9.1)_6$  si ricava  $\phi = \phi(\theta)$  che composte con r(t) determinano la legge oraria.

Ritroviamo ora le leggi di Keplero del moto. Possiamo sempre scegliere il riferimento inerziale in modo che a t=0 la velocità del punto P sia nel piano  $\phi=0$ , ovvero  $\dot{\phi}(0)=0$ . Essendo da  $(9.1)_3$   $P_\phi=p_\phi=cost$  e scrivendo il momento coniugato alla variabile  $\phi$  si ha che

$$P_{\phi} = p_{\phi}(0) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2(0) \sin^2 \theta(0) \dot{\phi}(0) \quad \Rightarrow \quad P_{\phi} = 0.$$

pertanto si ha

$$\mu r^2(t)\sin^2\theta(t)\dot{\phi}(t) \equiv 0$$

e quindi  $\phi(t)=0$  fino a che r(t)>0 e sin $\theta(t)\neq 0$ . Ne viene che il moto è piano. Inseriamo l'informazione  $P_{\phi}=0$  nelle (9.1). Scrivendo il differenziale di (9.1)<sub>4</sub> e (9.1)<sub>5</sub> per  $P_{\phi}=0$  si ha

$$\begin{cases}
0 = -dt + \sigma(r) \frac{\mu dr}{\sqrt{2\mu(E + \frac{G}{r}) - \frac{P_{\theta}}{r^{2}}}}, \\
0 = \sigma(\theta) \frac{d\theta}{2\sqrt{P_{\theta}}} + \sigma(r) \frac{-\frac{1}{r^{2}} dr}{2\sqrt{2\mu(E + \frac{G}{r}) - \frac{P_{\theta}}{r^{2}}}}.
\end{cases} (9.2)$$

da cui

$$\frac{d\theta}{2\sqrt{P_{\theta}}} = \frac{dt}{r^2\mu}$$

e quindi la velocità areolare è costante

$$\frac{dA}{dt} = \sigma(\theta) \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{P_{\theta}}}{2m}.$$

Cme visto al Capitolo 2 risulta più facile cercare di determinare la forma della traiettoria  $r = r(\theta)$  invece che la legge oraria del moto. Riprendiamo la  $(9.1)_5$ ; per  $P_{\phi} = 0$  il primo integrale è immediato e si ha

$$2\sqrt{P_{\theta}}\Theta = \theta - \int \frac{\sqrt{P_{\theta}}dr}{r^2\sqrt{2\mu(E + \frac{G}{r}) - \frac{P_{\theta}}{r^2}}}.$$

Usando il cambio di variabile  $x=r^{-1},\,dx=-r^{-2}dr$  si arriva ad un integrale noto

$$2\sqrt{P_{\theta}}\Theta - \theta = \int \frac{\sqrt{P_{\theta}}dx}{\sqrt{2\mu E + 2\mu Gx - P_{\theta}x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{c + 2kx - x^2}} = -\arccos(\frac{x - k}{\sqrt{k^2 + c}})$$

ove abbiamo posto

$$c = \frac{2\mu E}{P_{\theta}}, \quad k = \frac{\mu G}{P_{\theta}}, \quad \beta = 2\sqrt{P_{\theta}}\Theta.$$

Invertendo e usando il cambio di variabile  $s=r^{-1}$  si arriva a

$$x = k + \sqrt{k^2 + c}\cos(\theta - \beta),$$

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \beta)}$$

ove

$$p = \frac{1}{k} = \frac{P_{\theta}}{\mu G}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{c}{k^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E}{\mu} \frac{P_{\theta}^2}{G^2}}.$$

L'orbita è quindi una conica di parametro p e eccentricità e in cui il centro di attrazione occupa uno dei fuochi. A seconda del valore dell'energia E si hanno i casi descritti nella tabella 9 ( $E_0 = -\mu G^2/2P_\theta$ ).

Energia	Eccentricità	Conica
E > 0	e > 1	iperbole
E = 0	e = 1	parabola
$E_0 < E < 0$	e < 1	ellisse
$E = E_0$	e = 0	circonferenza

Tabella 9.1: Orbite del problema a due corpi in funzione dell'energia

Nel caso dell'orbita ellittica E > 0 e  $p = b^2/a$  ove a e b sono i semiassi maggiore e minore dell'ellisse. Dalla costanza della velocità areolare si ha che il punto spazza l'area dell'ellisse  $A = \pi ab$  nel periodo di rivoluzione T. Quindi

$$A = \pi ab = \frac{dA}{dt}T = \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt}T = \frac{\sqrt{P_{\theta}}}{2\mu}T$$

e sostituendo  $b^2 = ap = aP_{\theta}/\mu G$  si trova la terza legge di Keplero

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\mu\pi^2}$$

#### La brachistocrona

Questo celebre problema fu posto da Johann Bernoulli nel 1697alla comunità scientifica dell'epoca : si trattava di trovare la traiettoria, espressa da una funzione differenziable di una variabile reale y=f(x), che permette ad un punto materiale, partendo dalla quiete e soggetto alla sola gravità, di andare da un punto A ad un punto B contenuti in un piano verticale nel tempo più breve. Il problema fu risolto indipendentemente da Leibnitz e Newton (lettera non firmata). Recentemente si scoperto che la prima risposta ad arrivare fu quella di Robert Hook. Esponiamo questo classico risultato come esempio di applicazione del Principio di Hamilton per una Lagrangiana non meccanica (ovvero non nella forma L=T-U).

Consideriamo un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio a muoversi nel piano  $verticale\ Oxy$  soggetto a gravità. L'ipotesi è che la traiettoria cercata sia esprimibile da una funzione (differenziabile) quindi sono esclusi auto-intersezioni della curva. Supponiamo per semplicità che il punto A coincida con l'origine O. Usando come coordinata l'ascissa x del punto, la posizione -traiettoria di P è

$$OP(x) = x\mathbf{e}_x + f(x)\mathbf{e}_y, \qquad x \in [0, x_B]$$

e la sua velocità lungo il moto descritto da x = x(t) è

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e}_x + f'(x(t))\dot{x}(t)\mathbf{e}_y = \dot{x}(t)(\mathbf{e}_x + f'\mathbf{e}_y) = \dot{s}(t)\mathbf{t}$$

ove s=s(t) è il parametro d'arco lungo la traiettoria. L'ultima relazione permette di esprimere il tempo necessario (nell'ipotesi che non vi siano istanti di arresto) a percorrere un arco infinitesimo ds come

$$dt = \frac{ds(t)}{v(t)} = \sqrt{\frac{ds^2}{v^2}}.$$

Ora, si ha che

$$ds^{2} = dx^{2} + dy^{2} = dx^{2} + f'(x)^{2}dx^{2} = (1 + f'^{2})dx^{2}$$

e, usando la conservazione dell'energia

$$0 = e = T + U = \frac{m}{2}v^{2}(t) + mgf(x(t))$$

quindi

$$dt = \sqrt{\frac{1 + f'^{2}(x(t))}{v(f(x(t)))}} dx = \sqrt{\frac{1 + f'^{2}(x(t))}{-2gf(x(t))}} dx$$

e infine

$$T = \int_0^{x_B(t)} \sqrt{\frac{1 + f'^2(x(t))}{-2gf(x(t))}} dx(t) = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + f'^2(x)}{-2gf(x)}} dx = \int_0^{x_B} L(f, f') dx.$$

Il tempo necessario per andare da O a B dipende quindi solo dalla forma f della traiettoria! La traiettoria che rende estremale (non sappiamo se sia un minimo<sup>1</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>E' facile immaginare traiettorie per le quali il tempo sia arbitrariamente lungo, per cui il funzionale non ha massimo assoluto

locale) il funzionale T=T[f] risolve l' equazione di Lagrange associata, piuttosto complicata. Possiamo risparmiare una integrazione usando l'integrale primo di Jacobi (6.12) associato. Poichè la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo si ha infatti

$$f'\frac{\partial L}{\partial f'}(f, f') - L(f, f') = \text{costante} = C.$$

ovvero, dopo facili calcoli,

$$(1+f'^2)f = -\frac{1}{2qC} = c$$

in cui si riconosce l'equazione differenziale nota corrispondente alla curva detta cicloide

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = \frac{c}{f(x)} - 1\tag{9.3}$$

che si risolve per separazione di variabili

$$dx = \sqrt{\frac{f}{c-f}} df, \qquad x = \int \sqrt{\frac{f}{c-f}} df + a, \quad a \in \mathbf{R}.$$

L'ultimo integrale, con il cambio di variabile  $f = c \sin^2 \theta$ , diventa

$$\int \sqrt{\frac{f}{c-f}} df = \frac{c}{2}(2\theta - \sin 2\theta)$$

e porge la traiettoria in forma parametrica della cicloide

$$\begin{cases} x(\theta) &= \frac{c}{2}(2\theta - \sin 2\theta) + a, \\ f(\theta) &= c\sin^2 \theta = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\theta). \end{cases}$$

Le costanti a e c si fissano in modo che la curva passi per i punti A e B.

# 10 Esercizi

# 10.1 Esercizi su sistemi 1-dimensionali, stabilità e metodo spettrale

#### 10.1.1 Esercizio

Tracciare il ritratto in fase di

$$\dot{x} = (x^2 - 1)x^2 + \mu, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Tracciare il diagramma di biforcazione degli equilibri, specificando la stabilità. **Soluzione**. Si veda la figura 10.1.1.1

### 10.1.2 Esercizio

Si consideri il sistema lineare  $\dot{x} = Ax$  dipendente dal parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  ove

$$A = \left(\begin{array}{cc} -3 & 2\\ \alpha & 1 \end{array}\right)$$

Discutere la stabilità dell'equilibrio e tracciare il ritratto in fase al variare di  $\alpha$ . Soluzione Si ha  $tr\ A=-2$ , det  $A=-3-2\alpha$ ,  $\Delta=(trA)^2-4\det A=8(2+\alpha)$  da cui

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(trA \pm \sqrt{\Delta}) = -1 \pm \sqrt{2}\sqrt{2 + \alpha}.$$

Essendo Re(Spect(A) < 0, l'unico equilibrio x = 0 è asintoticamente stabile. Vediamo la natura dell'equilibrio

a se  $\Delta > 0$  i.e.  $\alpha > -2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  sono reali, si ha un nodo o una sella

b se  $\Delta = 0$  i.e.  $\alpha = -2$   $\lambda_1, \lambda_2 = -1$  si ha un nodo a stella

c se  $\Delta < 0$  i.e.  $\alpha < -2$   $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}\sqrt{\alpha - 2}$  si ha un fuoco stabile

Vediamo la distinzione tra nodo o sella. Nel caso  $\Delta>0$ , i.e.  $\alpha>-2$ , abbiamo un autovalore negativo e uno positivo se  $-1+\sqrt{2}\sqrt{2+\alpha}>0$ , cioè se  $\alpha>-3/2$ . Quindi se  $\alpha>-3/2$  abbiamo una sella, e se  $-3<\alpha<3/2$  abbiamo un nodo stabile. Se  $\alpha=-3/2$  abbiamo il caso degenere con un autovalore nullo :  $\lambda_1=-2, \lambda_2=0$ . Il luogo degli equilibri è la retta ker A, insieme delle soluzioni di Ax=0. Si vede che il sistema Ax=0 ha soluzione ker  $A=\lambda u_2$  ove  $u_2=(2,3)^T$  è autovettore associato all'autovalore  $\lambda_2=0$ . Il ritratto in fase è dato dalle curve  $x(t)=e^{\lambda_1 t}u_1$  ove  $u_1$  è soluzione dell'equazione  $Ax=\lambda_1 x$ . Si trova che l'autovettore associato è  $u_1=(2,1)^T$ . I ritratti in fase per alcuni valori significativi di  $\alpha$  sono riassunti nelle figure 10.1.2.2

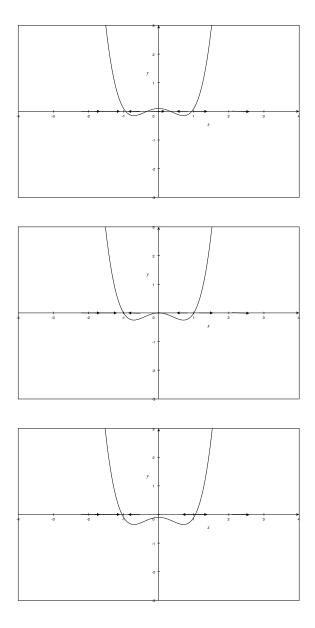


Figura 10.1: Dall'alto in basso:  $\mu>0,\,\mu=0,\,\mu<0$ 

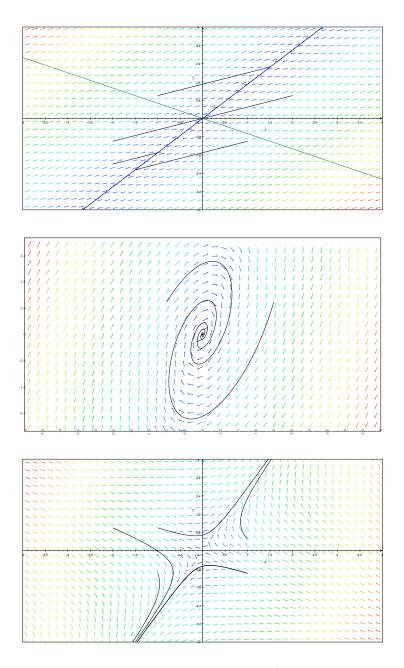


Figura 10.2: Dall'alto in basso:  $\alpha = -3/2, \, \alpha = -8, \, \alpha = 4$ 

### 10.1.3 Esercizio

Dire se la funzione  $W(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  è di Lyapunov per accertare la stabilità dell'origine come equilibrio per il sistema di e.d.o.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z \\ \dot{y} = -2y \\ \dot{z} = -3z. \end{cases}$$

**Soluzione** L'origine è equilibrio. La funzione W è nulla nell'origine e positiva al di fuori. Vediamo la derivata di Lie:

$$\mathcal{L}_X(W) = \frac{\partial W}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial W}{\partial z}\dot{z} = 2(-x^2 + xy + xz - 2y^2 - 3z^2)$$

Maggioriamo i termini misti con la diseguaglianza  $uv \leq (u^2 + v^2)/2$  che si ottiene subito da  $(u - v)^2 \geq 0$ . Si ha allora

$$\mathcal{L}_X(W) \le -3y^2 - 5z^2.$$

Quindi  $\mathcal{L}_X(W)$  è strettamente minore di zero in tutti punti fuori della retta (x,0,0). Su tale retta si ha  $\mathcal{L}_X(W) = -2x^2$  e quindi  $\mathcal{L}_X(W)$  è strettamente minore di zero al di fuori dell'origine e pertanto l'origine è equilibrio asintoticamente stabile. Esercizio: calcolare gli autovalori e determinare il tipo di equilibrio.

# 10.1.4 Esercizio

Sia M la massa della terra e R il suo raggio. Un punto materiale di massa m si può muovere su di una retta passante per il centro della terra. Sia R+x,  $x\geq 0$ , la distanza dal centro della terra. Il punto è soggetto alla forza di attrazione gravitazionale

$$f(x) = -\frac{GMm}{(R+x)^2}$$

Trattiamo il sistema quindi come unidimensionale.

- a) Trovare la velocità del punto in funzione della quota, v = v(x) per una data velocità iniziale  $v_0$  positiva nel moto che parte dalla superficie terrestre.
- b) Trovare l'altezza massima raggiunta per una data velocità iniziale  $v_0$  positiva.
- c) Trovare la velocità iniziale  $v_0^f$  che consente di allontanarsi indefinitamente dalla terra (velocità di fuga).

Soluzione Primo metodo. Calcoliamo l'energia potenziale associata

$$U(x) = -\int f(x)dx = -\int -\frac{GMm}{(R+x)^2}dx = -\frac{GMm}{(R+x)}$$

La conservazione dell'energia e = T + U porge subito

$$v(x)^2 = \frac{2}{m}(e - U(x)), \qquad e = \frac{m}{2}v_0^2 + U(0)$$

da cui

$$v^{2}(x) = v_{0}^{2} - \frac{2GMm}{R} \frac{x}{R+x} \le v_{0}^{2} \quad \forall \ x \ge 0.$$

L'altezza massima si ha per  $v^2(x) = 0$  ed è

$$x_{max} = \frac{v_0^2 R^2}{2GMm - v_0^2 R}.$$

La velocità di fuga è il valore di  $v_0$  per il quale  $x_{max} \to +\infty$  e quindi è il valore che annulla il denominatore

$$v_0^f = \sqrt{\frac{2GMm}{R}} = \sqrt{2gR}$$

avendo posto  $g = GM/R^2$ .

Secondo metodo. Invece di usare l'integrale primo dell'energia, cerchiamo di risolvere l'equazione differenziale che si ottiene dalla legge di Newton. Si ha quindi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt}(t) = f(x(t)) = -\frac{GMm}{(R+x)^2}.$$

Siccome siamo interessati alla v=v(x) usiamo la regola della differenziazione di funzioni composte

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d}{dt}v(x(t)) = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv}{dx}v = f(x)$$

e quindi otteniamo l'equazione del primo ordine a variabili separabili

$$m\frac{dv}{dx}v(x) = -f(x)$$

che integrata restituisce l'integrale primo dell'energia

$$\int mvdv = \int -f(x)dx$$

ovvero

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = c.$$

# 10.1.5 Esercizio

Un punto materiale di massa m si muove lungo l'asse x di un riferimento inerziale secondo l'equazione

$$m\ddot{x} = f(x) = -x + x^2$$

- a) Scrivere la traiettoria del moto per fissate condizioni iniziali a meno del calcolo di primitive di integrali e inversione di funzioni.
- b) Tracciare il ritratto in fase del sistema, determinare gli equilibri del sistema nel piano delle fasi e indagare la loro stabilità con Teorema di Lyapunov e Teorema spettrale.
- c) Come cambiano gli equilibri e la stabilità degli stessi se si aggiunge una forza viscosa  $-k\dot{x},\ k>0$ ?

Soluzione a) L'energia potenziale associata è

$$U(x) = -\int f(\xi)d\xi = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

La traiettoria del moto si ricava dalla formula

$$t = F(x) + c = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(e - U(x))}} + c.$$

b) Le configurazioni di equilibrio sonoi punti ove U'(x)=-f(x)=0 e sono x=0 e x=1. Dallo studio di U si vede che 0 è un minimo e 1 un massimo. Lo studio delle curve di livello mostra che x=0, v=0 è un equilibrio stabile e x=1, v=0 è instabile. Verifichiamo con i teoremi visti nel corso. Scriviamo il sistema al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = m^{-1}f(x) = m^{-1}(-x + x^2) \end{cases}$$

e linearizziamolo negli equilibri:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} x - x_{eq} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1 + 2x}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{eq} \\ v \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice A=A(x) per x=0 e x=1 usando la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{tr(A)^2 - 4 \det A}}{2}.$$

Si vede che per x=0  $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{m^{-1}}$  quindi l'equilibrio è ellittico e il metodo spettrale non da informazioni sul sistema nonlineare; in x=1 si ha  $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{m^{-1}}$  e quindi l'equilibrio, iperbolico, è instabile per il sistema nonlineare avendo un autovalore con parte reale positiva. La stabilità di x=0 si può accertare con il primo metodo di Lyapunov usando l'energia totale E=T+U che è un integrale primo, come funzione di Lyapunov.

c) Se si aggiunge una forza viscosa, gli equilibri non sono modificati, dato che essa è nulla per velocità nulla. Il sistema linearizzato diviene

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1+2x}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{eq} \\ v \end{pmatrix}.$$

con autovalori per x=0

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{(\frac{k}{m})^2 - 4m^{-1}}$$

e per x = 1

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{(\frac{k}{m})^2 + 4m^{-1}}$$

Si vede quindi che ora entrambi gli equilibri sono iperbolici, x=0 è asintoticamente stabile e x=1 rimane instabile avendo un autovalore con parte reale positiva.

# 10.1.6 Esercizio

Un punto materiale di massa m si muove lungo l'asse orizzontale x di un riferimento inerziale Oxyz secondo l'equazione

$$m\ddot{x} = f(x) = \tan x, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- a) Scrivere la traiettoria del moto per fissate condizioni iniziali a meno del calcolo di primitive di integrali e inversione di funzioni.
- b) Tracciare il ritratto in fase del sistema, determinare gli equilibri del sistema nel piano delle fasi e indagare la loro stabilità con i metodi e teoremi visti nel corso.
- c) Come cambiano gli equilibri e la stabilità degli stessi se ora il sistema Oxyz ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno all'asse verticale y?
- d) indagare equilibri e stabilità di x = 0 nel caso in cui oltre alla forza f agisca solamente una molla di costante elastica h > 0 tra il punto e l'origine O.

Soluzione a) L'energia potenziale associata è

$$U(x) = -\int f(\xi)d\xi = -\int \tan(\xi)d\xi = \log(\cos x)$$

La traiettoria del moto si ricava dalla formula

$$t = F(x) + c = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(e - U(x))}} + c.$$

b) Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove U'(x) = -f(x) = 0 e sono x = 0. Dallo studio di U si vede che 0 è un massimo. Lo studio delle curve di livello mostra che x = 0, v = 0 è un equilibrio instabile. Verifichiamo con i teoremi visti nel corso. Scriviamo il sistema al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = m^{-1}f(x) = m^{-1}(\tan x) \end{cases}$$

e linearizziamolo negli equilibri:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m \cos^2 x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice A=A(x) per x=0 usando la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{tr(A)^2 - 4 \det A}}{2}.$$

Si vede che per x=0  $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{m^{-1}}$  quindi l'equilibrio, iperbolico, è instabile per il sistema nonlineare avendo un autovalore con parte reale positiva.

c) Se ora il sistema Oxyz ruota attorno all'asse verticale y bisogna aggiungere l'energia potenziale centrifuga quindi

$$U = U^f(x) + U^{cf}(x)$$
, ove  $U^{cf}(x) = -\frac{m\omega^2}{2}x^2$ .

Si vede subito che l'unico equilibrio è x=0 che è un massimo locale e quindi instabile con conti analoghi ai precedenti.

d) Se invece agisce una molla lineare bisogna aggiungere l'energia potenziale elastica

$$U = U^{f}(x) + U^{el}(x)$$
, ove  $U^{el} = \frac{h}{2}x^{2}$ 

che ha un minimo in x=0 che "compete" con il massimo di  $U^f$ . Gli equilibri sono le soluzioni di -U'(x)=0 e sono dati da

$$\tan x - hx = 0.$$

Dal grafico (studio di f'(0)) si ha una unica soluzione x=0 se  $h \le 1$  e tre soluzioni, x=0 e due simmetriche rispetto a x=0 se h>1. Indaghiamo la stabilità di x=0 come richiesto. Il sistema linearizzato nell'equilibrio è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1-h}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

con autovalori per x=0

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{(1-h)}{m}}$$

Si vede quindi che l'equilibrio è ancora iperbolico e instabile se h < 1 mentre è ellittico e quindi il metodo spettrale non dice nulla se  $h \ge 1$ . Usiamo in questo caso il THND avendo sole forze conservative. Si ha

$$H_U(0) = U''(0) = h - 1$$

e quindi l'equilibrio è stabile se h > 1. Il caso h = 1 puo' essere accertato solo con lo studio delle derivate successive del potenziale.

# 10.2 Esercizi su sistemi Lagrangiani e sistemi non inerziali

# 10.2.1 Esercizio

Nel piano Oxy di un riferimento Oxyz con l'asse y diretto verso l'alto giace un disco di massa m e raggio R. Il disco rotola senza strisciare sull'asse x del riferimento. Tra il baricentro G del disco e il punto (0,R) sull'asse y è tesa una molla di costante elastica h. Infine, il riferimento Oxyz ruota rispetto ad uno spazio inerziale con velocità angolare costante  $\omega$  diretta come l'asse y. Si usi l'ascissa  $x = x_G$  del baricentro per descrivere la posizione del disco nel riferimento non inerziale Oxyz.

- a) Scrivere l'energia potenziale delle forze conservative agenti nel riferimento Oxyz e l'energia cinetica del disco.
- b) Scrivere la velocità del punto D opposto al punto di contatto C rispetto al baricentro.
- c) Mostrare che le componenti lagrangiane della sollecitazione della forza di Coriolis  $Q^{cor}$  sono identicamente nulle

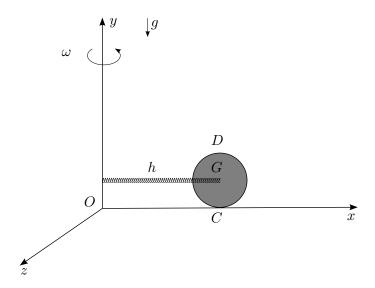


Figura 10.3: esercizio 10.2.1

**Soluzione** a) Le forze conservative agenti nel sistema non inerziale sono la forza elastica e quella centrifuga. Si ha, usando il teorema Steiner

$$U(x) = U^{el}(x) + U^{cf}(x) = \frac{h}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}I_O^y = \frac{h}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}(I_G^y + mx^2)$$

e quindi

$$U(x) = \left(\frac{h}{2} - \frac{m\omega^2}{2}\right)x^2 + cost.$$

L'energia cinetica si trova usando il T. di Konig e ricordando che per la condizione di puro rotolamento  $\dot{x}=R\dot{\theta}$ . Allora

$$T = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}I_G^z\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}m\dot{x}^2$$

b) la velocità del punto D si trova usando la FFMR:

$$v_D = v_C + \omega \wedge CD = \dot{\theta} \hat{z} \wedge 2R \hat{y} = 2R \frac{\dot{x}}{R} \hat{x} = 2\dot{x}\hat{x}.$$

c) per un generico punto P del disco, la forza di Coriolis vale  $df = -2dm\omega \times v_P$ ; un generico vettore w di velocità virtuale associato al moto del punto P è un qualsiasi vettore del piano Oxy, pertanto

$$dQ^{cor} = -2dm\omega \times v_P \cdot w \equiv 0$$

perchè i tre vettori sono complanari.  $Q^{cor}$  si ottiene per integrazione in dm e quindi è identicamente nulla.

#### 10.2.2 Esercizio

Nel piano verticale Oxy di un riferimento Oxyz con l'asse y diretto verso l'alto si consideri il sistema soggetto a gravità costituito da un'asta AB di massa m e

Figura 10.4: esercizio 10.2.2

lunghezza l. L'estremo A è libero di scorrere sull'asse x. Tra l'estremo B e il punto B' di eguale ascissa è tesa una molla di costante elastica h>0. Si supponga che mg>2hl. Si riferisca il sistema alla coordinata  $\theta$ , angolo tra il segmento AB e la direzione positiva dell'asse x, valutato positivamente in senso antiorario e alla cordinata  $x=x_A$ .

- a) Nel caso in cui l'estremo A sia vincolato nell'origine O scrivere l'energia potenziale delle forze conservative agenti nel riferimento Oxyz e l'energia cinetica dell'asta. Si scriva la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.
- b) Sia ora l'estremo A libero di scorrere sull'asse x. Si introduca l'ulteriore coordinata  $x=x_A$ . Scrivere l'energia cinetica del sistema e la sua Lagrangiana. Determinare gli integrali primi del sistema.

**Soluzione** a) Le forze conservative agenti nel sistema inerziale sono la forza elastica e gravitazionale. Si ha

$$U(x) = U^{el}(x) + U^g(x) = \frac{h}{2}l^2\sin^2\theta + mg\frac{l}{2}\sin\theta.$$

Gli equilibri sono le soluzioni di

$$U'(\theta) = l\cos\theta(hl\sin\theta - \frac{mg}{2}) = 0$$

Per la condizione richiesta mg > 2hl l'unico equilibrio si ha per  $\cos \theta = 0$  e quindi  $\theta = \pm \pi/2$ . L'energia cinetica si trova usando la formula per il corpo rigido con un punto fisso e vale

$$T = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}^2$$

Il sistema linearizzato è,  $u = \theta - \theta_{eq}$ 

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A\dot{u}^2 - \frac{1}{2}U''(\theta_{eq})u^2$$

e quindi la frequenza di piccola oscillazione è

$$\omega^2 = \frac{U''(\theta_{eq})}{A}.$$

b) Sia ora l'estremo A libero di muoversi sull'asse x. Vale

$$x_G = x + \frac{l}{2}\cos\theta, \qquad y_G = -\frac{l}{2}\sin\theta.$$

L'energia cinetica si trova ora usando il T. di Konig. Allora

$$T = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 - l\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2.$$

La lagrangiana  $L = T - U^{el}(\theta)$  non dipende dalla coordinata x che è ciclica. Si ha quindi, oltre all'integrale dell'energia E = T + U, l'ulteriore integrale primo  $\partial L/\partial \dot{x}$ .

#### 10.2.3 Esercizio

Nel piano Oxy con y verticale ascendente di un riferimento inerziale Oxyz si consideri il sistema costituito da un'asta omogenea AC di massa m e lunghezza l e da un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare lungo l'asse x. L'estremo A dell'asta è vincolato in modo liscio a scorrere lungo l'asse y mentre l'estremo C coincide con il baricentro del disco. Inoltre, una molla di costante elastica h>0 è tesa tra l'origine O e il centro C del disco. Si prenda come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  tra la direzione positiva dell'asse delle x e il segmento AC, valutato positivamente in senso orario.

Rispondere alle domande seguenti

- a) scrivere l'energia potenziale del sistema e determinarne gli equilibri
- b) indagare la stabilità al variare del parametro  $\lambda = mg/2hl$
- c) scrivere l'energia cinetica del sistema e la frequenza di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile
- d) riconoscere che la lagrangiana L = T U del sistema ha la forma

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}A(\theta)\dot{\theta}^2 - U(\theta). \tag{10.1}$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e linearizzarle attorno ad un equilibrio  $\theta^*$  che abbia  $U''(\theta^*) < 0$ . Indagare la stabilità con il metodo spettrale

Soluzione a) L'energia potenziale associata è

$$U(\theta) = U^g + U^{el} = mg\frac{l}{2}\sin\theta + \frac{h}{2}(l\cos\theta)^2.$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove  $U'(\theta) = 0$  ovvero

$$U'(\theta) = l\cos\theta[mg - 2hl\sin\theta] = 0$$

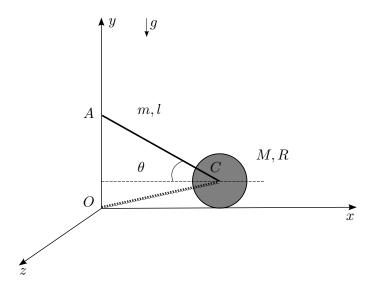


Figura 10.5: esercizio 10.2.3

che ha soluzioni

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_{3,4} = \arcsin(\lambda) \quad \lambda = \frac{mg}{2hl} \le 1.$$

b) stabilità. Con forze tutte conservative, uso THND e quindi studio  $U''(\theta)$ 

$$U''(\theta) = -mg\frac{l}{2}\sin\theta - hl^2(1 - 2\sin^2\theta).$$

Si ha quindi

$$U''(\theta_1) = hl^2(1 - \lambda)$$

pertanto  $\theta_1$  è stabile se  $\lambda < 1$ , instabile se  $\lambda > 1$  e nulla si puo' dire se  $\lambda = 1$ . Inoltre

$$U'(\theta_2) = hl^2(1+\lambda)$$

quindi  $\theta_2$  è sempre stabile. Infine

$$U'(\theta_{3,4}) = hl^2(\lambda^2 - 1)$$

quindi gli equilibri  $\theta_{3,4}$  ove esistono sono instabili.

c) L'energia cinetica è

$$T = T^a + T^d = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega^2$$

Per il calcolo della velocità del baricentro dell'asta abbiamo

$$x_G = \frac{l}{2}\cos\theta$$
,  $y_G = R + \frac{l}{2}\sin\theta$ ,  $v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = \frac{l^2}{2}\dot{\theta}^2$ ;

per il disco abbiamo  $x_G = l\cos\theta$  e  $v_G^2 = \dot{x}_G^2$  e infine, per la condizione di puro rotolamento

$$\omega = \frac{\dot{x}_G}{R}, \qquad \omega^2 = \frac{l^2 \sin^2 \theta}{R^2}.$$

Pertanto

$$T = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{3}{2} M l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} A(\theta) \dot{\theta}^2$$

La lagrangiana linearizzata attorno all'equilibrio sempre stabile  $\theta_2$  è, scrivendo per semplicità  $\theta = \theta - \theta_2$ 

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A(\theta_2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}U''(\theta_2)\theta^2$$

La frequenza di piccola oscillazione è la soluzione di

$$\det(H_U(\theta_2) - \omega^2 A) = U''(\theta_2) - \omega^2 A(\theta_2) = 0,$$

quindi

$$\omega^{2} = \frac{U''(\theta_{2})}{A(\theta_{2})} = \frac{hl^{2}(1+\lambda)}{\frac{ml^{2}}{3} + \frac{3Ml^{2}}{2}}.$$

d) il procedimento è analogo a quanto fatto nel corso per la linearizzazione delle equazioni di Lagrange nel capitolo sulle piccole oscillazioni. Le equazioni linearizzate sono le equazioni di Lagrange di

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A(\theta_2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}U''(\theta_2)\theta^2.$$

ovvero

$$A(\theta_2)\ddot{\theta} + U"(\theta_2)\theta = 0$$

Se  $U''(\theta_2) < 0$  si tratta di un repulsore armonico.

# 10.2.4 Esercizio

Nel piano Oxy con y verticale ascendente di un riferimento inerziale Oxyz si consideri il sistema costituito da due aste OA e AB di eguale lunghezza e massa trascurabile. L'estremo O di OA è vincolato nell'origine, le due aste hanno l'estremo A in comune e l'estremo B di AB è vincolato a scorrere in modo liscio lungo l'asse x. Nell'estremo A vi è un punto materiale di massa m. Infine, tra i punti O e B è tesa una molla di costante elastica h>0. Si prenda come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  tra la direzione positiva dell'asse delle x e il segmento OA, valutato positivamente in senso antiorario.

Rispondere alle domande seguenti

- a) scrivere l'energia potenziale del sistema e determinarne gli equilibri
- b) indagare la stabilità con i teoremi visti nel corso al variare del parametro  $\lambda = mg/4hl$
- c) scrivere l'energia cinetica del sistema e la frequenza di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile
- d) scrivere la lagrangiana L=T-U del sistema, le equazioni di Lagrange e linearizzarle attorno ad un equilibrio  $\theta^{eq}$ . Indagare la stabilità con il metodo spettrale
- e) dire come cambia l'energia potenziale se invece del punto materiale in A l'asta OA ha massa m e il sistema ruota con velocità angolare  $\omega$  attorno all'asse y

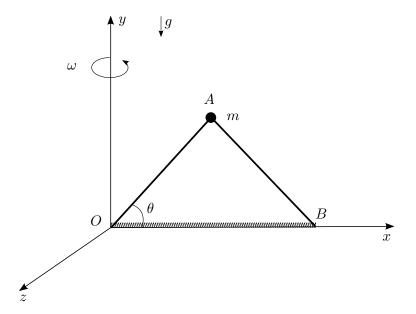


Figura 10.6: esercizio 10.2.4

f) accertare se l'energia totale E=T+U è funzione di Lyapunov per la stabilità di uno degli equilibri

Soluzione a) L'energia potenziale associata è

$$U(\theta) = U^g + U^{el} = mgl\sin\theta + \frac{h}{2}(2l\cos\theta)^2.$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove  $U'(\theta) = 0$  ovvero

$$U'(\theta) = l\cos\theta[mg - 4hl\sin\theta] = 0$$

che ha soluzioni

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_{3,4} = \arcsin(\lambda) \quad \lambda = \frac{mg}{4hl} \le 1.$$

b) stabilità. Con forze tutte conservative, uso THND e quindi studio  $U''(\theta)$ 

$$U''(\theta) = -mgl\sin\theta - 4hl^2(1 - 2\sin^2\theta).$$

Si ha quindi

$$U''(\theta_1) = 4hl(1-\lambda)$$

pertanto  $\theta_1$  è stabile se  $\lambda < 1$ , instabile se  $\lambda > 1$  e nulla si puo' dire se  $\lambda = 1$ . Inoltre

$$U'(\theta_2) = 4hl(1+\lambda)$$

quindi  $\theta_2$  è sempre stabile. Infine

$$U'(\theta_{3.4}) = 4hl^2(\lambda^2 - 1)$$

quindi gli equilibri  $\theta_{3,4}$  ove esistono sono instabili.

c) L'energia cinetica è immediata

$$T = \frac{m}{2}v_A^2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2$$

La lagrangiana linearizzata attorno all'equilibrio sempre stabile  $\theta_2$  è, scrivendo per semplicità  $\theta = \theta - \theta_2$ 

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}U''(\theta_2)\theta^2$$

La frequenza di piccola oscillazione è la soluzione di

$$\det(H_U(\theta_2) - \omega^2 A) = U''(\theta_2) - \omega^2 m l^2 = 0,$$

quindi

$$\omega^2 = \frac{U''}{A}(\theta_2) = \frac{4hl(1+\lambda)}{ml^2}.$$

d) La lagrangiana del sistema è

$$L = T - U = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta - \frac{h}{2}(2l\cos\theta)^2$$

e l'equazione di Lagrange associata è

$$ml^2\ddot{\theta} = -U'(\theta)$$

Dobbiamo ridurre il sistema al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\frac{U''(\theta)}{ml^2} \end{cases}$$

e linearizzarlo nell'equilibrio  $\theta_2$ . Scrivendo come prima  $\theta = \theta - \theta_2$  abbiamo

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{U''(\theta_2)}{ml^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice del sistema lineare usando la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{tr(A)^2 - 4 \det A}}{2}.$$

Si ha quindi

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\det A} = \pm \sqrt{-\frac{U''(\theta_2)}{ml^2}}$$

L'equilibrio è quindi ellittico e nulla si può dire per la stabilità del sistema nonlineare con il metodo spettrale. Si noti che gli autovalori coincidono con le frequenze delle piccole oscillazioni, perchè? Se invece linearizziamo attorno ad un equilibrio instabile, per esempio  $\theta_1$  con  $U''(\theta_1) < 0$  per  $\lambda > 1$ , l'equilibrio è iperbolico e avendo un autovalore positivo.

e) Se ora il sistema Oxyz ruota attorno all'asse verticale y bisogna aggiungere l'energia potenziale centrifuga della sbarra OA (T. di Steiner)

$$U^{cf}(\theta) = -\frac{\omega^2}{2} \left( \frac{ml^2}{12} \cos^2 \theta + m \left( \frac{l}{2} \cos \theta \right)^2 \right)$$

Si noti che anche l'energia potenziale gravitazionale si modifica

$$U^g = mgy_G = mg\frac{l}{2}\sin\theta.$$

f) L'energia totale E = T + U ha un minimo stretto in  $(\theta_{eq}, 0)$  se  $\theta_{eq}$  è minimo locale stretto di U, quindi se  $\theta_{eq}$  è stabile. Inolte, essendo tutte le forze conservative, l'energia totale è integrale primo. Si ha quindi  $\mathcal{L}_X(W) = 0$  per W = E e quindi l'energia totale è funzione di Lyapunov per la stabilità semplice degli equilibri.

# 10.2.5 Esercizio

Si consideri il sistema meccanico uno-dimensionale composto da una particella P di massa m>0 vincolata senza attrito su di una guida rettilinea orizzontale. La posizione di P è individuata dall'ascissa q di P rispetto ad un'origine O fissata sulla guida. La particella è soggetta alla sollecitazione Lagrangiana di componente

$$Q(q, \dot{q}) = -\tan(q + q^3 + \dot{q}^3) - k\sin\dot{q}, \qquad k > 0.$$

- a) Dire se il sistema è conservativo e motivare la risposta.
- b) Determinare gli equilibri e discutere la stabilità della configurazione di equilibrio q=0 in base ai teoremi visti nel corso.

**Soluzione** a) Le componenti lagrangiane della sollecitazione dipendono dalla velocità e quindi non si possono esprimere come gradiente di una funzione della posizione: il sistema non è conservativo. Calcoliamo l'equazione di Lagrange a partire dall'energia cinetica  $2T(q,\dot{q})=m\dot{q}^2$ . Da

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q(q, \dot{q})$$

si ottiene

$$m\ddot{q} = -\tan(q + q^3 + \dot{q}^3) - k\sin\dot{q}.$$

b) Le configurazioni di equilibrio sono quelle per cui  $Q(q^*,0)=0$  ovvero

$$q^* + (q^*)^3 = a\pi, \qquad a = 0, 1, 2, \dots$$

Per a=0, l'unica soluzione è  $q^*=0$ . Per accertarne la stabilità non possiamo usare THND per la presenza di forze non conservative e nel TLD è difficile valutare se la condizione  $Q(q,\dot{q})\dot{q}\leq 0$  è soddisfatta. Proviamo con il primo metodo. Il sistema ridotto al primo ordine è

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = -\frac{1}{m}\tan(q+q^3+v^3) - \frac{k}{m}\sin v \end{cases}$$

e il sistema linearizzato attorno a (0,0) è

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = -\frac{1}{m} q - \frac{k}{m} v \end{cases}$$

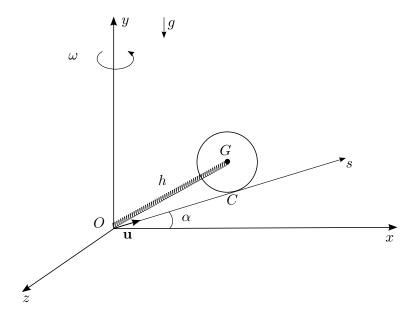


Figura 10.7: esercizio 10.2.6

Gli autovalori di

$$A = \left( \begin{array}{cc} 0 & 1\\ -\frac{1}{m} & -\frac{k}{m} \end{array} \right)$$

sono le soluzioni dell'equazione  $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$  che si scrive

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{1}{m} = 0$$

Si vede subito che le soluzioni verificano  $Re(\lambda_i) < 0$  e quindi l'equilibrio  $q^* = 0$  è asintoticamente stabile.

#### 10.2.6 Esercizio

Nel piano Oxy, ove y è verticale ascendente,  $\mathbf{g} = -g\,\hat{y}, \ g > 0$ , si consideri il sistema formato da una guida rettilinea formante un angolo  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  con l'asse y (attenzione, nel disegno è indicato l'angolo formato con l'asse x), da un disco di massa nulla vincolato a ruotare senza strisciare sulla guida e da un punto materiale P di massa m vincolato nel centro del disco. Il piano Oxy ruota con velocità angolare  $\omega = \omega \hat{y}$  costante rispetto ad un riferimento inerziale. Inoltre, tra l'origine 0 e il punto P è tesa una molla di costante elastica h > 0. Si descriva la posizione di P usando l'ascissa curvilinea s del punto di contatto C tra guida e disco, orientata positivamente nella direzione del versore  $\mathbf{u} = \sin \alpha \hat{x} + \cos \alpha \hat{y}$ .

- a) determinare le configurazioni di equilibrio relativo e studiare la loro stabilità al variare del parametro  $\omega$  in base ai teoremi visti nel corso
- b) determinare la reazione vincolare che mantiene il disco nel piano Oxy per un determinato atto di moto  $(s, \dot{s})$
- c) come si modifica la discussione sulla stabilità del punto (i) se si aggiunge una forza viscosa in  $P,\,F_P=-kv_P,\,K>0$  ?

Soluzione a) Nel sistema rotante agiscono la forza di gravità, la forza elastica e la forza centrifuga, tutte conservative, e la forza di Coriolis. Quest'ultima è nulla negli equilibri e quindi non interviene nella determinazione degli stessi. Inoltre, le sue componenti lagrangiane sono nulle perchè la forza  $F^{cor} = -2m\omega \wedge v_p$  è ortogonale al piano Oxy mentre gli spostamenti virtuali di P vi appartengono. Quindi posso applicare THND, oltre che TLD per studiare la stabilità degli equilibri. Osservo infine che  $y_P = y_C + cost$ . L'energia potenziale totale è

$$U = U^g + U^{el} + U^{cf} = mgy_C + \frac{h}{2}OP^2 - \frac{m\omega^2}{2}P'P^2$$

$$U(s) = mg\cos\alpha s + \frac{h}{2}s^2 - \frac{m\omega^2}{2}(s\sin\alpha - R\cos\alpha)^2.$$

Calcolo gli equilibri.

$$U'(s) = mq\cos\alpha + (h - m\omega^2\sin^2\alpha)s + m\omega^2R\cos\alpha\sin\alpha = 0$$

porge

$$s^* = \frac{m(g + \omega^2 R \sin \alpha) \cos \alpha}{m\omega^2 \sin^2 \alpha - h}, \qquad h \neq m\omega^2 \sin^2 \alpha.$$

Studio stabilità con THND. U'(s) è una parabola.

$$H_U(s^*) = U''(s^*) = h - m\omega^2 \sin^2 \alpha$$

Quindi  $S^*$  è stabile se

$$\omega^2 < \frac{h}{m\sin^2\alpha}$$

e instabile se

$$\omega^2 > \frac{h}{m\sin^2\alpha}.$$

b) L'unica forza agente ortogonalmente al piano è la forza di Coriolis, che deve essere bilanciata dalla reazione  $\Phi = \Phi \hat{z}$ . Si ha quindi

$$\Phi = -F^{cor} = 2m\omega \hat{y} \wedge v_P = 2m\omega \hat{y} \wedge \dot{s}\mathbf{u} = -2m\omega \dot{s}\sin\alpha \hat{z}.$$

c) La forza viscosa in P ha componente Lagrangiana data da

$$\delta L = F_P \cdot \delta P = -k\dot{s}\mathbf{u} \cdot \delta s\mathbf{u} = Q\delta s, \qquad \Rightarrow \qquad Q = -k\dot{s}.$$

La presenza di  $F_P$ , nulla negli equilibri, non altera gli stessi, ma impedisce di usare THND. Gli equilibri prima stabili (per TLD) rimangono tali, mentre per quelli prima instabili ora non posso dire nulla.

#### 10.2.7 Esercizio

Nel riferimento inerziale ortonormale Oxyz con l'asse y diretto verso l'alto  $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$ , si consideri il sistema giacente nel piano Oxy costituito da una guida rettilinea liscia passante per l'origine individuata dal versore  $\mathbf{t} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$  e da una lamina quadrata omogenea di lato l e massa m il cui baricentro G è vincolato a scorrere lungo la guida. Si riferisca il sistema alle coordinate lagrangiane  $(s, \theta)$ 

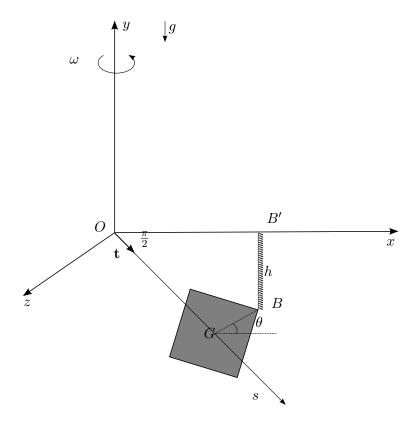


Figura 10.8: esercizio 10.2.7

rispettivamente ascissa di G sulla guida orientata dal versore  $\mathbf{t}$  e angolo formato dalla direzione positiva dell'asse x e il segmento GB (vedi figura) orientato positivamente in senso antiorario. Oltre alla gravità, sulla lamina agisce una forza elastica dovuta ad una molla tesa tra il vertice B della lamina e il punto B' di eguale ascissa posto sull'asse x; infine, sul baricentro G agisce una forza linearmente viscosa  $F = -kv_G$ , k > 0.

- a) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità sulla base dei teoremi visti
- b) Determinare l'energia cinetica del sistema e le frequenze delle piccole oscillazioni nell'ipotesi che  $F=-kv_G\equiv 0$
- c) Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema di coordinate  $(s, \theta)$  e confrontarle con le equazioni cardinali del moto della lamina (polo in G) usando la base  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ .

**Soluzione** a) Calcoliamo le componenti lagrangiane della sollecitazione delle forze conservative:

$$U(s,\theta) = U^g + U^{el} = mgy_G + \frac{h}{2}y_B^2 = -mg\frac{\sqrt{2}}{2}s + \frac{h}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(l\sin\theta - s)\right]^2$$

La forza viscosa  $F = -kv_G$  ha componenti lagrangiane

$$Q_s(s, \dot{s}) = -k\dot{s}, \qquad Q_\theta = 0.$$

e quindi non interviene nella determinazione degli equilibri. Le configurazioni di equilibrio sono i punti  $(s, \theta)$  ove si annulla  $\nabla U$ :

$$\begin{cases} U_s &= -mg\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{h}{2}(l\sin\theta - s) = 0 \\ U_\theta &= \frac{h}{2}(l\sin\theta - s)l\cos\theta = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases}
-lmg\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta = 0\\ s = l\sin\theta + \frac{mg\sqrt{2}}{h}
\end{cases}$$

le configurazioni di equilibrio sono quindi

$$P_1 = (\frac{\pi}{2}, s_1) = (\frac{\pi}{2}, l + \frac{mg\sqrt{2}}{h}), \qquad P_2 = (\frac{3\pi}{2}, s_2) = (\frac{3\pi}{2}, -l + \frac{mg\sqrt{2}}{h})$$

Calcoliamo la matrice hessiana

$$H_U(s,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & -\frac{hl}{2}\cos\theta \\ -\frac{hl}{2}\cos\theta & \frac{hl^2}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \frac{hl}{2}s\sin\theta \end{pmatrix}$$

e valutiamola negli equilibri. Si trova

$$H_U(P_1) = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & 0\\ 0 & lmg\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad H_U(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & 0\\ 0 & -lmg\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi  $P_1$  è stabile per TLD mentre non possiamo applicare THND e quindi non possiamo dire nulla in  $P_2$ .

b) Energia cinetica. Usiamo il Teorema di Konig

$$T = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}(\omega, I_G \omega) = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{12}(l^2 + l^2)\dot{\theta}^2$$

Le frequenze di piccola oscillazione in  $P_1$  si trovano dall'equazione

$$\det(H_U(P_1) - \omega^2 A(P_1)) = 0, \qquad \det\begin{pmatrix} \frac{h}{2} - \omega^2 m & 0\\ 0 & lmg\frac{\sqrt{2}}{2} - \omega^2 \frac{ml^2}{6} \end{pmatrix} = 0$$

che ha soluzioni

$$\omega_1^2 = \frac{h}{2m}, \qquad \omega_2^2 = \frac{3\sqrt{2}g}{l}.$$

c) Equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} &= -\frac{\partial U}{\partial s} + Q_s \quad i.e. \quad m\ddot{s} = mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{h}{2}(l\sin\theta - s) - k\dot{s} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -\frac{\partial U}{\partial \theta} \quad i.e. \quad \frac{ml^2}{6} \ddot{\theta} = -\frac{h}{2}(l\sin\theta - s)l\cos\theta \end{cases}$$

Scriviamo ora le equazioni cardinali della lamina con polo in G

$$\begin{cases} ma_G = m\ddot{s}\mathbf{t} = \Phi\mathbf{n} + m\mathbf{g} + F^{el} - k\dot{s}\mathbf{t} \\ \dot{M}_G = I_G\dot{\omega} = \frac{ml^2}{6}\ddot{\theta}\mathbf{b} = N_G = GB \wedge F^{el} \end{cases}$$

Si vede che le equazioni di Lagrange corrispondono rispettivamente alla proiezione della prima equazione cardinale su  $\mathbf{t}$  e alla seconda.

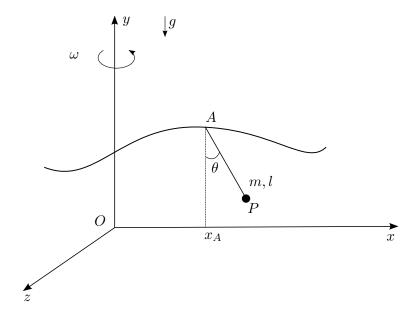


Figura 10.9: esercizio 10.2.8

#### 10.2.8 Esercizio

Nel piano Oxy con y verticale ascendente di un riferimento Oxyz si consideri la guida liscia coincidente con il grafico di una funzione  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ . Un'asta AP di massa trascurabile e lunghezza l è vincolata a muoversi nel piano Oxy con l'estremo A libero di scorrere sulla guida. Nell'estremo P dell'asta è vincolato un punto materiale P di massa m. Si considerino come coordinate lagrangiane del sistema l'ascissa  $x = x_A$  del punto A e l'angolo  $\theta$  tra la direzione negativa dell'asse delle y e l'asta AP, valutato positivamente in senso antiorario. Infine, il riferimento Oxyz ruoti con velocità angolare  $\omega$  costante diretta lungo l'asse verticale y rispetto agli spazi inerziali. Si consideri la descrizione del moto del sistema nel riferimento rotante.

- a) Si scrivano le componenti lagrangiane delle forze agenti nel riferimento rotante Oxyz
- b) Si determinino le configurazioni di equilibrio (relativo) con x=0.
- c) Si supponga ora che f'(0) = 0 e che  $g > \omega^2 l$ . Si studi la stabilità delle configurazioni di equilibrio con x = 0 sulla base dei teoremi visti nel corso.
- d) Si scriva l'energia cinetica del sistema e l'equazione di secondo grado che permette di calcolare le frequenze di piccola oscillazione in una configurazione di equilibrio stabile con x=0 (non è richiesto il calcolo delle frequenze).
- e) Come si modifica l'energia potenziale e cinetica del sistema se invece dell'asta AP si considera un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2l? (E' sufficente rispondere sinteticamente ma in modo preciso).

## Soluzione

a) Le forze agenti nel riferimento rotante sono il peso, la forza centrifuga e quella di Coriols. Quest'ultima ha componenti lagrangiane nulle poichè

$$\delta L^{cor} = -2m\omega \wedge v_P \cdot \delta P \equiv 0$$

dal momento che i tre vettori sono complanari. Le altre sono conservative di energia potenziale

$$U = U^{g} + U^{cf} = mgy_{P} - \frac{\omega^{2}}{2}mx_{P}^{2} = mg(f(x) - l\cos\theta) - \frac{\omega^{2}}{2}m(x + l\sin\theta)^{2}.$$

e le componenti sono date dal gradiente di -U.

b) le configurazioni di equilibrio annullano il gradiente di U

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,\theta) &= mgf'(x) - m\omega^2(x + l\sin\theta) = 0\\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(x,\theta) &= mgl\sin\theta - m\omega^2(x + l\sin\theta)l\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Quelle con x=0 devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,\theta) &= mgf'(0) - m\omega^2 l \sin \theta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(x,\theta) &= mgl \sin \theta - m\omega^2 l \sin \theta l \cos \theta = 0 \end{cases}$$

e quindi: se f'(0) = 0

$$\sin \theta = 0, \qquad \theta = 0, \pi,$$

se  $f'(0) \neq 0$ 

$$f'(0) = l \tan \theta, \qquad \theta = \arctan(f'(0)/l).$$

c) per la stabilità possiamo usare THND e TLD. Calcoliamo la matrice hessiana in  $(0,\theta)$ 

$$H_U(0,\theta) = \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{x\theta} \\ U_{x\theta} & U_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mgf''(0) - m\omega^2 & -m\omega^2l\cos\theta \\ -m\omega^2l\cos\theta & mgl\cos\theta - m\omega^2l^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Studio in (0,0). Si vede che in base all'ipotesi  $g > \omega^2 l$  si ha  $U_{\theta\theta} > 0$ . La matrice hessiana è ivi definita positiva (quindi l'equilibrio è stabile) sse

$$\det H_U(0,0) > 0$$
, i.e.  $f''(0) > \frac{\omega^2}{g - \omega^2 l}$ .

Studio in  $(0,\pi)$ . Qui  $U_{\theta\theta} < 0$ . Per avere la matrice hessiana definita positiva dobbiamo supporre  $U_{xx} > 0$ , ovvero  $gf''(0) > \omega^2$ . L'equilibrio è stabile sse

$$\det H_U(0,\pi) > 0$$
, *i.e.*  $f''(0) < \frac{\omega^2}{q + \omega^2 l}$ .

che è incompatibile con la condizione richiesta  $gf''(0) > \omega^2$ . Quindi l'equilibrio è instabile.

d) L'energia cinetica si trova calcolando  $v_P^2$  ed è

$$T = \frac{m}{2}v_P^2 = \frac{m}{2}[(1 + f'(x)^2\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\sin\theta(\cos\theta + f'(x))\dot{x}\dot{\theta}]$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni di

$$\det(H_U(0,0) - \Omega^2 A(0,0)) = 0.$$

e) vedi teoria. Il potenziale centrifugo è dato da  $U^{cf}=-\frac{\omega^2}{2}I_y^O$  e l'energia cinetica ha in più il termine  $\frac{1}{2}\frac{m(2l)^2}{12}\dot{\theta}^2$ .

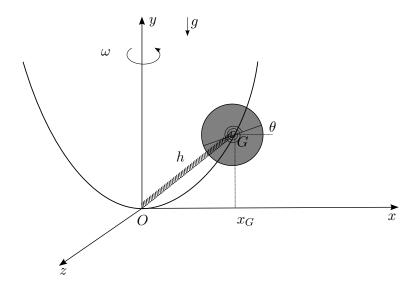


Figura 10.10: esercizio 10.2.9

## 10.2.9 Esercizio

Nel piano Oxy, con y verticale ascendente, di un riferimento Oxyz si consideri la guida liscia coincidente con il grafico della funzione  $y=ax^2, a>0$ . Un disco omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a muoversi nel piano Oxy con il baricentro G libero di scorrere sulla guida. Si considerino come coordinate lagrangiane del sistema l'ascissa  $x=x_G$  del punto G e l'angolo  $\theta$  valutato positivamente in senso antiorario, tra la direzione positiva dell'asse delle y e un fissato diametro del disco. Tra il baricentro G del disco e l'origine O=(0,0) è tesa una molla lineare di costante elastica h mentre sul centro G del disco agisce una molla a spirale di energia potenziale  $W(\theta)=k\theta^2/2$ . Infine, il riferimento Oxyz ruoti con velocità angolare  $\omega$  costante diretta lungo l'asse verticale y rispetto agli spazi inerziali. Si consideri la descrizione del moto del sistema nel riferimento rotante.

- a) Si determinino le configurazioni di equilibrio (relativo)  $(x^*, \theta^*)$  al variare di  $\omega^2 > 0$
- b) Si studi la stabilità dell'equilibrio, si scriva l'energia cinetica  $T = T(x, \dot{x}, \dot{\theta})$  del disco, e si scrivano esplicitamente le frequenze delle piccole oscillazioni in corrispondenza di una posizione di equilibrio stabile
- c) si scrivano le equazioni di Lagrange del moto del sistema

### Soluzione

a) Le forze agenti nel riferimento rotante sono il peso, la forza centrifuga, elastica e quella di Coriolis. Quest'ultima ha componenti lagrangiane nulle poichè

$$\delta L^{cor} = -2m\omega \wedge v_P \cdot \delta P \equiv 0$$

dal momento che i tre vettori sono complanari. Le altre sono conservative di energia potenziale

$$U(x,\theta) = U^g + U^{cf} + U^{el} + W = mgax^2 - \frac{\omega^2}{2}[mx^2 + \frac{mR^2}{4}] + \frac{h}{2}[x^2 + a^2x^4] + \frac{k\theta^2}{2}$$

e le componenti sono date dal gradiente di -U. Le configurazioni di equilibrio annullano il gradiente di U

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,\theta) &= mg2ax + hx + 2ha^2x^3 - \omega^2mx = x[2ha^2x^2 + 2mga + h - m\omega^2] = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(x,\theta) &= k\theta = 0 \end{cases}$$

Posto  $\lambda = m\omega^2 - 2mga + h$  gli equilibri  $(x^*, \theta^*)$  sono

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (x^*,0), \quad P_3 = (-x^*,0)$$

ove  $(x^*)^2 = \lambda/2ha^2$  se  $\lambda \ge 0$ , ovvero se  $\omega^2 \ge (mg2a + h)/m$ . Altrimenti l'unico equilibrio è l'origine.

b) per la stabilità possiamo usare THND. Calcoliamo la matrice hessiana in  $P_{2,3}(x^*,0)$ 

$$H_U = \begin{pmatrix} 6ha^2(x^*)^2 - \lambda & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

La matrice hessiana è definita positiva (quindi l'equilibrio è stabile) se  $\lambda > 0$ , non è definita se  $\lambda = 0$  ed è definita negativa (quindi l'equilibrio è instabile) se  $\lambda < 0$ . Viceversa, in  $P_1$  la matrice hessiana è  $H_U(P_1) = Diag[-\lambda, k]$  e quindi l'equilibrio è stabile se e solo se  $\lambda < 0$ .

L'energia cinetica si trova usando il teorema di König ed è

$$T = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + (2ax\dot{x})^2] + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2$$

per cui la matrice cinetica è

$$A(x) = \begin{pmatrix} m(1+4a^2x^2) & 0\\ 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo le frequenze in  $P_{2,3}$ . Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni di

$$\det(H_U - \Omega^2 A(x^*)) = \det \begin{pmatrix} 2\lambda - \Omega^2 (1 + 2\frac{\lambda}{h}) & 0\\ 0 & k - \Omega^2 \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix} = 0.$$

e quindi, svolgendo i calcoli

$$\Omega_1^2 = \frac{2\lambda}{(1+2\frac{\lambda}{h})}, \qquad \Omega_2^2 = \frac{2k}{mR^2}$$

c) equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} = -x(2ha^2x^2 - \lambda) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -k\theta. \end{cases}$$

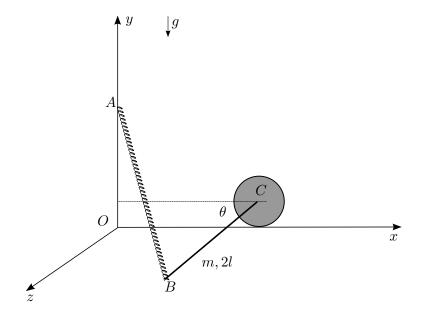


Figura 10.11: esercizio 10.2.10

## 10.2.10 Esercizio

Nel piano Oxy, con y verticale ascendente, di un riferimento inerziale Oxyz si consideri il sistema costituito da un'asta omogenea BC di massa m e lunghezza 2l. Tra l'estremo B dell'asta e il punto A=(0,2l+R) è tesa una molla di costante elastica h>0 e lunghezza a riposo nulla. L'estremo C dell'asta è vincolato invece in modo liscio al centro C di un disco di raggio R e massa trascurabile, che rotola sull'asse x. Come coordinate lagrangiane si usino l'ascissa  $x=x_C$  del punto C e l'angolo  $\theta$  tra la direzione negativa dell'asse x e il segmento BC, valutato in senso orario.

- a) Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
- b) Scrivere l'energia cinetica del sistema e determinare, a meno della risoluzione di un'equazione di secondo grado, le frequenze di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile nell'ipotesi mg = h2l.

### Soluzione

a) Calcolo dell'energia potenziale gravitazionale ed elastica  $U=U^g+U^{el}=mgy_G+\frac{h}{2}|AB|^2$ :

$$U(x,\theta) = mgl\sin\theta + \frac{h}{2}[(x - 2l\cos\theta)^2 + 4l^2(\sin\theta - 1)^2].$$

Gli equilibri sono gli zeri del gradiente di U, quindi le soluzioni di

$$U_x = h(x - 2l\cos\theta) = 0,$$

$$U_{\theta} = mgl\cos\theta + h(x - 2l\cos\theta)2l\sin\theta + 4hl^{2}(\sin\theta - 1)\cos\theta = 0$$

Sostituendo la prima nella seconda equazione si arriva a discutere l'equazione in  $\theta$ 

$$\cos\theta[mgl - 4hl^2 + 4hl^2\sin\theta] = 0$$

che ha soluzioni  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$  e  $\theta_{3,4} = \arcsin(1 - \frac{mg}{4hl})$ , queste ultime esistenti sse

$$-1 \le 1 - \frac{mg}{4hl} \le 1$$
, i.e.  $0 \le \frac{mg}{8hl} \le 1$ .

Calcoliamo la matrice Hessiana per discutere la stabilità

$$H_U(x,\theta) = \begin{pmatrix} h & 2hl\sin\theta\\ 2hl\sin\theta & \tilde{f}(x,\theta) \end{pmatrix}$$

ove

$$\tilde{f}(x,\theta) = -mgl\sin\theta + 2hlx\cos\theta + 4hl^2\sin\theta$$

che, calcolata negli equilibri ove  $x = 2l \cos \theta$  si riduce a

$$f(\theta_i) = -mgl\sin\theta_i + 4hl^2\cos^2\theta_i + 4hl^2\sin\theta_i$$

e l'Hessiana diventa funzione della sola  $\theta$ . Calcoliamo il determinante.

$$\det H_U(\theta_1) = \det H_U(\frac{\pi}{2}) = h(4hl^2 - mgl) - 4h^2l^2 = -mghl \quad \text{instabile per THND};$$

$$\det H_U(\theta_2) = \det H_U(-\frac{\pi}{2}) = -h(4hl^2 - mgl) - 4h^2l^2 = mghl - 8h^2l^2$$

che è instabile per THND sse  $\frac{mg}{8hl} < 1$ ; se  $\frac{mg}{8hl} = 1$  non possiamo dire nulla, se  $\frac{mg}{8hl} > 1$  l'equilibrio è stabile per THND o TLD.

Per  $\theta_{3,4}$  riscriviamo  $f(\theta)$  come

$$f(\theta_{3,4}) = -mgl\sin\theta_{3,4} + 4hl^2(1 - \sin^2\theta_{3,4}) + 4hl^2\sin\theta_{3,4} = 4hl^2$$

pertanto

$$\det H_U(\theta_{3,4}) = 4h^2l^2 - 4h^2l^2\sin^2\theta_{3,4} \ge 0.$$

Quindi le soluzioni sono stabili quando  $\theta_{3,4} \neq \theta_{1,2}$ .

b) Piccole oscillazioni nel caso mg=2hl. In tal caso gli unici equilibri stabili sono  $\theta_3=\frac{\pi}{6}$  e  $\theta_4=\frac{5\pi}{6}$ . Calcoliamo l'energia cinetica

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \frac{4}{3}\dot{\theta}^2 + 2l\sin\theta \ \dot{x}\dot{\theta}] + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}.$$

La matrice dell'energia cinetica è

$$A = \begin{pmatrix} m & ml\sin\theta\\ ml\sin\theta & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \frac{1}{2}ml\\ \frac{1}{2}ml & m \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana è

$$H_U(\frac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} h & hl \\ hl & 4hl^2 \end{pmatrix}.$$

Le frequenze di piccola oscillazione sono le soluzioni di  $\det(H_U - \omega^2 A) = 0$ .

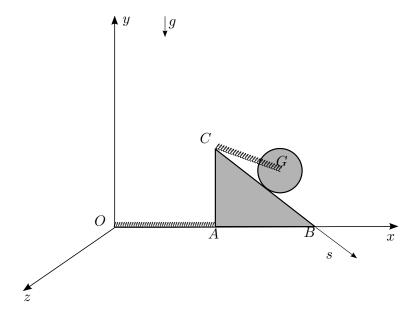


Figura 10.12: esercizio 10.2.10

## 10.2.11 Esercizio

Nel piano verticale Oxy del sistema inerziale Oxyz, y verticale ascendente  $\underline{g} = -g\,\hat{y}, \, g > 0$ , si consideri il sistema costituito da una lamina ABC a forma di triangolo rettangolo isoscele, di lato l e angolo alla base  $\frac{\pi}{4}$ , di massa m, vincolata a scorrere senza attrito sull'asse orizzontale x con il lato AB e da un disco omogeneo di massa m e raggio R che rotola senza strisciare sulla base BC della lamina triangolare. Il vertice A della lamina è collegato all'origine da una molla elastica di costante elastica h > 0 e lunghezza a riposo nulla mentre il baricentro G del disco è collegato al vertice C della lamina da una molla elastica di costante elastica h > 0 e lunghezza a riposo nulla. Si riferisca il sistema alle coordinate  $x = x_A$ , ascissa del vertice A della lamina e  $s = s_K$  ascissa del punto di contatto disco-lamina rispetto ad una ascissa orientata positivamente nella direzione CB avente origine s = 0 nel vertice C.

- a) Determinare l'energia potenziale del sistema, le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
- b) Scrivere l'energia cinetica del sistema e le equazioni di Lagrange del sistema.
- c) Determinare le frequenze di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile (è sufficiente scrivere l'equazione  $p(\omega^2) = 0$  evidenziando i coefficienti delle potenze).
- a) Energia potenziale

$$U = U^{el} + mgy_k + cost = \frac{h}{2}x^2 + \frac{h}{2}(s^2 + R^2) + mg(l - s\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

L'unico equilibrio si ottiene annullando il gradiente di U ed è  $(x^*, s^*) = (0, \frac{mg\sqrt{2}}{h^2})$ . L'hessiano di U nell'equilibrio è  $H_U = Diag[h, h] > 0$ , quindi è stabile per THND.

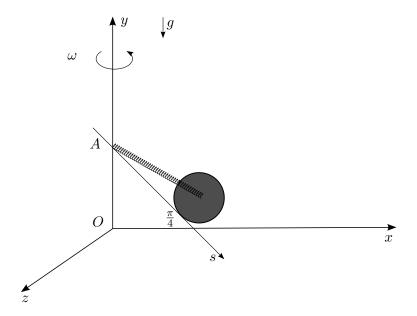


Figura 10.13: esercizio 10.2.12

b) Energia cinetica. Per il puro rotolamento,  $\omega=\frac{\dot{s}}{R},$  mentre  $I_G^z=\frac{mR^2}{2}.$  Vale

$$T = T^{lam} + T^{disco} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

con  $v_G = (\dot{x}_k, \dot{y}_k) = (\dot{x} + \dot{s}\frac{\sqrt{2}}{2}, -\dot{s}\frac{\sqrt{2}}{2})$ . Svolgendo il conto, posto q = (x, s), si trova

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^t A \dot{q}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2m & m\frac{\sqrt{2}}{2} \\ m\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{2}m \end{pmatrix}.$$

Equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 2m\ddot{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}m\ddot{s} + hx = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = 2m\ddot{s} + \frac{\sqrt{2}}{2}m\ddot{x} + hs - mg\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

c) Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(H_U - \omega^2 A) = 0.$$

## 10.2.12 Esercizio

Il riferimento Oxyz, ove y è verticale ascendente, ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno all'asse y rispetto ad un riferimento inerziale. Nel piano Oxy si consideri il sistema costituito da un disco omogeneo massa M e raggio R che rotola senza strisciare su di una guida rettilinea fissa formante un angolo di  $\frac{3\pi}{4}$  con la direzione positiva dell'asse orizzontale x. Il disco è soggetto alla forza di gravità e alla forza elastica dovuta ad una molla lineare tesa tra il baricentro G del disco e il punto di intersezione A tra la guida rettilinea e l'asse verticale g. Volendo studiare il moto

del sistema rispetto al riferimento non inerziale, si introduce la coordinata s ascissa sulla guida, orientata in senso concorde alla gravità e con origine nel punto A, per cui s(A) = 0. Si usi come coordinata lagrangiana l'ascissa  $s = s_K$  del punto di contatto disco-guida.

- a) Scrivere l'energia potenziale del sistema uno-dimensionale e disegnare il ritratto in fase nel piano  $(\dot{s}, s)$  al variare di  $\omega$  nei reali positivi (tre casi).
- b) Scrivere l'energia cinetica, la Lagrangiana del sistema, le corrispondenti equazioni di Lagrange e la linearizzazione del sistema al primo ordine corrispondente attorno ad un equilibrio. Indagare la stabilità dell'equilibrio con il primo metodo.
- c) Determinare la frequenza di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.

#### Soluzione

a) Nel riferimento rotante, il disco è soggetto alla forze elastica, centrifuga e di gravità, tutte conservative. Le componenti Lagrangiane della forza di Coriolis sono nulle (verificarlo per esercizio). Detta h la costante elastica della molla, l'energia potenziale complessiva è

$$U = U^{el} + U^g + U^{cf}$$

svolgendo i conti

$$U(s) = \frac{1}{2}(h - \omega^2 \frac{M}{2})s^2 - \frac{M}{2}(\omega^2 R + g\sqrt{2})s + cost. = \frac{1}{2}as^2 - bs + cost.,$$
$$a = (h - \omega^2 \frac{M}{2}), \quad b > 0.$$

Se  $a \neq 0$  l'energia potenziale è una parabola e l'unico equilibrio è nel vertice  $s^* = b/a$ . Se a = 0, l'energia potenziale è una retta e non vi sono equilibri (il disco è soggetto alla sola forza di gravità. Se  $U''(s^*) = a \neq 0$ , la stabilità si puo' accertare con THND (stabile se a > 0, instabile se a < 0).

1. Il ritratto di fase è come segue:

a > 0: ellissi concentriche di centro  $s^* > 0$  (equilibrio stabile)

a=0: parabole con asse l'asse s traslate orizzontalmente

a < 0: sella (equilibrio instabile) di centro  $s^* < 0$ 

b) Energia cinetica. Dal teorema di Konig e dalla condizione di puro rotolamento  $s=r\theta$  si trova subito che

$$T = \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(I_G + MR^2)\frac{\dot{s}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}M\dot{s}^2 = \frac{1}{2}A\dot{s}^2$$

La lagrangiana L = T - U è immediata. Le equazioni di Lagrange sono

$$A\ddot{s} + as - b = 0$$

che ridotte al primo ordine sono già lineari e si scrivono

$$\dot{s} = v, \qquad \dot{v} = -\frac{a}{A}s + \frac{b}{A}$$

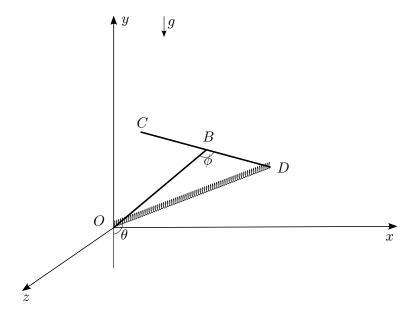


Figura 10.14: esercizio 10.2.13

La matrice  $X'(z^*)$  del sistema linearizzato attorno a  $z^* = (s^*, 0)$  è

$$X'(z^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a}{A} & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-a}{A}}$$

e quindi il primo metodo asserisce l'instabilità dell'equilibrio nel caso a<0 perchè  $Re(\lambda>0)$  e non dice nulla nell'altro caso.

c) La frequenza di piccola oscillazione si determina dall'equazione

$$\det(U''(s^*) - \omega^2 A) = a - \omega^2 A = 0$$

che coincide con la frequenza dell'oscillatore armonico descritto dalle equazioni linearizzate al punto 2.

## 10.2.13 Esercizio

Nel piano Oxy, con y verticale ascendente, di un riferimento inerziale Oxyz, si consideri il sistema soggetto a gravità costituito da due aste omogenee di massa m e lunghezza l. L'asta AB ha l'estremo A vincolato in modo liscio nell'origine, mentre l'asta CD ha il suo punto medio vincolato in modo liscio nell'estremo libero B. Tra gli estremi A e D delle due aste è tesa una molla di costante elastica h e lunghezza a riposo nulla. Si riferisca il sistema all'angolo  $\theta$  tra la direzione negativa dell'asse delle y e il segmento AB, valutato in senso antiorario, e all'angolo  $\phi$  tra il segmento AB e il segmento CD.

a) Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità o instabilità per mezzo dei teoremi visti nel corso giustificando tutti i risultati.

b) Si supponga ora che per mezzo di un ulteriore vincolo liscio si abbia  $\phi \equiv \frac{\pi}{2}$  e che nel punto B agisca una forza di attrito viscoso  $F^B = -kv_B$ . Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema 1–dimensionale risultante e studiarne la stabilità o instabilità per mezzo dei teoremi visti nel corso giustificando tutti i risultati.

(Suggerimento: per studiare l'instabilità puo' essere utile ricavare l'equazione del moto a partire dalla Lagrangiana del sistema. Per scrivere l'energia cinetica, pensare al sistema come ad un corpo rigido con un punto fisso e indicare con  $I_A$  (senza necessariamente calcolarlo) il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse z passante per A).

#### Soluzione

a) Il sistema è soggetto a sole forze conservative. Le configurazioni di equilibrio sono i punti critici dell'energia potenziale  $U(\theta,\phi)=U^g(\theta)+U^{el}(\phi)$  e la loro stabilità o instabilità si puo' accertare con THND. Si ha

$$U(\theta, \phi) = -mg\frac{3}{2}l\cos\theta - \frac{h}{4}l^2\cos\phi$$

Gli equilibri sono le soluzioni di

$$\sin \theta = 0$$
,  $\sin \phi = 0$ .

La matrice Hessiana è

$$H_U = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} mgl\cos\theta & 0\\ 0 & \frac{hl^2}{2}\cos\phi \end{pmatrix}$$

Quindi, applicando THND, l'unica soluzione stabile è P=(0,0), le altre sono instabili.

b) Ora le uniche forze agenti sul sistema 1-dimensionale sono la gravità e la forza viscosa. Le uniche configurazioni di equilibrio sono banalmente  $\theta=0$  e  $\theta=\pi$ . Data la presenza della forza viscosa non possiamo studiare la stabilità con il metodo qualitativo per sistemi 1-dimensionali. La configurazione  $\theta=0$  è stabile per TLD perchè è un minimo dell'energia potenziale

$$U^g(\theta) = -mg\frac{3}{2}l\cos\theta.$$

Per discutere l'equilibrio  $\theta = \pi$  (massimo di  $U^g$ ) dobbiamo usare il primo metodo di Liapunov. L'equazione del moto si ottiene dalle equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial U^g}{\partial \theta} + Q_{\theta}^B.$$

L'energia cinetica è quella di un corpo rigido con un punto fisso A e quindi

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\omega \cdot I_A \omega = \frac{1}{2}I_A \dot{\theta}^2.$$

Calcoliamo  $Q_{\theta}^{B}$ :

$$\delta L = F^B \cdot \delta B = F^B \cdot v_B dt = -kl\dot{\theta}l\dot{\theta}dt = -kl^2\dot{\theta}d\theta = Q_\theta^B d\theta, \qquad Q_\theta^B = -kl^2\dot{\theta}d\theta$$

Pertanto, l'equazione del moto è

$$I_A \ddot{\theta} = mg \frac{3}{2} l \sin \theta - k l^2 \dot{\theta}.$$

La ridotta al primo ordine è

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} = \frac{3lmg}{2I_A} \sin \theta - \frac{kl^2}{I_A} v. \end{cases}$$

La linearizzata in  $(\theta, v) = (\pi, 0)$  è, ponendo  $\delta \theta = \theta - \pi$ ,  $\delta v = v - 0 = v$ 

$$\begin{cases} \dot{\delta}\theta = v, \\ \dot{v} = \frac{3lmg}{2I_A}\delta\theta - \frac{kl^2}{I_A}v. \end{cases}$$

La matrice del sistema lineare è quindi

$$X'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ \frac{3lmg}{2I_A} & -kl^2I_A \end{pmatrix}$$

L'equazione per gli autovalori è

$$\det(X'(0) - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 + \frac{kl^2}{I_A}\lambda - \frac{3mgl}{2I_A} = 0$$

che ha soluzioni reali di segno opposto. Si ha quindi instabilità per il primo metodo.

## 10.2.14 Esercizio

In un sistema inerziale Oxyz una particella P di massa m>0 è vincolata a scorrere senza attrito sulla semiretta x>0. Essa è soggetta alla sola forza conservativa di energia potenziale

$$U(x) = x \ln x$$
.

- 1) Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
- 2) Si supponga ora che il sistema sia soggetto ad un'ulteriore sollecitazione non conservativa di componente lagrangiana

$$Q(x, \dot{x}) = -k\dot{x} + 3e(x - \frac{1}{e})^{2}.$$

Indagare con i teoremi visti nel corso la stabilità degli equilibri determinati al punto 1.

## Soluzione

Il sistema è soggetto a sole forze conservative. Si ha  $U'(x) = \ln x + 1$  che si annulla solo per  $x_{eq} = \frac{1}{e} > 0$ , ove è  $U''(x_{eq}) = \frac{1}{x_{eq}} = e > 0$ , quindi l'equilibrio trovato è stabile per TLD. Aggiungendo la sollecitazione non conservativa, si scrive l'equazione del moto nella forma

$$m\ddot{x} = -U'(x) + Q(x, \dot{x}) = -\ln x - 1 + 3e(x - \frac{1}{e})^2 - k\dot{x}.$$

Si vede che l'unico equilibrio è ancora  $x_{eq} = \frac{1}{e} > 0$ . Il sistema è soggetto ora a forze dissipative  $-k\dot{x}$  e conservative  $W(x) = U(x) - e(x - \frac{1}{e})^3$ . Il TLD, ancora applicabile, mi da condizioni suffcienti per la stabilità. Si ha

$$W''(\frac{1}{e}) = U''(\frac{1}{e}) - 6e(\frac{1}{e} - \frac{1}{e}) = e > 0.$$

quindi l'equilibrio è stabile. Per indagare la stabilitá asintotica da supporre vista la presenza di forze dissipative, devo considerare il sistema al primo ordine linearizzato attorno a  $(x_{eq}, 0)$ . Il sistema nonlineare è

$$\dot{x} = v \tag{10.2}$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}(-U'(x) + Q(x, \dot{x})) \tag{10.3}$$

Introducendo la coordinata deviazione rispetto all'equilibrio  $q = x - x_{eq}$ , il sistema linearizzato si scrive

$$\dot{q} = v, \tag{10.4}$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}(-U''(x_{eq})q - kv) = -\frac{e}{m}q - \frac{k}{m}v,$$
 (10.5)

da cui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{e}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

L'equazione agli autovalori per A è

$$m\lambda^{2} + \lambda k + e = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^{2} - 4em}}{2m}$$

per cui ReSpectA < 0 sempre e si ha stabilità asintotica.

## 10.2.15 Esercizio

Si consideri il sistema costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di egual massa m > 0, vincolati in modo liscio a scorre lungo l'asse orizzontale x di un sistema inerziale Oxyz. Tra l'origine ed il punto  $P_1$  e tra i punti  $P_1$  e  $P_2$  sono tese due molle lineari di costante elastica h > 0 e lunghezza a riposo  $x_0 = 1$ .

- a) Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
- b) Scrivere la lagrangiana linearizzata del sistema attorno ad un equilibrio stabile e determinare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema.

#### Soluzione

Siano  $x_1$  e  $x_2$  le ascisse dei due punti. Energia potenziale

$$U = U^{el}(x_1, x_2) = \frac{h}{2}[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - x_1 - 1)^2]$$

Gli equilibri si ottengono annullando il gradiente di U,

$$U_{x_1} = h(x_1 - 1) - h(x_2 - x_1 - 1) = 0$$
  
 $U_{x_2} = h(x_2 - x_1 - 1) = 0$ 

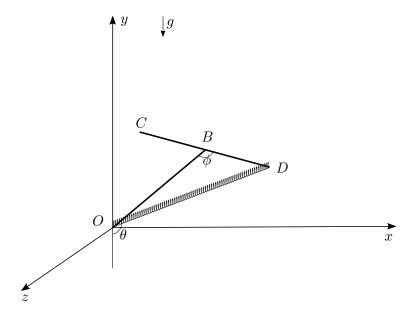


Figura 10.15: esercizio 10.2.16

L'unico equilibrio è  $P^* = (1,2)$ . La matrice Hessiana è

$$H_U = \begin{pmatrix} 2h & -h \\ -h & h \end{pmatrix} \in Sym^+.$$

quindi l'equilibrio trovato è stabile per THND o TLD. L'energia cinetica è una forma quadratica definita positiva

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Introducendo le coordinate deviazioni rispetto all'equilibrio  $q_1 = x_1 - 1$ ,  $q_2 = x_2 - 2$ , la lagrangiana linearizzata è

$$L = \hat{T} - \hat{U} = \frac{1}{2} (\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (q_1, q_2) \begin{pmatrix} 2h & -h \\ -h & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(H_U - \omega^2 A) = \det\begin{pmatrix} 2h - \omega^2 m, -h \\ -h, h - \omega^2 m \end{pmatrix} = 0.$$

Rispettivamente

$$\omega_1^2 = \frac{h}{m}(3 + \frac{\sqrt{5}}{2}), \qquad \omega_2^2 = \frac{h}{m}(3 - \frac{\sqrt{5}}{2}).$$

## 10.2.16 Esercizio

Nel piano verticale Oxy di un riferimento inerziale Oxyz giace un sistema composto di due aste omogenee di massa m e lunghezza l. L'asta OA ha l'estremo O vincolato in modo liscio nell'origine O del riferimento; l'asta BC ha il suo punto medio

vincolato in modo liscio all'estremità A della prima asta. Si riferisca la posizione della prima asta all'angolo  $\theta$  tra la direzione negativa del'asse y e l'asta OA valutato positivamente in senso anti-orario e la posizione della seconda asta all'angolo  $\phi$  tra la direzione OA e la direzione BC, valutato positivamente in senso orario. Tra l'origine O e l'estremo C è tesa una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica h > 0.

- 1) determinare l'energia potenziale del sistema, le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità citando i teoremi appropriati, l'energia cinetica e le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile
- 2) si supponga ora che l'asta BC abbia massa nulla e che il riferimento Oxyz ruoti con velocità angolare uniforme  $\omega$  diretta come l'asse verticale y rispetto agli spazi inerziali. Determinare le configurazioni di equilibrio relativo nel sistema rotante e studiarne la stabilità al variare dei parametri.

#### Soluzione

1) Il sistema è soggetto a sole forze conservative; usando il T. del coseno si ha subito

$$U = U^g + U^{el} = -mg\frac{3}{2}l\cos\theta + \frac{h}{2}|OC|^2 = -mg\frac{3}{2}l\cos\theta - \frac{h}{2}l^2\cos\phi.$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti  $(\theta, \phi)$  ove si annulla  $\nabla U$ :

$$P_1 = (0,0)$$
  $P_2 = (\pi,\pi)$   $P_3 = (0,\pi)$   $P_4 = (\pi,0)$ 

Calcoliamo la matrice hessiana

$$H_U(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} mg\frac{3}{2}l\cos\theta & 0\\ 0 & \frac{h}{2}l^2\cos\phi \end{pmatrix}$$

Usando il THND si accerta che  $P_1$  è stabile mentre gli altri equilibri sono instabili. Energia cinetica. Per la prima asta usiamo la formula dell'energia cinetica per un corpo rigido con un punto fisso:

$$T_{OA} = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2.$$

Per l'asta BC usiamo il teorema di Konig e la formula di composizione delle velocità angolari  $\omega^a = \omega^\tau + \omega^r$  per cui  $\omega^a = (\dot{\theta} - \dot{\phi})\hat{y}$  per la convenzione sul verso positivo dei due angoli. Quindi

$$T_{BC} = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}(\dot{\theta} - \dot{\phi})^2$$

Sommando i due contributi si ha l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2}A(\dot{q}, \dot{q}), \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{17}{12}ml^2 & -\frac{1}{12}ml^2 \\ -\frac{1}{12}ml^2 & \frac{1}{12}ml^2 \end{pmatrix}$$

Per il calcolo delle frequenze di piccola oscillazione si usa la formula  $\det(H_U - \Omega^2 A) = 0$ .

2) Nel sistema non inerziale oltre alla gravità e alla forza elastica agiscono la forza centrifuga e la forza di Coriolis. La forza di Coriolis è nulla negli equilibri; basta quindi calcolare l'energia potenziale centrifuga

$$U^{cf} = -\frac{\omega^2}{2}I_y = -\frac{\omega^2}{2}\frac{ml^2}{12}\sin^2\theta.$$

Calcoliamo gli equilibri

$$U_{\theta} = mg \frac{l}{2} \sin \theta - \omega^2 \frac{ml^2}{12} \sin \theta \cos \theta = 0,$$
  
$$U_{\phi} = h \frac{l^2}{2} \sin \phi = 0.$$

Si vede che oltre agli equilibri precedenti vi sono ora anche le eventuali soluzioni di

$$\cos \theta = \frac{6g}{\omega^2 l}$$

Lo studio della stabilità si esegue come visto sopra.

## 10.2.17 Esercizio

In un riferimento inerziale Oxyz con y verticale ascendente si consideri il sistema giacente nel piano Oxy, costituito da un anello di massa M, raggio R, e centro C, vincolato in modo liscio a ruotare genericamente sull'asse x e da un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio a scorrere sull'anello. Si riferisca il sistema alle coordinate  $x = x_C$  e  $\varphi$ , angolo tra la direzione negativa dell'asse x e il vettore CP, valutato positivamente in senso antiorario. Sul centro C dell'anello agisce una forza  $F = \frac{k}{2}x\hat{x}$ , con k > 0, mentre tra il punto P e l'asse y è tesa una molla di costante elastica k che si mantiene sempre orizzontale.

- 1) Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità sulla base dei teoremi visti nel corso al variare del parametro  $\lambda = mg/kR$ , ove g è l'accelerazione di gravità.
- 2) Si supponga ora che l'anello rotoli senza strisciare. Scrivere l'energia cinetica del sistema e calcolare (a meno della soluzione di un'equazione di secondo grado) le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio (quando è stabile) con  $\varphi = \pi/2$ .

## Soluzione

Le forze agenti sono tutte conservative, di energia potenziale

$$U = U^g + U^{el} + U^F = -mgR\sin\varphi + \frac{k}{2}(x - R\cos\varphi)^2 - \frac{k}{4}x^2.$$

Calcoliamo gli equilibri risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,\varphi) &= k(x-R\cos\varphi)-\frac{k}{2}x=0\\ \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi}(x,\varphi) &= -mgR\cos\varphi+k(x-R\cos\varphi)R\sin\varphi=0 \end{cases}$$

che si riscrive nelle equazioni

$$R\cos\varphi(kR\sin\varphi - mg) = 0, \qquad x = 2R\cos\varphi$$

posto  $\lambda = mg/kR > 0$ , le soluzioni sono, ove esistono,

$$P_1 = (0, \frac{\pi}{2}), \qquad P_2 = (0, \frac{3\pi}{2}),$$
 
$$P_3 = (2R\sqrt{1-\lambda^2}, \arcsin \lambda), \qquad P_4 = (-2R\sqrt{1-\lambda^2}, \pi - \arcsin \lambda)$$

Per la stabilità in presenza di sole forze conservative, possiamo usare THND.

La matrice Hessiana è

$$H_U(x,\varphi) = \begin{pmatrix} k/2 & kR\sin\varphi \\ kR\sin\varphi & f(x,\varphi) \end{pmatrix}, \quad f(x,\varphi) = -kR^2 + 2kR^2\sin^2\varphi + kRx\cos\varphi + mgR\sin\varphi$$

Essendo k/2 sempre positivo, basta valutare f negli equilibri e chiedere det  $H_U > 0$ . Si vede che

$$f(2R\cos\varphi,\varphi) = kR^2 + mgR\sin\varphi$$

 $P_1$  è stabile se  $\lambda > 1$  e instabile se  $\lambda < 1$ , per  $\lambda = 1$  THND non è applicabile

 $P_2$  è instabile sempre per THND

 $P_3, P_4$  ove esistono sono stabili

Energia cinetica. Per il T. di Konig, con  $I_C=MR^2,~\omega^2=\dot{x}^2/R^2$  e  $v_P^2=\dot{x}^2+R^2\dot{\varphi}^2+2R\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}$ 

$$T = T^{P} + T^{A} = \frac{m}{2}v_{P}^{2} + \frac{M}{2}v_{C}^{2} + \frac{1}{2}I_{C}\omega^{2} = \frac{1}{2}[(m+2M)\dot{x}^{2} + mR^{2}\dot{\varphi}^{2} + 2R\sin\varphi\ \dot{x}\dot{\varphi}]$$

Calcoliamo le matrici  $H_U$  e A in  $P_1$  per  $\lambda > 1$ . Si trova

$$H_U(P_1) = \begin{pmatrix} k/2 & kR \\ kR & kR^2 + mgR \end{pmatrix}, \qquad A(P_1) = \begin{pmatrix} m+2M & mR \\ mR & mR^2 \end{pmatrix},$$

Le frequenze di piccola oscillazione sono le soluzioni di  $\det(H_U - \omega^2 A) = 0$ .

## 10.3 Esercizi su sistemi Hamiltoniani e metodo di Routh

## 10.3.1 Esercizio

Nel piano verticale Oxy del sistema inerziale Oxyz, y verticale ascendente  $\underline{g} = -g\,\hat{y}, \ g>0$ , un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare sull'asse x. Un'asta di massa trascurabile e di lunghezza l è incernierata senza attrito per un suo estremo nel baricentro G del disco. Sull'altro suo estremo è solidale un punto materiale P di massa m. Sia x l'ascissa di G, inoltre, sia  $\vartheta$  l'angolo (valutato in senso anti-orario nel semi-spazio z>0) dalla semiretta parallela a y e orientata come  $-\hat{y}$  passante per G alla semiretta per GP.

- Scrivere la Lagrangiana del sistema,
- individuare una ciclicità, determinare l'integrale primo associato e, per scelte di valori iniziali per cui tale integrale primo valga zero, c = 0, studiare il sistema 1-dimensionale ridotto col metodo di Routh;
- individuarne un equilibrio stabile e determinarne la frequenza di piccola oscillazione

### 10.3.2 Esercizio

Si consideri, per fissati a > 0 e  $\phi \in \mathcal{R}$ , la seguente trasformazione lineare di  $T^*\mathcal{R}^1 (= \mathcal{R}^2)$  in sè:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\phi & a\sin\phi \\ -a\sin\phi & a\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

Dimostrare che è una trasformazione canonica indipendente dal tempo di valenza c=1.

### Soluzione

$$J^T \mathbb{E} J = \begin{pmatrix} a\cos\phi & -a\sin\phi \\ a\sin\phi & a\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\phi & a\sin\phi \\ -a\sin\phi & a\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin\phi & a\cos\phi \\ -a\cos\phi & a\sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\phi & a\sin\phi \\ -a\sin\phi & a\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{E}$$

## 10.3.3 Esercizio

Due punti materiali di massa unitaria sono liberi di muoversi sull'asse delle x di un riferimento inerziale. Dette  $x_1$  e  $x_2$  le coordinate dei due punti, l'energia potenziale della forza che agisce tra i due punti è

$$U(x_1, x_2) = \frac{a}{(x_1 - x_2)^2} + b(x_1^2 + x_2^2)$$

Dopo aver scritto l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema nelle nuove coordinate

$$R = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad r = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

si trovi il moto del sistema per fissate condizioni iniziali a meno di inversione di funzioni e risoluzione di integrali con il metodo di Hamilton-Jacobi.

#### Soluzione

Nelle nuove coordinate (R, r) la lagrangiana del sistema è

$$L(r,\dot{R},\dot{r}) = \frac{1}{2}(2\dot{R}^2 + 2\dot{r}^2) - \frac{a}{4r^2} - 2br^2 - 2bR^2$$

e l'Hamiltoniana corrispondente, separabile, si scrive

$$H = H_R + H_r = \frac{1}{4}p_R^2 + 2bR^2 + \frac{1}{4}p_r^2 + \frac{a}{4r^2} + 2br^2.$$

Cerco una funzione generatrice nella forma

$$S(t, R, r, \tilde{p}_R, \tilde{p}_r) = -t(\tilde{p}_R + \tilde{p}_r) + W_R(R, \tilde{p}_R) + W_r(r, \tilde{p}_r)$$

pertanto l'equazione di H-J si separa nelle due equazioni

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial W_R}{\partial R}\right)^2 + 2bR^2 = \tilde{p}_r, \qquad \frac{1}{4}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{a}{4r^2} + 2br^2 = \tilde{p}_r$$

di immediata soluzione

$$W_R = \pm 2 \int \sqrt{\tilde{p}_R - 2bR^2} dR, \qquad W_r = \pm 2 \int \sqrt{\tilde{p}_r - 2bR^2 - \frac{a}{4r^2}} dr$$

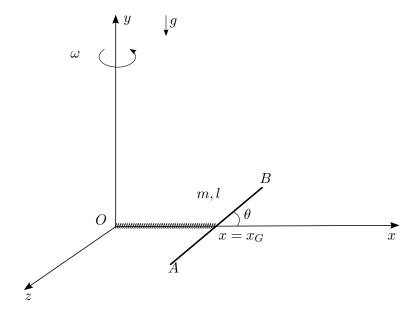


Figura 10.16: esercizio 10.3.4

Il moto si ottiene, a meno di quadrature dalla trasformazione canonica

$$\tilde{r} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_r} = -t + \frac{\partial W_r}{\partial \tilde{p}_r}, \quad \tilde{R} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_R} = -t + \frac{\partial W_R}{\partial \tilde{p}_R}$$

$$p_r = \frac{\partial W_r}{\partial r}, \qquad p_R = \frac{\partial W_R}{\partial R}.$$

## 10.3.4 Esercizio

 $\mathbf{e}$ 

Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza l e massa m è vincolata a muoversi nel piano Oxy con y verticale ascendente di un riferimento Oxyz e mantenendo il suo baricentro G sull'asse x. Tra l'origine O e il baricentro G è tesa una molla di costante elastica h. Si riferisca il sistema alle coordinate lagrangiane  $(x, \theta)$ , rispettivamente ascissa del baricentro G e angolo formato dal segmento AB con la direzione positiva dell'asse x, valutato positivamente in senso antiorario. Il riferimento Oxyz ruota con velocità angolare costante  $\omega$  diretta come l'asse y rispetto agli spazi inerziali.

 Si scriva la Lagrangiana del sistema nel riferimento rotante e si determini il moto del sistema a meno di quadrature con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Soluzione Le forze agenti sul sistema sono la gravità (che ha effetto nullo dal momento che il baricentro rimane ad altezza costante), la forza elastica e le forze apparenti. Di queste, la forza centrifuga è conservativa e la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle in virtù del fatto che i vettori  $\omega$ , v  $\delta OP$  sono complanari

$$\delta W^{cor} = \int_0^l F^{cor}(s) \cdot \delta OP(s) ds = \int_0^l -2\omega \wedge v(s) \cdot w(s) ds \equiv 0.$$

La lagrangiana è allora del tipo L = T - U ove  $U = U^{el} + U^{cf}$  e in particolare

$$T(\dot{x},\dot{\theta}) = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}\Omega \cdot I_G\Omega = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

e, usando il Teorema di Steiner per calcolare  $I_G^y$ 

$$U(x,\theta) = U^{el} + U^{cf} = \frac{h}{2}x^2 - \frac{1}{2}I_G^y\omega^2 = \frac{h}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}[mx^2 + \frac{ml^2}{12}\cos^2\theta].$$

L'hamiltoniana del sistema ha la forma  $H=\frac{1}{2}(A^{-1}p,p)+U$  ove A è la matrice dell'energia cinetica, in questo caso diagonale. Si ha quindi

$$H(x,\theta,p_x,p_\theta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{p_x^2}{m} + \frac{12}{ml^2} p_\theta^2 \right] + \frac{h}{2} x^2 - \frac{\omega^2}{2} \left[ mx^2 + \frac{ml^2}{12} \cos^2 \theta \right]$$

e si riconosce che abbiamo un sistema hamiltoniano separabile  $H = H_x(x, p_x) + H_{\theta}(\theta, p_{\theta})$ . Controlliamo

$$\frac{\partial H_x}{\partial p_x} = \frac{p_x}{4m} \neq 0 \quad \text{se } p_x \neq 0, \quad \frac{\partial H_\theta}{\partial p_\theta} = \frac{3p_x}{ml^2} \neq 0 \quad \text{se } p_\theta \neq 0.$$

La funzione generatrice, dalla teoria svolta, è del tipo

$$S(x, \theta, p_x, p_\theta, t) = -(P_\theta + P_x)t + W_x(x, P_x) + W_\theta(\theta, P_\theta)$$

e l'equazione di Hamilton-Jacobi si disaccoppia in

$$\frac{1}{2m}(\frac{\partial W_x}{\partial x})^2 + \frac{1}{2}(h - m\omega^2)x^2 = P_x$$

$$\frac{6}{ml^2} \left(\frac{\partial W_{\theta}}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \cos^2 \theta \omega^2 = P_{\theta}$$

che si integra senza difficoltà

$$W_x(x, P_x) = \int_{x_0}^x \sqrt{2m[P_x - \frac{1}{2}(h - m\omega^2)\xi^2]} d\xi$$

$$W_{\theta}(\theta, P_{\theta}) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{ml^2}{6} [P_{\theta} + \frac{ml^2 \omega^2}{24} \cos^2 \xi)} d\xi.$$

Infine, le equazioni del moto a meno di quadrature sono

$$p_x = \frac{\partial W_x}{\partial x}, \qquad p_\theta = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}$$

$$X = \frac{\partial S}{\partial P_x} = -t + \frac{\partial W_x}{\partial P_x}, \qquad \Theta = \frac{\partial S}{\partial P_\theta} = -t + \frac{\partial W_\theta}{\partial P_\theta}.$$

# Conclusione

Il materiale di queste Note copre gli argomenti di base di un corso introduttivo di meccanica Lagrangiana e Hamiltoniana. Non vi è quindi in esse nulla di originale anzi, alcune parti sono qui solo abbozzate e avrebbero bisogno di una trattazione più approfondita alla quale ho rinunciato per limiti di tempo. Ho pensato pero' di fare una cosa utile nel riunire tutta la materia in un'unico scritto invece di rinviare gli studenti – con il rischio di una maggior frammentazione nello studio – ai molti classici manuali di Meccanica ove i vari argomenti sono trattati con più talento e profondità. Gli studenti sono caldamente invitati a consultare tali testi e anche le dispense dei miei più anziani colleghi e maestri del Dipartimento di Matematica con la calma che deriva dall'aver superato l'esame. Il secondo motivo che mi ha spinto a scrivere queste note è la convinzione di non poter capire e spiegare un argomento senza aver prima rifatto per bene tutti i conti e le dimostrazioni che esso contiene. Questo è il banale consiglio che mi sento di dare a chi affronta un esame. Sarò grato a quanti vorranno segnalarmi errori o difficoltà di interpretazione del testo.

19 febbraio 2016 M.F.