

## QUESITI DI AUTOVALUTAZIONE

### Esercizi

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - y + x^2 \\ \dot{y} &= x - y - xy \end{cases}$$

studiare la stabilità dell'origine con il metodo spettrale e dire se  $W(x, y) = x^2 + y^2$  è funzione di Lyapunov per l'equilibrio.

2. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + 2xy \\ \dot{y} &= x - x^2 \end{cases}$$

determinare gli equilibri e indagare la stabilità con i metodi visti nel corso. Dire se

$$W(x, y) = \frac{y^2}{2} + \phi(x) = \frac{y^2}{2} - \frac{3x}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8} \log(1 + 2x)$$

è integrale primo e se può essere funzione di Lyapunov per un equilibrio.

3. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 2y - xz \\ \dot{y} &= -2x - y \\ \dot{z} &= -2z + x^2 \end{cases}$$

determinare gli equilibri e indagare la stabilità con i metodi visti nel corso. Dire se  $W(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  può essere funzione di Lyapunov per un equilibrio.

4. Tracciare il ritratto in fase (insieme delle orbite) di  $\ddot{x} = x^3$

5. Studiare gli equilibri e stabilità di

$$\ddot{x} = -x + \alpha x^2 - k\dot{x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad k > 0$$

L'energia totale  $E = T + U$  è funzione di Lyapunov per la stabilità asintotica dell'origine?

6. Studiare equilibri, stabilità e ritratto in fase del sistema  $\ddot{x} = -U'(x)$  al variare del parametro  $\Omega$  ove

$$U(x) = -\frac{g}{R} \cos x - \frac{\Omega^2}{2} \sin^2 x$$

### Teoria

1. dare la definizione di equilibrio, di equilibrio stabile e asintoticamente stabile
2. dare la definizione di orbita e di integrale primo
3. legame tra integrali primi e derivata di Lie
4. scrivere la tangente alle orbite di  $\ddot{x} = f(x)$
5. Dimostrare la relazione area-periodo
6. Dimostrazione del teorema di Lyapunov
7. Come varia la stabilità di un equilibrio di un sistema meccanico con l'aggiunta di viscosità ?
8. Deduzione dell'equazione radiale nei moti centrali
9. Enunciato e dimostrazione del teorema di conservazione dell'energia
- 10 Deduzione della formula di Galileo e di Coriolis nella Cinematica relativa
- 11 Teorema di Konig, equazioni cardinali