Cinematica Rigida e Relativa

Marco Favretti

April 14, 2011

1 Richiami sulle trasformazioni lineari

Sia V spazio vettoriale di dimensione n. Ove necessario, distingueremo il vettore $\mathbf{u}$ di V dall'n-upla u delle sue componenti rispetto ad una base data di V. Vale allora

Proposizione 1.1 *Siano e_i^*, e_i due basi di V, dette rispettivamente base fissa e base mobile. Allora esiste unica un'applicazione lineare $A \in End(V)$ tale che*

$$e_i = Ae_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Nel seguito supporremo sempre che e_i^* e e_i siano basi *ortonormali*, ovvero $e_i \cdot e_j = e_i^* \cdot e_j^* = \delta_{ij}$; sia

$$\mathcal{A}_{ij} = e_i^* \cdot e_j = e_i^* \cdot Ae_j^*$$

la matrice le cui colonne sono le componenti dei vettori e_i nella base e_i^*. Sia $\mathcal{A}^T$ la trasposta di $\mathcal{A}$. Vale allora

Proposizione 1.2 *Se $\mathbf{u}$ ha componenti $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ nella base* fissa*, allora*

i) le componenti di $\mathbf{u}$ nella base mobile *e_i sono*

$$u = \mathcal{A}^T u^*,$$

ii) le componenti del vettore trasformato $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$ nella base fissa *e_i^* sono*

$$v = \mathcal{A}u^*.$$

iii) la matrice $\mathcal{A}$ è ortogonale, ovvero $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T$.

Dimostrazione. Dimostriamo i)

$$u_i = \mathbf{u} \cdot e_i = \sum_j u_j^* e_j^* \cdot e_i = \sum_j \mathcal{A}_{ji} u_j^* = (\mathcal{A}^T u^*)_i$$

dimostriamo *ii*)

$$v_i = A\mathbf{u} \cdot e_i^* = A(\sum_j u_j^* e_j^*) \cdot e_i^* = \sum_j u_j^* A e_j^* \cdot e_i^* = \sum_j \mathcal{A}_{ij} u_j^* = (\mathcal{A}u^*)_i.$$

dimostraimo iii)

$$(\mathcal{A}^T\mathcal{A})_{ij} = \sum_{k=1}^n (\mathcal{A}^T)_{ik}\mathcal{A}_{kj} = \sum_{k=1}^n \mathcal{A}_{ki}\mathcal{A}_{kj} = \sum_{k=1}^n (e_k^* \cdot e_i)(e_k^* \cdot e_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{ij}.$$

□

Da $\mathcal{A}^T\mathcal{A} = \mathbb{I}$, segue che $\det(\mathcal{A}^T\mathcal{A}) = (\det \mathcal{A})^2 = 1 \ \Rightarrow |\det \mathcal{A}\ | = 1$. Come è noto, il gruppo delle matrici ortogonali $O(n)$ si divide in due componenti (topologicamente sconnesse); la componente connessa all'identità costituisce il sottogruppo speciale ortogonale (delle rotazioni proprie se $n = 3$) $SO(n)$, l'altra individua le riflessioni (non formano un sottogruppo) caratterizzati da:

$$\mathcal{A} \in SO(n) \Rightarrow \det \mathcal{A} = 1,\ \mathcal{A} \in O(n) \setminus SO(n) \Rightarrow \det \mathcal{A} = -1.$$

2 Cinematica rigida

2.1 Velocità angolare

Ci specializziamo ora al caso dello spazio euclideo tridimensionale. Indichiamo con $\mathcal{E}_3$ lo spazio vettoriale tridimensionale dotato di un prodotto scalare definito positivo. Sia (O, e_i^*), $i = 1, 2, 3$, base ortonormale di $\mathcal{E}_3$, detta terna fissa. Data un'altra base ortonormale (O, e_i) di $\mathcal{E}_3$, detta terna mobile, indichiamo con R l'applicazione lineare che manda e_i^* in e_i e con $\mathcal{R}$ la matrice delle componenti dei versori e_i rispetto a e_i^*:

$$\mathcal{R}_{ij} := e_i^* \cdot e_j = \cos(e_i^*, e_j).$$

Sia data una curva liscia (basta C^1) $t \mapsto \mathcal{R}(t) \in SO(3)$, oppure, è equivalente, $t \mapsto \mathcal{R}(t) \in \mathcal{O}(3)$ con $\mathcal{R}(0) = \mathbb{I}$; rimane così definito il moto della terna $(O, e_i(t))$, necessariamente ortonormale, che diremo mobile, rispetto alla terna fissa.

Sia $\mathbf{u}$ un vettore avente componenti costanti u^* nella base fissa. Allora, per (1)

$$\mathbf{u}(t) = R\mathbf{u}$$

è un vettore solidale alla base mobile, ovvero ha componenti costanti in tale base. Per *ii*), le componenti di $\mathbf{u}(t)$ nella base *fissa* sono

$$u^*(t) = \mathcal{R}(t)u^*.$$

Le loro derivate sono le componenti nella base fissa del vettore $\dot{\mathbf{u}}$ che esprime la velocità di $\mathbf{u}$ rispetto alla base fissa. Esse sono quindi

$$(\dot{u})^*(t) = \dot{\mathcal{R}}(t)u^* = \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^{-1}u^*(t) = \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T u^*(t) \tag{2}$$

Se voglio trovare le componenti di $\dot{\mathbf{u}}$ nella base mobile uso i) e il fatto che $\mathcal{R}$ è ortogonale

$$\dot{u}(t) = \mathcal{R}^T(\dot{u})^* = \mathcal{R}^T\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^{-1}u^*(t) = \mathcal{R}^T\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T u^*(t) = \mathcal{R}^T\dot{\mathcal{R}}u(t). \tag{3}$$

Derivando la relazione $\mathcal{R}\mathcal{R}^T = \mathcal{R}^T\mathcal{R} = \mathbb{I}$ rispetto al tempo, ad esempio

$$\dot{\mathcal{R}}^T\mathcal{R} + \mathcal{R}^T\dot{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}^T\dot{\mathcal{R}})^T + \mathcal{R}^T\dot{\mathcal{R}} = 0,$$

si vede subito che le matrici

$$\Omega_f = \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T, \qquad \Omega_m = \mathcal{R}^T\dot{\mathcal{R}}$$

sono antisimmetriche: $\Omega + \Omega^T = 0$. Le relazioni (2) e (3) permettono di esprimere, nella base fissa o nella base mobile, le componenti del vettore velocità (ovviamente velocità rispetto alla base fissa) di un vettore solidale alla base mobile

$$(\dot{u})^* = \Omega_f u^*, \qquad \dot{u} = \Omega_m u.$$

In dimensione 3, esse costituiscono la rappresentazione, rispettivamente nella base fissa e mobile di un vettore ω, detto velocità angolare. Vale infatti

$$\Omega_f = \mathcal{R}\Omega_m\mathcal{R}^T.$$

Teorema 2.1 (di rappresentazione degli operatori antisimmetrici di $\mathcal{E}_3$) *Per ogni matrice A antisimmetrica esiste un unico vettore $\omega \in \mathcal{E}_3$ tale che*

$$Av = \omega \wedge v, \qquad \forall\ v\ \in \mathcal{E}_3 :$$

Dimostrazione. L'operatore

$$\omega(v) := \omega \wedge v$$

è lineare e antisimmetrico poichè la matrice Ω_{ij} ad esso associata è antisimmetrica:

$$\Omega_{ij} := e_i \cdot \omega(e_j) = e_i \cdot \omega \wedge e_j = e_j \cdot e_i \wedge \omega = -e_j \cdot \omega \wedge e_i = -\Omega_{ji}.$$

Al variare di ω in $\mathcal{E}_3$, gli operatori lineari $\omega(\cdot)$ definiscono un sottospazio S di dimensione 3 dello spazio vettoriale $Skew(3)$ degli operatori antisimmetrici di $\mathcal{E}_3$. Ora, $Skew(3)$ è sottospazio (varietà lineare) di $M(3, \mathcal{R})$, spazio vettoriale delle matrici 3×3 su $\mathcal{R}$, isomorfo a $\mathcal{E}_3$, definito dalle 6 equazioni (vincoli)

$$Skew(3) = \{A \in M(3, \mathcal{R}) : A_{ij} + A_{ji} = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3\}.$$

Ma allora $\dim Skew(3) = \dim M(3,\mathcal{R}) - 6 = 9 - 6 = 3 = \dim S$, pertanto $S \equiv Skew(3)$. $\square$

L'unico vettore ω^* (risp. ω) associato ad Ω_f (risp. Ω_m) in modo che

$$\omega^* \wedge u = \Omega_f u, \qquad \omega \wedge u = \Omega_m u \quad \forall\, u \in \mathcal{E}_3$$

è detto rappresentazione della *velocità angolare* del moto $t \mapsto R(t)$ nella terna fissa (risp. terna mobile):

$$\omega = \sum_i \omega_i^* e_i^* = \sum_i \omega_i e_i.$$

Si osservi che ω è vettore libero, cioè non è definito il suo punto di applicazione; la distinzione tra la rappresentazione della velocità angolare del moto nella terna fissa (velocità angolare nello spazio) e nella terna mobile (velocità angolare nel corpo) è utile nella teoria del Corpo Rigido.

Per non appesantire l'esposizione, in quanto segue indichiamo semplicemente con Ω la matrice Ω_m

2.1.1 Formule di Poisson

Dalla (3) per $v = e_i$ si hanno subito le Formule di Poisson:

$$\dot{e}_i = \Omega e_i = \omega \wedge e_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Talvolta è utile esprimere ω in funzione degli e_i e delle loro derivate temporali: da

$$e_i \wedge \dot{e}_i = e_i \wedge (\omega \wedge e_i) = \omega - (e_i \cdot \omega) e_i,$$

sommando su i

$$\sum_{i=1}^{3} e_i \wedge \dot{e}_i = 3\omega - \sum_{i=1}^{3} (e_i \cdot \omega) e_i = 2\omega$$

si ha

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} e_i \wedge \dot{e}_i.$$

Esempio 1 (Rotazioni piane). Supponiamo che nel moto della terna (O, e_i) rispetto a (O, e_i^*) risulti $e_3^* \equiv e_3$ per ogni t. Allora, detto $\vartheta = \vartheta(t)$ l'angolo tra e_1^* ed $e_1(t)$, valutato in senso antiorario, la matrice $\mathcal{R} \in SO(3)$ è data da

$$\mathcal{R}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\Omega = \mathcal{R}^T\dot{\mathcal{R}}$ risulta essere

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\vartheta} & 0 \\ \dot{\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

antisimmetrica, come richiesto. Il vettore ω ad essa univocamente associato imponendo la condizione $\omega \wedge v = Av, \quad \forall v \in \mathcal{E}_3$ risulta essere $\omega = \dot{\vartheta} e_3 = \dot{\vartheta} e_3^*$ (la facile verifica è lasciata allo studente), ovvero la velocità angolare è un vettore libero ortogonale al piano per (e_2, e_1). Si noti che in questo caso particolare, le rappresentazione della velocità angolare nella terna fissa e mobile sono uguali.

2.1.2 Moti Rigidi

Sia $\mathcal{S}$ un sistema di n punti materiali. Il moto di $\mathcal{S}$ è descritto, rispetto ad una terna (O^*, e_l^*) di $\mathcal{E}_3$ dalle n funzioni $t \mapsto O^*P_i(t)$ a valori in $\mathbb{R}^3$; O^*P_i è detto vettore posizione del punto P_i.

Definizione 2.1 *Il moto di $\mathcal{S}$ è rigido se la distanza tra ogni coppia di punti di $\mathcal{S}$ non varia nel tempo.*

Se in $\mathcal{S}$, sistema in moto rigido, è possibile individuare almeno tre punti non allineati, è anche possibile associare ad $\mathcal{S}$ una terna (O, e_l) *solidale* ad $\mathcal{S}$, nel senso che le componenti dei vettori posizione rispetto alla terna solidale OP_i sono costanti nella terna solidale. Risulta allora, per $i, j = 1, \ldots n$

$$P_iP_j = OP_j - OP_i = \sum_{k=1}^{3} u_k e_k.$$

Possiamo ora applicare le formule precedenti che esprimono la derivata temporale dei vettori solidali ottenendo

$$\dot{u} = \frac{d}{dt}P_iP_j = \frac{d}{dt}OP_j - \frac{d}{dt}OP_i = v_j - v_i = \omega \wedge u = \omega \wedge P_iP_j$$

ove ora le v_i, v_j hanno il significato di velocità dei punti P_i rispetto alla terna (O^*, e_l^*) e ω è la velocità angolare del moto di (O, e_l) rispetto a (O^*, e_l^*). La relazione precedente è nota come *Formula fondamentale dei moti rigidi*:

$$v_j = v_i + \omega \wedge P_iP_j, \qquad i, j = 1, \ldots n \tag{4}$$

ove tutte le quantità che vi compaiono sono espresse nel riferimento (O, e_l). Scambiando il ruolo delle due terne si deduce subito che la forma della (4) è indipendente dal riferimento.

2.1.3 Atti di moto

Consideriamo, ad esempio, in un istante t fissato, l'insieme dei vettori velocità degli (infiniti) punti OP della terna (O, e_i) solidale ad un sistema $\mathcal{S}$ in moto rigido. Tale distribuzione di vettori *applicati* $OP \mapsto (OP, v_P)$, che possiamo anche pensare come assegnata, e quindi svincolata dal moto di un certo sistema $\mathcal{S}$, è detta Atto di Moto.

L'atto di moto $\mathcal{A}$ è detto *rigido* se esiste ω tale che vale la formula fondamentale dei moti rigidi

$$v_P = v_Q + \omega \wedge PQ, \qquad \forall P, Q$$

I seguenti sono casi particolari di Atti di Moto rigido:

- *elicoidale*, se esiste una retta r i cui punti hanno velocità parallela alla retta,
- *rotatorio*, se esiste un punto Q tale che $v_Q = 0$ (e allora $v_P = \omega \wedge PQ$),
- *traslatorio*, se per ogni coppia di punti P, Q si ha $v_P = v_Q$ (e allora $\omega = 0$),
- *piano*, se esiste un piano π solidale al moto che si muove mantenendosi parallelo ad un piano π_0 fisso (e allora $v_P \in \pi \quad \forall P$).

Teorema 2.2 (di Mozzi) *Ogni Atto di Moto rigido è elicoidale*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A}$ Atto di Moto rigido. Se moltiplichiamo scalarmente per ω entrambi i membri della formula fondamentale dei moti rigidi si ha $v_P \cdot \omega = v_P \cdot \omega \quad \forall P, Q$. Rimane così univocamente determinato il vettore componente della velocità di $\mathcal{A}$ lungo ω:

$$\tau = \frac{(v_P \cdot \omega)}{\omega^2}\omega$$

mentre, sempre dalla formula fondamentale dei moti rigidi, i vettori componente della velocità perpendicolare ad ω verificano

$$\tau + v_P^\perp = \tau + v_Q^\perp + \omega \wedge QP, \qquad \Rightarrow \qquad v_P^\perp = v_Q^\perp + \omega \wedge QP.$$

Supponiamo esista un punto Q tale che $v_Q^\perp = 0$. La relazione appena trovata dice che tutti i punti P della retta per Q e parallela ad ω hanno $v_P^\perp = 0 + \omega \wedge QP = 0$, ovvero che esiste una retta r i cui punti hanno velocità, uguale a τ in questo caso, parallela alla retta, quindi l'Atto di Moto rigido è elicoidale.

Cerchiamo Q. Esso è individuato dal vettore OQ soddisfacente alla condizione

$$0 = v_Q^\perp = v_O^\perp + \omega \wedge OQ, \qquad i.e. \qquad v_O^\perp = \omega \wedge QO$$

con $\omega \neq 0$ e $v_O^\perp, \omega$ dati. Tale problema è già stato risolto nel Cap. Vettori Applicati delle Dispense. Si ha $OQ = (\omega \wedge v_O)/\omega^2$. L'equazione dell'asse istantaneo di rotazione (retta r) è quindi

$$\lambda \mapsto OQ + \lambda\tau = \frac{\omega \wedge v_O}{\omega^2} + \lambda\frac{\omega \cdot v_P}{\omega^2}\omega,$$

luogo di punti aventi velocità minima (pari a τ). □

Osservazioni. 1. Sia $\mathcal{A}$ Atto di Moto rigido piano. Siano P',Q' le proiezioni di P, Q su π. Da $v_{P'} = v_{Q'} + \omega \wedge P'Q'$, essendo $P'Q' \in \pi$, $v_{P'} - v_{Q'} \in \pi$, si ha che $\omega \perp \pi$. L'asse istantaneo di rotazione incontra π in un punto Q^* detto centro istantaneo di rotazione.

2. Verificare che se $\mathcal{A}$ è (rigido) rotatorio si ha $\tau = 0$, se $\mathcal{A}$ è (rigido) traslatorio risulta $\omega = 0$.

Esempio 2 (Moto di puro rotolamento di un disco rigido su di una guida rettilinea).

Un disco omogeneo D di raggio R e centro G rotola sull'asse per e_1^* di un riferimento $(O^*, e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ mantenendosi nel piano (e_1^*, e_2^*). Il disco (sistema rigido) definisce il moto (rigido piano) di una terna (G, e_1, e_2, e_3) solidale al disco.

Il moto del disco è di *puro rotolamento* se la velocità del punto $c \in D$ che all'istante t coincide con il punto di contatto C^* tra il disco e la guida è nulla per ogni t. Questo equivale a dire che l'atto di moto (rigido piano) definito dal moto della terna solidale è rotatorio attorno al punto C^*, centro istantaneo di rotazione. Abbiamo visto (Esercizio 1) che la velocità angolare associata al moto piano della terna solidale è $\omega = \dot{\vartheta} e_3 = \dot{\vartheta} e_3^*$. Usando la formula fondamentale dei moti rigidi, ricaviamo la velocità del centro G del disco

$$v_G = v_C + \omega \wedge CG = 0 + \dot{\vartheta} e_3^* \wedge R e_2^* = -R\dot{\vartheta} e_1^*,$$

parallela ad e_1^*. Di solito l'angolo tra e_1^* e e_1 è valutato in senso orario, pe cui $v_G = R\vartheta e_1^*$. Integrando quest'ultima relazione si ottiene lo spazio percorso dal centro G lungo la guida

$$s(t) = x_G(t) = R\vartheta(t) + R\vartheta(t_0).$$

3 Cinematica relativa

Nello studio della forma delle equazioni del moto di un sistema in relazione alla terna di versori scelta come base di $\mathcal{E}_3$, le terne via via introdotte sono dette sistemi di riferimento o osservatori. Sia $T^a = (O^*, e_i^*)$ sistema di riferimento (solidale ad uno spazio) inerziale e $T^r = (O, e_i)$ sistema di riferimento relativo. Sia ω^τ la velocità angolare del moto di T^r rispetto a T^a; ω^τ è detta velocità angolare di trascinamento.

Ricaviamo l'espressione delle grandezze cinematiche (velocità, accelerazione) del moto di un sistema $\mathcal{S}$ di n punti materiali P_i nelle terne T^a e T^r. Iniziamo scrivendo la relazione, valida per ogni P_i

$$O^* P_i(t) = O^* O(t) + OP_i(t) \tag{1}$$

ovvero (indici ripetuti qui e nel seguito sottintendono una sommatoria da 1 a 3)

$$x_i^*(t) e_i^* = x_{Oi}^*(t) e_i^* + x_i(t) e_i(t).$$

Tale relazione e la sua derivazione rispetto al tempo si basano su di un'ipotesi che supporremo sempre verificata

Postulato(della Meccanica Classica o Galileiana) *Lunghezze dei vettori ed intervalli di tempo sono indipendenti dall'osservatore*

Derivando la (1) rispetto a t

$$v_P^a = \dot{x}_i^* e_i^* = \dot{x}_{Oi}^* e_i^* + \dot{x}_i e_i + x_i \dot{e}_i$$

e ricordando le formule di Poisson $\dot{e}_i = \omega \wedge e_i$, ricaviamo la relazione (Formula di Galileo) tra la velocità assoluta v^a e relativa $v^r = \dot{x}_i e_i$

$$v_P^a = v_P^r + v_P^\tau \tag{2}$$

ove

$$v_P^\tau = v_O^a + \omega^\tau \wedge OP$$

è detta velocità di trascinamento. Essa è la velocità del punto P' sovrapposto a P e *solidale* al moto di T^r.

Deriviamo la (2) per ottenere la relazione tra le accelerazioni, usando ancora le formule di Poisson

$$\frac{d}{dt} v_P^r = a_P^r + \omega^\tau \wedge v_P^r$$

$$\frac{d}{dt} v_P^\tau = \frac{d}{dt}(v_O^a + \omega^\tau \wedge OP) = a_O^a + \dot{\omega}^\tau \wedge OP + \omega^\tau \wedge (v_P^r + \omega^\tau \wedge OP)$$

Pertanto

$$a_P^a = \frac{d}{dt} v_P^a = a_O^a + \dot{\omega}^\tau \wedge OP + 2\omega^\tau \wedge v_P^r + \omega^\tau \wedge (\omega^\tau \wedge OP)$$

che si compendia nella Formula di Coriolis

$$a_P^a = a_P^r + a_P^\tau + a_P^c$$

ove i termini al secondo membro sono detti rispettivamente accelerazione relativa, di trascinamento e complementare o di Coriolis e valgono

$$a_P^r = \ddot{x}_i e_i, \qquad a_P^\tau = a_O^a + \dot{\omega}^\tau \wedge OP + \omega^\tau \wedge (\omega^\tau \wedge OP), \qquad a_P^c = 2\omega^\tau \wedge v_P^r$$

Anche ora a_P^τ ha il significato di accelerazione del punto P' sovrapposto a P e solidale al moto di T^r.

Osservazione. La velocità angolare ω^τ del moto (di trascinamento) di T^r rispetto a T^a è un vettore libero. La sua derivata temporale gode della proprietà seguente: da

$$\omega^\tau = \omega_i^* e_i^* = \omega_i e_i,$$

usando ancora le formule di Poisson, si trova

$$\frac{d}{dt}\omega^\tau = \dot{\omega}_i^* e_i^* = \dot{\omega}_i e_i + \omega_i \dot{e}_i = \dot{\omega} + \omega \wedge \omega = \dot{\omega}_i e_i.$$

Proposizione 3.1 *Se il moto di $\mathcal{S}$ è rigido rispetto a T^a, ovvero esiste un vettore ω^a tale che*

$$v^a_{P_j} = v^a_{P_i} + \omega^a \wedge P_iP_j, \qquad \forall i, j = \ldots n,$$

allora il moto di $\mathcal{S}$ è rigido rispetto ad ogni T^r .

Dimostrazione. Applichiamo la formula di Galileo al moto di P_i, P_j

$$\begin{array}{rcl} v^a_{P_i} & = & v^\tau_{P_i} + v^r_{P_i} = v^a_O + \omega^\tau \wedge OP_i + v^r_{P_i} \\ v^a_{P_j} & = & v^\tau_{P_j} + v^r_{P_j} = v^a_O + \omega^\tau \wedge OP_j + v^r_{P_j} \end{array}$$

e sottraiamo membro a membro le relazioni precedenti

$$v^r_{P_j} - v^r_{P_i} = v^a_{P_j} - v^a_{P_i} + \omega^\tau \wedge (OP_j - OP_i) = \omega^a \wedge P_iP_j + \omega^\tau \wedge P_jP_i = (\omega^a - \omega^\tau) \wedge P_iP_j$$

ovvero, il moto di $\mathcal{S}$ rispetto a T^r è rigido con $\omega^r = \omega^a - \omega^\tau$ □

La Proposizione dimostrata si enuncia anche dicendo che la proprietà di rigidità del moto di $\mathcal{S}$ è indipendente dall'osservatore. La (4) fornisce anche la legge di composizione delle velocità angolari di moti rigidi

$$\omega^a = \omega^\tau + \omega^r.$$