Dinamica dei sistemi particellari

Marco Favretti

April 11, 2010

1 Cinematica

Sia dato un sistema di riferimento inerziale (O, e_i), $i = 1, 2, 3$ e consideriamo un sistema di punti materiali (sistema particellare) $\mathcal{S} = \{(OP_i, m_i)\}$, $i = 1, \ldots, n$, ove $m_i > 0$ è la massa del punto P_i e OP_i il raggio vettore dall'origine. Cominciamo introducendo alcune definizioni elementari. Il *baricentro* di $\mathcal{S}$ è il vettore

$$OG := \frac{\sum_i m_i OP_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i OP_i}{m}.$$

Una conseguenza immediata della definizione di baricentro è che

$$m v_G = m \frac{dOG}{dt} = \sum_i m_i v_i = P$$

ove P indica la quantità di moto di $\mathcal{S}$. Definito il baricentro G, ha senso introdurre il sistema (non inerziale) (G, e_i) con origine coincidente con G ed assi sempre paralleli a quelli di (O, e_i), per cui si ha (formula di composizione delle velocità)

$$\omega^{(\tau)} = 0, \quad v^{(\tau)} = v_G, \qquad v_i = v_i^{(\tau)} + v_i^{(r)} = v_G + v_i^{(r)}.$$

Si dimostrano facilmente le seguenti relazioni

$$\sum_i m_i GP_i = \sum_i m_i (OP_i - OG) = mOG - mOG = 0$$

da cui, derivando rispetto a t,

$$0 = \frac{d}{dt} \sum_i m_i GP_i = \sum_i m_i v_i^{(r)} = P^{(r)}.$$

Inoltre si ha per l'energia cinetica

$$2T = \sum_i m_i v_i^2 = \sum_i m_i (v_i^{(r)} + v_G)^2 = \sum_i m_i (v_i^{(r)^2} + m v_G^2 + 2 v_G \cdot P^{(r)},$$

da cui segue il Teorema di König

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} m v_G^2 + T^{(r)}.$$

Sia A un punto (fisso o mobile) nel riferimento inerziale; il momento angolare o momento della quantità di moto di $\mathcal{S}$ rispetto al polo A è

$$M_A = \sum_i AP_i \wedge m_i v_i;$$

usando la formula di variazione del momento di un sistema di vettori applicati al variare del polo si ha subito

$$M_A = AG \wedge P + M_G$$

ed essendo inoltre

$$M_G = \sum_i GP_i \wedge m_i v_i = \sum_i GP_i \wedge m_i (v_i^{(r)} + v_G) = \sum_i GP_i \wedge m_i v_i^{(r)} = M_G^{(r)}$$

si ha l'analogo del Teorema di König per il momento angolare

$$M_A = AG \wedge P + M_G^{(r)}.$$

2 Cinematica dei sistemi particellari rigidi

Sia ora $\mathcal{S}$ sistema rigido e denotiamo con ω la velocità angolare assoluta di $\mathcal{S}$. Mostriamo preliminarmente che:

Proposizione 2.1 *Se $\mathcal{S}$ è rigido, allora G è solidale a $\mathcal{S}$, ovvero*

$$v_G = v_i + \omega \wedge P_i G, \qquad \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Infatti, fissato $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$m v_G = \sum_i m_i v_i = \sum_i m_i (v_j + \omega \wedge P_j P_i) = m v_j + \omega \wedge \sum_i m_i P_j P_i,$$

ed essendo $P_j P_i = GP_i - GP_j$, si ha

$$m v_G = m v_j + \omega \wedge \sum_i m_i (GP_i - GP_j) = m(v_j + \omega \wedge P_j G).$$

□

Ne segue che il sistema $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{(OG, 0)\}$ è ancora un sistema rigido e in (G, e_i) il moto di $\mathcal{S}'$ *ha un punto fisso* G. Inoltre, da $\omega^{(\tau)} = 0$, usando la formula di composizione delle velocità angolari nei moti rigidi si ha che

$$\omega = \omega^{(\tau)} + \omega^{(r)} = \omega^{(r)}.$$

Per un generico sistema rigido con un punto fisso A, il momento angolare e l'energia cinetica ammettono l'espressione seguente (si usa la formula del doppio prodotto vettore)

$$\begin{aligned} M_A &= \sum_i AP_i \wedge m_i v_i = \sum_i m_i AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) = \\ &= \sum_i m_i (AP_i^2 \omega - (AP_i \cdot \omega) AP_i) = \sum_i m_i (AP_i^2 \mathbb{I} - AP_i \otimes AP_i)\omega = I_A \omega \end{aligned}$$

ove $a \otimes b \in M(n)$ indica la matrice prodotto tensore dei due vettori $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$(a \otimes b)u := a(b \cdot u) \qquad \forall u \in \mathcal{R}^n$$

e

$$I_A = \sum_i m_i (AP_i \mathbb{I} - Ap_i \otimes AP_i) \in M(n)$$

è il *tensore d'inerzia* del sistema (rigido) di punti materiali. Si tratta di un oggetto che dipende dalla sola geometria della distribuzione delle masse del sistema rigido.

Prima di studiare le proprietà del tensore d'inerzia, ricaviamo l'espressione dell'energia cinetica per un generico sistema rigido con un punto fisso

$$\begin{aligned} 2T_{\mathcal{S}} &= \sum_i m_i v_i^2 = \sum_i m_i (\omega \wedge AP_i)^2 = \sum_i m_i \omega \wedge Api_i \cdot \omega \wedge Api_i = \\ &= \sum_i m_i \omega \cdot AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) = \omega \cdot \sum_i m_i AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) = \omega \cdot I_A \omega. \end{aligned}$$

Nel caso particolare di G punto fisso nel sistema del baricentro e $\omega^{(r)}$ velocità angolare del sistema rispetto al riferimento del baricentro, otteniamo l'analogo delle formule di König per un sistema rigido

$$T_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot I_G \omega, \tag{1}$$

$$M_A = AG \wedge P + I_G \omega. \tag{2}$$

2.0.1 Proprietà del tensore d'inerzia

1) I_A è operatore simmetrico (e quindi diagonalizzabile). Rispetto alla base (O, e_i) si ha infatti

$$(I_A)_{ij} = e_i \cdot I_A e_j = \sum_k m_k (AP_k^2 e_i \cdot e_j - AP_k \cdot e_i AP_k \cdot e_j) = (I_A)_{ji}$$

2) Sia $\omega = |\omega| u$, ove u= vers ω. Allora

$$T = \frac{1}{2}\omega \cdot I_A \omega = \frac{\omega^2}{2} u \cdot I_A u = \frac{\omega^2}{2} I_u \tag{3}$$

ove

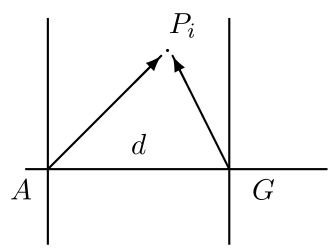
$$I_u := u \cdot I_A u = \sum_i m_i (u \wedge AP_i)^2 = \sum_i m_i d_i^2 \geq 0$$

è il *momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta per A e parallela al versore u.* Esso coincide con la somma delle masse per le distanze al quadrato dei punti P_i dalla retta per A. Come si vede subito, I_u non varia se si considera un altro punto A' sulla retta definita da (A, u). Dalla (3) si deduce che I_A, simmetrico è definito positivo ovvero

$$\omega \cdot I_A \omega \geq 0, \quad \omega \cdot I_A \omega = 0 \quad \Leftrightarrow \omega = |\omega| u = 0,$$

tranne che nel caso in cui esista u^* tale che $I_u^* = 0$. In tal caso i punti di $\mathcal{S}$ sono disposti tutti lungo una retta parallela a u^* e $\mathcal{S}$ è solido degenere (asta).

3) Formula di variazione del momento d'inerzia (Teorema di Huygens–Steiner). Consideriamo le rette parallele al versore u per i punti A e G, baricentro di $\mathcal{S}$; non è restrittivo supporre che sia $d = |AG|$ la distanza tra le rette. Allora (vedi figura)



$$\begin{aligned} I_u^{(A)} &= \sum_i m_i (u \wedge AP_i)^2 = \sum_i m_i [(u \wedge AG) + (u \wedge GP_i)]^2 = \\ &= \sum_i m_i [(u \wedge AG)^2 + (u \wedge GP_i)^2 + 2(u \wedge AG) \cdot (u \wedge GP_i)], \end{aligned}$$

da cui

$$I_u^{(A)} = md^2 + I_u^{(G)}$$

Esercizio. Mostrare che la relazione precedente è un caso particolare della formula

$$I_O = I_G + OG \otimes OG.$$

4) Momenti principali d'inerzia. Supponiamo per semplicità A coincidente con l'origine del riferimento inerziale, per cui $OP_i = (x_i, y_i, z_i)$. I termini sulla diagonale di I_O sono detti *momenti principali d'inerzia.* Si ha ad esempio per e_3

$$\begin{aligned}(I_O)_{33} &= e_3 \cdot I_O e_3 = I_{e_3}^{(O)} = \sum_i m_i (OP_i \wedge e_3)^2 = \\ &= \sum_i m_i (OP_i^2 - (OP_i \cdot e_3)^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - z_i^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2).\end{aligned}$$

I termini extra–diagonali sono detti momenti deviatori

$$(I_O)_{23} = e_2 \cdot I_O e_3 = \sum_i m_i (-y_i z_i)$$

5) Solidi piani (lamine). Sia e_3 perpendicolare al piano che contiene il sistema. Allora $z_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots n$ e

$$I_1 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + 0 - x_i^2) = \sum_i m_i y_i^2, \qquad I_2 = \sum_i m_i x_i^2$$

e si ha

$$I_3^{(O)} = I_2^{(O)} + I_1^{(O)}.$$