Qualche appunto aggiuntivo sulle lezioni di Meccanica Hamiltoniana

Massimiliano Guzzo

guzzo@math.unipd.it

AA 2014-15

Questi appunti sono intesi ad integrazione (e non in sostituzione) del capitolo 7 delle dispense del corso di Meccanica Analitica. Si tratta di una VERSIONE PRELIMINARE: NON DIFFONDERE.

1 Introduzione: le equazioni della Meccanica

Le equazioni del moto di un sistema meccanico ammettono diverse formulazioni. Cominciamo con le ben note equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di massa $m_1, \ldots, m_N$, che hanno la forma di equazioni differenziali del secondo ordine

$$\left\{\begin{array}{lcl} m_1\ddot{r}^{(1)} & = & F^{(1)}(r^{(1)}, \ldots, r^{(N)}, \dot{r}^{(1)}, \ldots, \dot{r}^{(N)}; t) \\ m_2\ddot{r}^{(2)} & = & F^{(2)}(r^{(1)}, \ldots, r^{(N)}, \dot{r}^{(1)}, \ldots, \dot{r}^{(N)}; t) \\ & \ldots & \\ m_N\ddot{r}^{(N)} & = & F^{(N)}(r^{(1)}, \ldots, r^{(N)}, \dot{r}^{(1)}, \ldots, \dot{r}^{(N)}; t) \end{array}\right. \tag{1}$$

ove $F^{(1)}, \ldots, F^{(N)}$ rappresentano forze opportune, ed il raggio vettore di ciascun punto materiale $P^{(i)}$:

$$r^{(i)} = P_i - O = \sum_{j=1}^{3} x_j^{(i)} e_j$$

individua completamente la sua posizione in un sistema di riferimento inerziale O, e_1, e_2, e_3, attraverso le coordinate cartesiane $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$.

Il formalismo Newtoniano, che ben si presta alla descrizione dei moti in sistemi di riferimento inerziali (e anche in qualche classe di sistemi di riferimento non inerziali, mediante l'introduzione di forze apparenti), risulta meno adatto alla descrizione dei moti in coordinate arbitrarie (non necessariamente cartesiane) ed in presenza di vincoli. In particolare, l'uso di coordinate diverse da quelle cartesiane è particolarmente importante in quei sistemi che presentano delle simmetrie che sono ben descritte da un sistema di coordinate opportuno (ad esempio, in presenza di simmetria di rotazione, è opportuno utilizzare coordinate sferiche). Il formalismo lagrangiano risponde bene ad entrambe le esigenze sopra individuate. Le equazioni del moto, nella forma delle equazioni di Lagrange, sono scritte direttamente in un sistema di coordinate $q_1, \ldots, q_n$, non necessariamente cartesiane, ed il numero n di gradi di libertà del problema, in presenza di vincoli olonomi, è inferiore a $3N$. Per un sistema lagrangiano con funzione di Lagrange $L(q, \dot{q}; t)$, le n equazioni di Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} & = & \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ & \dots & \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} & = & \frac{\partial L}{\partial q_n} \end{array} \right. \tag{2}$$

assumono la forma di n equazioni differenziali del secondo ordine nelle $q_1, \dots, q_n$, che è conveniente anche scrivere in forma normale:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{q}_1 & = & a_1(q, \dot{q}, t) \\ & \dots & \\ \ddot{q}_n & = & a_n(q, \dot{q}, t) \end{array} \right. \tag{3}$$

e anche come sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{q}_1 & = v_1 \\ \dots & \\ \dot{q}_n & = v_n \\ & \\ \dot{v}_1 & = a_1(q, v, t) \\ \dots & \\ \dot{v}_n & = a_n(q, v, t) \quad . \end{array} \right. \tag{4}$$

L'invarianza delle equazioni di Lagrange per cambi di coordinate significa che, se si considerano altre coordinate $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$, collegate ad ogni tempo t alle $q = (q_1, \dots, q_n)$ dalla trasformazione

$$q = f(Q, t), \tag{5}$$

le equazioni del moto per le variabili Q hanno ancora la forma di equazioni di Lagrange, relativamente alla lagrangiana $\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)$ che si ottiene per sostituzione di variabili dentro $L(q, \dot{q}, t)$:

$$\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L\Big(f(Q, t), df(Q, t)\dot{Q} + \frac{\partial f}{\partial t}(Q, t), t\Big).$$

Si osservi che le trasformazioni (5) ammesse nel formalismo lagrangiano sono trasformazioni fra sistemi di coordinate diversi per la *configurazione* del sistema meccanico. Lo *stato* di un sistema meccanico invece è individuato, oltre che dalla configurazione q, anche dalle velocità $\dot{q}$. In particolare, la trasformazione (5) induce la trasformazione fra velocità $v = \dot{q}$ e $V = \dot{Q}$:

$$v = df(Q, t)V + \frac{\partial f}{\partial t}(Q, t),$$

e pertanto (5) induce una trasformazione, ad ogni tempo t, nello spazio degli stati:

$$\left\{ \begin{array}{c} q = f(Q, t) \\ v = df(Q, t)V + \frac{\partial f}{\partial t}(Q, t) \quad . \end{array} \right. \tag{6}$$

È evidente che in linea di principio si possono immaginare trasformazioni nello spazio degli stati più generali delle (6):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} q & = & f(Q, V, t) \\ v & = & g(Q, V, t) \end{array} \right. \tag{7}$$

Tale esigenza si presenta, ad esempio, nella procedura che conduce all'integrazione delle equazioni del moto di un sistema meccanico. Di norma, il procedimento di integrazione consiste nella determinazione di variabili Q, V nelle quali le equazioni del moto si integrano immediatamente; ad esempio abbiano la forma dell'equazione del moto della particella libera:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{Q} & = & V \\ \dot{V} & = & 0 \end{array} \right. \tag{8}$$

Per i sistemi integrabili più interessanti per la meccanica (fra cui il problema di Keplero ed il corpo rigido di Eulero–Poinsot) tali trasformazioni di variabili non hanno la forma semplice (6), e vanno cercate in una classe più generale di trasformazioni (7). Vi è dunque la necessità di una formulazione della meccanica che sia invariante in forma anche rispetto a trasformazioni di variabili più generali delle (6). Il formalismo Hamiltoniano fornisce una formulazione della meccanica invariante per una classe di trasformazioni dello spazio degli stati (o spazio delle fasi, in ambito Hamiltoniano), dette trasformazioni canoniche, che estende in modo significativo le trasformazioni ammesse in ambito lagrangiano. Il formalismo Hamiltoniano è inoltre utilizzato per ottenere la cosiddetta quantizzazione di un sistema meccanico.

2 Equazioni di Hamilton di un sistema Lagrangiano

Consideriamo un sistema di lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, definito per $(q, v) \in U \times \mathbb{R}^n$, ed il sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine per le variabili (q, v):

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{q}_1 = v_1 \\ \dots \\ \dot{q}_n = v_n \\ \\ \dot{v}_1 = a_1(q, v, t) \\ \dots \\ \dot{v}_n = a_n(q, v, t) \end{array} \right. \tag{9}$$

che si ottiene scrivendo in forma normale le equazioni di Lagrange (2). Tale sistema assume una forma decisamente più simmetrica ed elegante se al posto delle variabili (q, v) si utilizzano le variabili (q, p), ove le variabili $p = (p_1, \dots, p_n)$ sono collegate alle variabili (q, v) dalle relazioni:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}(q, v, t) \quad , \quad i = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Sotto l'ipotesi (vera per sistemi lagrangiani meccanici), che per ogni $(q, v, t) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, risulti

$$\det \frac{\partial L}{\partial v \partial v}(q, v, t) \neq 0, \tag{11}$$

il sistema definito dalle equazioni (10):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_1 & = & \frac{\partial L}{\partial v_1}(q, v, t) \\ p_2 & = & \frac{\partial L}{\partial v_2}(q, v, t) \\ \dots & & \\ p_n & = & \frac{\partial L}{\partial v_n}(q, v, t) \end{array} \right. \tag{12}$$

risulta invertibile rispetto alle variabili velocità $(v_1, \dots, v_n)$, e indichiamo con

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_1 & = & \tilde{v}_1(q,p,t) \\ v_2 & = & \tilde{v}_2(q,p,t) \\ \dots & & \\ v_n & = & \tilde{v}_n(q,p,t) \end{array} \right. \tag{13}$$

tale inversione. Per ogni t fissato è dunque possibile considerare la trasformazione dalle variabili (q, v) alle variabili (q, p) come una trasformazione nello spazio degli stati. Le variabili p_i si dicono *momenti coniugati* alle coordinate q_i, e l'insieme di definizione delle variabili (q, p) si chiama *spazio delle fasi* del sistema.

Le equazioni (2), scritte come equazioni nelle variabili (q, p), assumono una forma particolarmente semplice ed elegante, precisamente

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{q}_1 & = & \frac{\partial H}{\partial p_1}(q,p,t) \\ \dots & & \\ \dot{q}_n & = & \frac{\partial H}{\partial p_n}(q,p,t) \\ \dot{p}_1 & = & -\frac{\partial H}{\partial q_1}(q,p,t) \\ \dots & & \\ \dot{p}_n & = & -\frac{\partial H}{\partial q_n}(q,p,t) \end{array} \right. \tag{14}$$

ove $H(q, p, t)$ è una funzione, detta *funzione di Hamilton*, da determinare a partire dalla lagrangiana, precisamente

$$H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ \tilde{v}_i(q,p,t) - L(q, \tilde{v}(q,p,t), t). \tag{15}$$

La funzione definita da (15) viene anche detta *trasformata di Legendre* di L.

Caso meccanico conservativo. Se la lagrangiana $L(q, \dot{q})$ è indipendente dal tempo e di tipo meccanico conservativo:

$$L(q,v) = T(q,v) - V(q) = \frac{1}{2} A(q) v \cdot v - V(q),$$

ove $A(q)$ è la matrice cinetica del sistema, allora i momenti sono definiti da

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = A(q) v$$

ed essendo $A(q)$ matrice invertibile, tale equazione vettoriale si inverte nella

$$v = \tilde{v}(q,p) = A(q)^{-1} p.$$

La trasformata di Legendre di $L(q, v)$ è allora

$$H(q,p) = p \cdot \tilde{v}(q,p) - L(q, \tilde{v}(q,p)) = p \cdot A(q)^{-1} p - \frac{1}{2} p \cdot A(q)^{-1} p + V(q) = \frac{1}{2} A(q)^{-1} p \cdot p + V(q).$$

Si osservi che $\frac{1}{2} A(q)^{-1} p \cdot p$ è l'energia cinetica calcolata utilizzando i momenti p, pertanto si ha:

$$H(q,p) = T(q,p) + V(q) \quad .$$

L'Hamiltoniana è l'energia meccanica del sistema espressa come funzione delle coordinate q e dei momenti coniugati p.

Esempio. Punto materiale di massa m in coordinate cartesiane x, y, z, in un campo di forze conservative di potenziale $V(x, y, z)$. La lagrangiana è

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z),$$

i momenti:

$$p_x = m\dot{x} \quad , \quad p_y = m\dot{y} \quad , \quad p_z = m\dot{z}$$

coniugati alle variabili x, y, z sono le componenti cartesiane della quantità di moto, e l'Hamiltoniana è:

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z).$$

Esercizio. *Scrivere lagrangiana ed hamiltoniana di un punto materiale di massa m in coordinate polari (r, ϕ) in un campo di forze conservative di potenziale $V(r, \phi)$. Scrivere le equazioni di Hamilton.*

Da:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned} \tag{16}$$

si ottiene la lagrangiana:

$$L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r, \phi).$$

I momenti coniugati alle variabili (r, ϕ) sono

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \end{aligned} \tag{17}$$

cioè:

$$\begin{aligned} p_r &= m\dot{r} \\ p_\phi &= mr^2\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{18}$$

Si osservi che il momento p_ϕ coniugato a ϕ rappresenta la componente del momento angolare lungo la direzione ortogonale al piano x, y, mentre il momento p_r coniugato ad r è la componente radiale della quantità di moto.

La funzione di Hamilton è:

$$H(r, \phi, p_r, p_\phi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) + V(r, \phi).$$

Le equazioni di Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi}. \end{aligned} \tag{19}$$

sono dunque

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{p_r}{m} \\
\dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{mr^2} \\
\dot{p}_r &= -\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r,\phi)\Big) \\
\dot{p}_\phi &= -\frac{\partial V}{\partial \phi}
\end{aligned} \tag{20}$$

Esercizio. *Scrivere lagrangiana ed hamiltoniana di un punto materiale di massa m in coordinate sferiche (r, ϕ, θ) in un campo di forze conservative di potenziale $V(r, \phi, \theta)$.*

Da:

$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned} \tag{21}$$

si trova

$$L(r,\phi,\theta,\dot{r},\dot{\phi},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) - V(r,\theta,\phi).$$

I momenti coniugati sono

$$\begin{aligned}
p_r &= m\dot{r} \\
p_\theta &= mr^2\dot{\theta} \\
p_\phi &= mr^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{22}$$

e la Hamiltoniana:

$$H(r,\phi,\theta,p_r,p_\phi,p_\theta) = \frac{1}{2m}\Big(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\Big) + V(r,\theta,\phi).$$

3 Equivalenza tra equazioni di Lagrange ed equazioni di Hamilton

Teorema (Equivalenza tra equazioni di Lagrange e di Hamilton) *La funzione $q(t)$ risolve le equazioni di Lagrange per la lagrangiana $L(q,v,t)$ se e solo se, posto*

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(q(t),\dot{q}(t),t) \quad ,$$

le funzioni $(q(t),p(t))$ risolvono le equazioni di Hamilton

$$\left\{ \begin{aligned}
\dot{q} &= \tfrac{\partial H}{\partial p} \\
\dot{p} &= -\tfrac{\partial H}{\partial q}
\end{aligned} \right. \tag{23}$$

per l'Hamiltoniana:

$$H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i\ \tilde{v}_i(q,p,t) - L(q,\tilde{v}(q,p,t),t).$$

Dimostrazione. Verifichiamo preliminarmente che le derivate parziali di H soddisfano le identità:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}(q,p,t) = -\frac{\partial L}{\partial q_j}(q,\tilde{v}(q,p,t),t) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_j}(q,p,t) = \tilde{v}_j(q,p,t) \quad .$$

Infatti, derivando la funzione

$$H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ \tilde{v}_i(q,p,t) - L(q,\tilde{v}(q,p,t),t).$$

si ottiene

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \ \tilde{v}_i(q,p,t) - L(q,\tilde{v}(q,p,t),t)\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial q_j}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_j}(q,\tilde{v}(q,p,t),t),$$

e anche

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}(q,p,t) = \frac{\partial}{\partial p_j}\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \ \tilde{v}_i(q,p,t) - L(q,\tilde{v}(q,p,t),t)\Big)$$

$$= \tilde{v}_j + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial p_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial p_j} = \tilde{v}_j.$$

Supponiamo ora che $q(t)$ risolva le equazioni di Lagrange per la lagrangiana $L(q,v,t)$ e poniamo

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial v_i}(q(t),\dot{q}(t),t) \quad , \quad i = 1,\dots,n.$$

Dunque, per inversione di questa equazione si ottiene

$$\dot{q}_i(t) = \tilde{v}_i(q(t),p(t),t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t),p(t),t) \quad , \quad i = 1,\dots,n.$$

Poi, dalle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_j}(q,\dot{q},t) = \frac{\partial L}{\partial q_j}(q,\dot{q},t)$$

si ottiene anche

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}(q,\dot{q}(t),t) = \frac{\partial L}{\partial q_j}(q,\tilde{v}(q(t),p(t),t),t) = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q(t),p(t),t).$$

Supponiamo ora che $q(t), p(t)$ risolvano le equazioni di Hamilton per H. Dunque, vale

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q(t),p(t),t) = \frac{\partial L}{\partial q_j}(q,\tilde{v}(q,p,t),t)$$

e per la definizione dei momenti si ottiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_j}(q,\dot{q},t) = \frac{\partial L}{\partial q_j}(q,\dot{q},t),$$

pertanto le $q(t)$ risolvono le equazioni di Lagrange per L.

4 Equazioni di Hamilton

Data una funzione $H(q,p,t)$, con (q,p) definite in un aperto di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il sistema di equazioni differenziali:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{q}_1 & = & \frac{\partial H}{\partial p_1}(q,p,t) \\ \dots & & \\ \dot{q}_n & = & \frac{\partial H}{\partial p_n}(q,p,t) \\ \dot{p}_1 & = & -\frac{\partial H}{\partial q_1}(q,p,t) \\ \dots & & \\ \dot{p}_n & = & -\frac{\partial H}{\partial q_n}(q,p,t) \end{array}\right. \tag{24}$$

che indicheremo anche in forma vettoriale compatta (senza indici):

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{q} & = & \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} & = & -\frac{\partial H}{\partial q} \end{array}\right. \tag{25}$$

prende il nome di equazioni di Hamilton per $H(q,p,t)$. È spesso conveniente utilizzare una notazione ancora più compatta, definendo $x = (q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ ed il campo vettoriale

$$X_H(x,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \\ \dots \\ \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \\ -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \\ \dots \\ \\ -\frac{\partial H}{\partial q_n} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

che viene detto *campo vettoriale Hamiltoniano* di $H(q,p,t)$. Le equazioni di Hamilton sono dunque esprimibile nella notazione compatta

$$\dot{x} = X_H(x,t).$$

Data l'evidente somiglianza fra l'espressione (26) ed il gradiente della funzione $H(x,t)$ rispetto alle variabili spaziali:

$$\nabla_x H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \\ \dots \\ \\ \frac{\partial H}{\partial q_n} \\ \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \\ \dots \\ \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

si introduce la cosiddetta matrice $2n \times 2n$ di *unità simplettica*, o *matrice simplettica standard*:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

cosicché si ha:

$$X_H(x,t) = E\nabla_x H(x,t).$$

È di fondamentale importanza per la meccanica lo studio delle proprietà di invarianza delle equazioni di Hamilton, ovvero la determinazione della più ampia classe di trasformazioni di variabili

$$Q = f(q,p,t) \quad , \quad P = g(q,p,t) \quad ,$$

che indicheremo anche in forma compatta

$$y = w(x,t) \tag{29}$$

ove $x = (q,p)$, $y = (Q,P)$, che coniugano *ogni* sistema Hamiltoniano ad un sistema Hamiltoniano. Precisamente, denotando con

$$x = w^{-1}(y,t) \tag{30}$$

l'inversione di (29) rispetto alle variabili x, cioè:

$$x(w^{-1}(y,t),t) = y \quad , \quad w^{-1}(w(x,t),t) = x \quad ,$$

per ogni Hamiltoniana $H(x,t)$, la trasformazione (29) coniuga l'equazione differenziale

$$\dot{x} = X_H(x,t)$$

all'equazione differenziale

$$\dot{y} = Y(y,t)$$

ove il campo vettoriale Y è definito da:

$$Y(y,t) = \left[J(x,t)X_H(x,t) + \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) \right]_{|x=w^{-1}(y,t)} , \tag{31}$$

e $J(x,t)$ è la matrice Jacobiana di w:

$$J_{hk}(x,t) = \frac{\partial w_h}{\partial x_k}(x,t).$$

È allora significativo considerare la seguente

Definizione (Trasformazioni canoniche). *La trasformazione di variabili dipendente dal tempo $y = w(x,t)$ è detta trasformazione canonica se e solo se per ogni Hamiltoniana $H(x,t)$, il campo vettoriale $Y(y,t)$ coniugato a $X_H(x,t)$ è esso stesso Hamiltoniano per una Hamiltoniana $K(y,t)$, cioè $Y = Y_K$.*

Esempi elementari. i) La *traslazione nello spazio delle fasi*:

$$Q = q + a \quad , \quad P = p + b$$

è canonica e coniuga ogni Hamiltoniana $H(q, p, t)$ a

$$K(Q, P, t) = H(Q - a, P - b, t).$$

Infatti, vale:

$$\dot{Q} = \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) = \frac{\partial H}{\partial p}(Q - a, P - b, t) = \frac{\partial K}{\partial P}(Q, P, t)$$

e conto analogo per $\dot{P}$.

ii) La *dilatazione nello spazio delle fasi*

$$Q = \alpha q \quad , \quad P = \beta p$$

con $\alpha, \beta \neq 0$, è canonica e coniuga ogni Hamiltoniana $H(q, p, t)$ alla Hamiltoniana

$$K(Q, P, t) = \alpha\beta H\Big(\frac{Q}{\alpha}, \frac{P}{\beta}, t\Big).$$

Infatti, vale:

$$\dot{Q} = \alpha\dot{q} = \alpha\frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) = \alpha\frac{\partial H}{\partial p}\Big(\frac{Q}{\alpha}, \frac{P}{\beta}, t\Big) = \frac{\partial K}{\partial P}(Q, P, t)$$

e conto analogo per $\dot{P}$.

iii) La *trasformazione di Galileo*

$$Q = q + ct \quad , \quad P = p \quad ,$$

ove c è un vettore costante, è canonica e coniuga ogni Hamiltoniana $H(q, p, t)$ alla Hamiltoniana

$$K(Q, P, t) = H(Q - ct, P, t) + c \cdot P.$$

Infatti, vale:

$$\dot{Q} = \dot{q} + c = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) + c = \frac{\partial H}{\partial p}(Q - ct, P, t) + \frac{\partial}{\partial P}(c \cdot P) = \frac{\partial K}{\partial P}(Q, P, t)$$

$$\dot{P} = \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) = -\frac{\partial K}{\partial Q}(Q, P, t).$$

iv) *Trasformazioni puntuali estese.* Ricordiamo che nel formalismo lagrangiano le sole trasformazioni ammissibili sono trasformazioni delle coordinate (per la configurazione): $Q = f(q, t)$, estese poi alle velocità in modo consistente con:

$$\dot{Q} = \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

In ambito Hamiltoniano, la trasformazione

$$Q = f(q, t) \tag{32}$$

può essere estesa ai momenti:

$$P = g(q, p, t)$$

in modo da risultare canonica. Precisamente, denotando con

$$q = f^{-1}(Q,t)$$

la funzione che inverte la (32), la funzione $g(q,p,t)$ si ottiene per inversione delle

$$p_h = \sum_k P_k \frac{\partial f_k}{\partial q_h}(f^{-1}(Q,t),t).$$

La trasformazione

$$Q = f(q,t) \quad , \quad P = g(q,p,t)$$

si dirà *puntuale* estesa ai momenti. La dimostrazione della canonicità della trasformazione puntuale estesa è un po' laboriosa, e la omettiamo. Ci limitiamo ad osservare che, l'insieme delle trasformazioni canoniche è significativamente più ampio delle trasformazioni puntuali estese ai momenti.

Già dagli esempi visti sopra, si nota che la nuova Hamiltoniana $K(Q,P,t)$ non si ottiene sempre per semplice sostituzione di variabili dentro la funzione $H(q,p,t)$. In generale, denotando con

$$q = f^{-1}(Q,P,t) \quad , \quad p = g^{-1}(Q,P,t)$$

la trasformazione inversa, dimostreremo che la nuova Hamiltoniana K assume la forma

$$K(Q,P,t) = cH(f^{-1}(Q,P,t), g^{-1}(Q,P,t),t) + K_0(Q,P,t)$$

ove c è una costante e K_0, presente per le sole trasformazioni che dipendono esplicitamente dal tempo, dipendono solo dalla trasformazione di variabili (e non da H).

5 Il caso autonomo e le trasformazioni indipendenti dal tempo

Consideriamo in questa sezione, per semplicità, il solo caso di trasformazioni $y = w(x)$ indipendenti dal tempo, denotate anche

$$Q = f(q,p) \quad , \quad P = g(q,p).$$

Denotiamo poi con $J(x)$ la matrice jacobiana della trasformazione, ovvero

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial q} & \frac{\partial g}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{33}$$

Vale la seguente:

Proposizione. *Se la trasformazione $y = w(x)$ soddisfa la condizione*

$$JEJ^T = cE \tag{34}$$

per una qualche costante $c \neq 0$, allora è canonica e coniuga ogni Hamiltoniana $H(x)$ alla Hamiltoniana

$$K(y) = cH \circ w^{-1}(y).$$

La costante c si chiama *valenza* della trasformazione, e le trasformazioni canoniche con $c = 1$ si chiamano *univalenti.*

Dimostrazione. Supponiamo che $y = w(x)$ soddisfi la condizione $JEJ^T = cE$, e verifichiamo che la trasformazione è canonica, e precisamente che, per ogni $H(x)$, coniuga il campo vettoriale Hamiltoniano $X_H(x)$ al campo vettoriale Hamiltoniano $Y_K(y)$. Poiché vale

$$K(w(x)) = cH(x)$$

otteniamo

$$c\nabla_x H(x) = J^T(x)\nabla_y K(w(x)).$$

Allora, il campo vettoriale Y coniugato a X_H soddisfa

$$Y(y) = [J(x)X_H(x)]_{|x=w^{-1}(y)} = [J(x)E\nabla_x H(x)]_{|x=w^{-1}(y)}$$

$$= c^{-1}[J(x)EJ^T(x)\nabla_y K(w(x))]_{|x=w^{-1}(y)} = E\nabla_y K(y) = Y_K(y),$$

e dunque è il campo vettoriale Hamiltoniano di $K(y)$.

Osservazioni. 1) La relazione

$$JEJ^T = cE$$

con una qualche costante $c \neq 0$, è anche condizione necessaria affinché $y = w(x)$ sia canonica.

2) Se la trasformazione $y = w(x)$ è canonica, anche la sua inversa $x = w^{-1}(y)$ lo è, e anche la composizione $z = k(w(x))$ di due trasformazioni canoniche $y = w(x)$, $z = k(y)$, è canonica.

Infatti, la matrice jacobiana di $z = k(w(x))$ è

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial y}(w(x))\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Denotando

$$J_1(x) = \frac{\partial w}{\partial x}(x) \quad , \quad J_2(y) = \frac{\partial k}{\partial y}(y) \quad , \quad J_3(x) = \frac{\partial z}{\partial x}(x) \quad ,$$

risulta quindi:

$$J_3(x) = J_2(w(x))J_1(x) \quad .$$

Siccome $y = w(x)$ e $z = k(y)$ sono canoniche, allora esistono $c_1, c_2 \neq 0$ tali che

$$J_1EJ_1^T = c_1E \quad , \quad J_2EJ_2^T = c_2E.$$

Segue la relazione

$$J_3EJ_3^T = (J_2J_1)E(J_2J_1)^T = J_2(J_1EJ_1^T)J_2^T = c_1J_2EJ_2^T = c_1c_2E$$

e pertanto anche $z = k(w(x))$ è canonica. Si verifichi inoltre che se $y = w(x)$ è canonica, anche la sua inversa lo è.

Si osservi che, se la trasformazione

$$Q = f(q,p) \quad , \quad P = g(q,p)$$

è canonica di valenza c, allora si vede facilmente che se $\alpha, \beta \neq 0$ soddisfano $\alpha\beta = c^{-1}$, allora la trasformazione

$$Q = \alpha f(q,p) \quad , \quad P = \beta g(q,p)$$

è canonica di valenza $c = 1$. Per questo motivo, si fa spesso riferimento alle sole trasformazioni canoniche univalenti, poiché tutte le altre si ottengono per riscalamento delle variabili.

In particolare, le trasformazioni canoniche univalenti preservano il volume dello spazio delle fasi, ovvero, per ogni insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^n$, risulta:

$$\int_A dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \int_{w(A)} dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n. \tag{35}$$

Infatti, eseguiamo il cambio di variabili $(Q,P) = w(q,p)$ dentro il seguente integrale:

$$\int_{w(A)} dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n = \int_A [\det J(q,p)] dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \quad ,$$

e da $JEJ^T = E$ si ottiene $\det J \det E \det J^T = \det E$, da cui $(\det J)^2 = 1$, e $\det J = \pm 1$. Si potrebbe dimostrare che in realtà vale $\det J = 1$, cosicché si trova (35).

6 Parentesi di Poisson

Nel formalismo Hamiltoniano assume particolare rilevanza un'operazione fra funzioni detta *parentesi di Poisson.* Siano $u(q,p), v(q,p)$ due funzioni differenziabili definite per $(q,p) \in D$, $D \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ aperto. La parentesi di Poisson di u con v è la funzione definita da

$$\{u,v\} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \Big), \tag{36}$$

che scriveremo anche nelle forme più compatte

$$\{u,v\} = \frac{\partial u}{\partial q} \cdot \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p} \cdot \frac{\partial v}{\partial q}$$

e, denotando $x = (q,p)$:

$$\{u,v\} = \nabla_x u \cdot E \nabla_x v.$$

Nel caso in cui le funzioni $u(q,p,t), v(q,p,t)$ dipendono dal tempo t, si definisce ugualmente la parentesi di Poisson di u e v come in (36) trattando il tempo come un parametro.

Le parentesi di Poisson fra le funzioni $u(q,p), v(q,p)$ che coincidono con una delle variabili q_h, p_k sono dette *parentesi di Poisson elementari*, e valgono:

$$\{q_h, p_k\} = \delta_{hk}, \quad \{q_h, q_k\} = 0, \quad \{p_h, p_k\} = 0.$$

Le parentesi di Poisson godono delle seguenti proprietà algebriche:

- antisimmetria: $\{f, g\} = -\{g, f\}$;
- bilinearità $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$, $\{h, \alpha f + \beta g, \} = \alpha\{h, f\} + \beta\{h, g\}$;
- Leibniz: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$;
- Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$.

In particolare vale $\{f, f\} = 0$.

Parentesi di Poisson e costanti del moto. Consideriamo il sistema Hamiltoniano di Hamiltoniana $H(q,p)$. La funzione $K(q,p)$ è una costante del moto se e solo se risulta

$$\{K, H\} = 0 \quad ,$$

cioè se e solo se $K(q,p)$ *commuta* con l'Hamiltoniana $H(q,p)$. Infatti, per ogni moto $q(t), p(t)$ del sistema Hamiltoniano, risulta

$$\frac{d}{dt}K(q(t), p(t)) = \sum_i \Big(\frac{\partial K}{\partial q_i}(q(t), p(t))\dot{q}_i + \frac{\partial K}{\partial p_i}(q(t), p(t))\dot{p}_i \Big)$$

$$= \sum_i \Big(\frac{\partial K}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) = \{K, H\},$$

e dunque $\frac{d}{dt}K(q(t), p(t)) = 0$ se e solo se $\{K, H\} = 0$.

In particolare $H(q,p)$ è integrale del moto, essendo $\{H, H\} = 0$. Se invece il sistema Hamiltoniano non è autonomo, dunque $H(q,p,t)$ dipende esplicitamente dal tempo, risulta:

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Si verifichi usando l'identità di Jacobi che se f e g sono costanti del moto, anche $\{f, g\}$ è costante del moto.

Proprietà di invarianza delle parentesi di Poisson sotto trasformazioni canoniche. Abbiamo già visto che il formalismo Hamiltoniano è invariante sotto trasformazioni canoniche, e che l'insieme delle trasformazioni canoniche è ben rappresentato dalle sole trasformazioni univalenti (le altre sono ottenibili da queste per riscalamento di variabili). Un altro modo per caratterizzare l'invarianza del formalismo Hamiltoniano sotto trasformazioni canoniche utilizza le parentesi di Poisson.

Diciamo che la trasformazione di variabili $y = w(x)$ (o $(Q, P) = w(q, p)$) *preserva le parentesi di Poisson* se, comunque si prendano funzioni differenziabili $u(y)$ e $v(y)$, e indicando $\tilde{u}(x) = u \circ w(x)$, $\tilde{v}(x) = v \circ w(x)$, risulta

$$\{\tilde{u}, \tilde{v}\} = \{u, v\} \circ w.$$

Sembrerebbe difficile verificare se una certa trasformazione di variabili preservi o meno le parentesi di Poisson, in quanto nella definizione si fa riferimento a funzioni qualsiasi f, g. In realtà, le cose sono rese più semplici dalla seguente proposizione: *la trasformazione di variabili $y = w(x)$ (o $(Q, P) = w(q, p)$) preserva le parentesi di Poisson se e solo se sono preservate le parentesi di Poisson elementari*, ovvero, denotando $Q = f(q, p), P = g(q, p)$:

$$\{Q_i, P_j\} = \{f_i, g_j\} = \delta_{ij} \quad , \quad \{Q_i, Q_j\} = \{f_i, f_j\} = 0 \quad , \quad \{P_i, P_j\} = \{g_i, g_j\} = 0.$$

Esercizio. *Si verifichi che la trasformazione di variabili $(q, p) = w(\varphi, I)$ definita da:*

$$p = \sqrt{2I} \ \cos\varphi \quad , \quad q = \sqrt{2I} \ \sin\varphi$$

preserva le parentesi di Poisson elementari.

Dobbiamo verificare $\{q, p\} = 1$. Vale:

$$\{q, p\} = \{\sqrt{2I}\sin\varphi, \sqrt{2I}\cos\varphi\} = \frac{\partial}{\partial\varphi}(\sqrt{2I}\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial I}(\sqrt{2I}\cos\varphi) - \frac{\partial}{\partial I}(\sqrt{2I}\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sqrt{2I}\cos\varphi)$$

$$= \sqrt{2I}\cos\varphi\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{I}}\cos\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{I}}\sin\varphi\sqrt{2I}\sin\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Proposizione. *La trasformazione di variabili $y = w(x)$ (o $(Q, P) = w(q, p)$) è una trasformazione canonica univalente se e solo se preserva le parentesi di Poisson.*

Tale proposizione afferma l'invarianza delle parentesi di Poisson sotto trasformazioni canoniche.

Esercizio. *Si dimostri la proposizione nel caso $n = 1$, utilizzando la condizione $JEJ^T = E$.*

Riscriviamo la condizione $JEJ^T = E$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial q} & \frac{\partial g}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial g}{\partial q} \\ \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial g}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ -\frac{\partial g}{\partial p} & \frac{\partial g}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial g}{\partial q} \\ \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial g}{\partial p} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \{f, g\} \\ -\{f, g\} & 0 \end{pmatrix}$$

e l'ultima matrice è uguale ad E se e solo se $\{f, g\} = 1$.

Le parentesi di Poisson forniscono dunque un facile criterio per verificare se una certa trasformazione è canonica univalente. Ad esempio, la trasformazione

$$p = \sqrt{2I} \ \cos\varphi \quad , \quad q = \sqrt{2I} \ \sin\varphi$$

è canonica univalente.

Esercizio. *Risolvere le equazioni di Hamilton relative alla hamiltoniana*

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$$

utilizzando la trasformazione canonica

$$p = \sqrt{2I} \ \cos\varphi \quad , \quad q = \sqrt{2I} \ \sin\varphi \quad .$$

La trasformazione canonica è univalente e l'hamiltoniana coniugata a $H(q,p)$ si ottiene per sostituzione di variabili

$$K = \frac{2I\cos^2\varphi + 2I\sin^2\varphi}{2} = I \quad .$$

In particolare, K dipende solo da I, e quindi le equazioni di Hamilton per K sono

$$\dot\varphi = 1 \quad , \quad \dot I = 0$$

e sono risolte da

$$I(t) = I(0) \quad , \quad \varphi(t) = \varphi(0) + t$$

nelle variabili originali:

$$q(t) = \sqrt{2I(0)}\ \sin(\varphi(0)+t) \quad , p(t) = \sqrt{2I(0)}\ \cos(\varphi(0)+t) \quad .$$

Le variabili I, φ sono un esempio di variabili di azione–angolo.

7 Leggi di conservazione nel formalismo Hamiltoniano

L'espressione di alcune leggi di conservazione nel formalismo Hamiltoniano risulta particolarmente semplice. Analizziamo la legge di variazione della funzione di Hamilton, e l'eventuale presenza di coordinate ignorabili.

Conservazione dell'Hamiltoniana. Consideriamo un generico sistema Hamiltoniano di Hamiltoniana $H(q,p,t)$, ed osserviamo che, lungo i moti $(q(t),p(t))$ del sistema Hamiltoniano, risulta

$$\frac{d}{dt}H(q(t),p(t),t) = \frac{\partial H}{\partial t}(q(t),p(t),t).$$

Infatti, utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte, ed utilizzando le equazioni di Hamilton, si ottiene

$$\frac{d}{dt}H(q(t),p(t),t) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot p_i\Big) + \frac{\partial H}{\partial t} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\Big) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

In particolare, se $H = H(q,p)$ è indipendente dal tempo, allora

$$\frac{d}{dt}H(q(t),p(t)) = 0$$

e pertanto è una costante del moto. Nel caso meccanico conservativo, tale legge di conservazione esprime la conservazione dell'energia meccanica.

Coordinate ignorabili. Supponiamo che la Hamiltoniana $H(q,p,t)$ non dipenda da una o piú coordinate, diciamo le ultime $q_{m+1},\ldots,q_n$. Allora, dalle equazioni di Hamilton, si ottiene immediatamente che i momenti $p_{m+1}, \ldots, p_n$ coniugati a tali coordinate ignorabili sono costanti del moto, essendo per $i = m+1, \ldots, n$:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0.$$

Di fatto, per ogni valore fissato di tali momenti, le equazioni di Hamilton per le rimanenti variabili sono ancora un sistema Hamiltoniano, nelle variabili $(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)$, con Hamiltoniana dipendente parametricamente dai momenti $p_{m+1}, \ldots, p_n$, detto anche sistema ridotto.

8 Condizione di Lie e funzioni generatrici di trasformazioni canoniche

In questo paragrafo torniamo a considerare trasformazioni dipendenti eventualmente dal tempo $y = w(x,t)$, o anche

$$Q = f(q,p,t) \quad , \quad P = g(q,p,t)$$

ed enunciamo un criterio per la canonicità (generica, con valenza qualsiasi) che utilizza il formalismo delle forme differenziali.

Nello spazio delle fasi (q,p), la 1–forma differenziale

$$p \cdot dq$$

si chiama *1–forma di Liouville.* È possibile caratterizzare le trasformazioni canoniche a seconda di come esse trasformano la 1–forma di Liouville.

Esempio. *Calcolare come trasforma la 1–forma di Liouville:*

$$p \cdot dq$$

per effetto della trasformazione

$$Q = q + a \quad , \quad P = p + b$$

ove $a, b \in \mathbb{R}^n$ sono vettori costanti.

Il conto si fa sostituendo $q = Q - a$, $p = P - b$ e differenziando rispetto alle nuove variabili Q, P:

$$p \cdot dq = (P-b) \cdot d(Q-a) = (P-b) \cdot dQ = P \cdot dQ - b \cdot dQ = P \cdot dQ - d(b \cdot Q).$$

La 1–forma di Liouville $p \cdot dq$ viene trasformata nella 1–forma di Liouville $P \cdot dQ$ cui viene aggiunto il differenziale della funzione $-(b \cdot Q)$. Dunque, la trasformazione è del tipo

$$p \cdot dq = P \cdot dQ + dF(Q,P),$$

con $F = -(b \cdot Q)$.

Esempio. *Calcolare come trasforma la 1–forma di Liouville:*

$$p \cdot dq$$

per effetto della trasformazione dipendente dal tempo

$$Q = q + ct \quad , \quad P = p$$

ove $c \in \mathbb{R}^n$ è un vettore costante.

Il conto si fa sostituendo $q = Q - ct$, $p = P$ e differenziando rispetto alle nuove variabili Q, P ed al tempo t:

$$p \cdot dq = P \cdot d(Q - ct) = P \cdot dQ - c \cdot Pdt \quad .$$

La 1–forma di Liouville $p \cdot dq$ viene trasformata nella 1–forma di Liouville $P \cdot dQ$ cui viene aggiunto il termine $-c \cdot Pdt$. Dunque, la trasformazione è del tipo

$$p \cdot dq = P \cdot dQ - K_0(Q, P, t)dt$$

con $K_0(Q, P, t) = c \cdot P$.

Definizione. *Diremo che la trasformazione $(Q, P) = (f(q, p, t), g(q, p, t))$ soddisfa una condizione di Lie se risulta*

$$p \cdot dq = P \cdot dQ + dF(Q, P, t) - K_0(P, Q, t)dt. \tag{37}$$

per una qualche F e K_0.

Tale definizione di condizione di Lie è adattata al caso univalente, ed è quindi un caso particolare della condizione di Lie più generale.

Il legame fra condizione di Lie (37) e trasformazioni canoniche univalenti è dato dalla seguente:

Proposizione. *Se la trasformazione $(Q, P) = (f(Q, P, t), g(Q, P, t))$ soddisfa la condizione di Lie (37), per qualche funzione F e K_0, allora è una trasformazione canonica univalente, e coniuga H alla Hamiltoniana*

$$K = H \circ w^{-1} + K_0. \tag{38}$$

Viceversa, se la trasformazione è canonica univalente allora esistono F e K_0 tali che la condizione (37) sia soddisfatta, ed in tal caso si coniuga H alla (38).

Tale risultato permette non solo di verificare se le trasformazioni di variabili sono canoniche, ma fornisce un metodo per costruire delle trasformazioni che siano sicuramente canoniche.

Innanzitutto, osserviamo che la condizione di Lie

$$p \cdot dq = P \cdot dQ + dF - K_0 dt$$

è una uguaglianza fra forme differenziali, che possiamo rappresentare utilizzando diversi sistemi di variabili indipendenti:

- se oltre al tempo t, le variabili indipendenti sono le Q, P, la forma $p \cdot dq$ va pensata come differenziale

  $$g^{-1}(P, Q, t) \cdot df^{-1}(P, Q, t)$$

  ove

  $$q = f^{-1}(Q, P, t) \quad , \quad p = g^{-1}(Q, P, t)$$

  sono le equazioni che invertono la trasformazione.

- se oltre al tempo t, le variabili indipendenti sono le (q, p), la forma $P \cdot dQ$ va pensata come differenziale

$$P \cdot dQ = g(q, p, t) \cdot df(q, p, t).$$

- possiamo addirittura pensare alla trasformazione di variabili come una funzione che permette di esprimere, per ogni tempo t, un sottoinsieme di $2n$ variabili delle q, p, Q, P in funzione delle rimanenti. Ad esempio, possiamo pensare di scrivere la trasformazione nella forma

$$p = u(q, Q, t) \quad , \quad P = v(q, Q, t),$$

e scrivere poi la condizione di Lie nelle variabili indipendenti q, Q, t. La condizione di Lie allora diventa

$$p \cdot dq = P \cdot dQ + dF(q, Q, t) - K_0(q, Q, t)dt$$

ove le funzioni F e K_0 sono rappresentate direttamente nelle variabili q, Q. Espandendo il differenziale di F si ottiene

$$p \cdot dq = P \cdot dQ + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot dq + \frac{\partial F}{\partial Q} \cdot dQ + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot dt - K_0(q, Q, t)dt$$

ed eguagliando i coefficienti di dq a destra e a sinistra dell'equazione, si ottiene:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}(q, Q, t);$$

eguagliando i coefficienti di dQ a destra e a sinistra dell'equazione, si ottiene:

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q}(q, Q, t);$$

eguagliando i coefficienti di dt a destra e a sinistra dell'equazione, si ottiene

$$K_0 = \frac{\partial F}{\partial t} \quad .$$

In definitiva, le equazioni

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial q}(q, Q, t) \\ P &= -\frac{\partial F}{\partial Q}(q, Q, t) \end{aligned} \tag{39}$$

forniscono le equazioni della trasformazione, di cui la funzione F viene detta *funzione generatrice*, mentre la nuova Hamiltoniana è:

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Le funzioni generatrici del tipo $F(q, Q, t)$ sono dette del primo tipo, ed indicate $F_1(q, Q, t)$. Infine, per ottenere una trasformazione canonica fra le variabili iniziali q, p e quelle finali Q, P è necessario poter invertire l'equazione

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}(q, Q, t)$$

rispetto alle Q, in modo da ottenere l'equazione $Q = f(q,p,t)$, e poi la seconda equazione diventa

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q}(q,Q,t) = -\frac{\partial F}{\partial Q}(q, f(q,p,t),t) = g(q,p,t).$$

La condizione che garantisce l'inversione è

$$\det \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \neq 0.$$

Esercizio. *Calcolare la trasformazione canonica generata da:* $F(q,Q,t) = qQ^2$.

La trasformazione è:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial q} = Q^2 \\ P &= -\frac{\partial F}{\partial Q} = -2qQ, \end{aligned} \tag{40}$$

e per inversione fornisce (scegliendo il segno +)

$$Q = \sqrt{p} \quad , \quad P = -2q\sqrt{p} \quad .$$

Verifichiamo:

$$\{Q,P\} = \{\sqrt{p}, -2q\sqrt{p}\} = -\frac{1}{2\sqrt{p}}(-2\sqrt{p}) = 1 \quad .$$

- possiamo pensare di scrivere la trasformazione nella forma

$$p = u(q,P,t) \quad , \quad Q = v(q,P,t),$$

e scrivere poi la condizione di Lie nelle variabili indipendenti q, P, t. Siccome vale

$$d(P \cdot Q) = P \cdot dQ + Q \cdot dP,$$

la condizione di Lie allora diventa

$$p \cdot dq = -Q \cdot dP + d(P \cdot Q) + dF - K_0 dt \quad ,$$

o anche ($d(P \cdot Q) + dF = dF_2$):

$$p \cdot dq = -Q \cdot dP + dF_2 - K_0 dt \quad .$$

Espandendo il differenziale di F_2 si ottiene

$$p \cdot dq = -Q \cdot dP + \frac{\partial F_2}{\partial q} \cdot dq + \frac{\partial F_2}{\partial P} \cdot dP + \frac{\partial F_2}{\partial t} \cdot dt - K_0(q,Q,t)dt$$

ed eguagliando i coefficienti di dq a destra e a sinistra dell'equazione, si ottiene:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}(q,P,t);$$

eguagliando i coefficienti di dP a destra e a sinistra dell'equazione, si ottiene:

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}(q, P, t);$$

eguagliando i coefficienti di dt a destra e a sinistra dell'equazione, si ottiene

$$K_0 = \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad .$$

In definitiva, le equazioni

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P, t) \\ Q &= \frac{\partial F_2}{\partial P}(q, P, t) \end{aligned} \tag{41}$$

forniscono le equazioni della trasformazione, di cui la funzione F_2 viene detta *funzione generatrice*, mentre la nuova Hamiltoniana è:

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Le funzioni generatrici del tipo $F_2(q, Q, t)$ sono dette del secondo tipo. Per ottenere una trasformazione canonica fra le variabili iniziali q, p e quelle finali Q, P è necessario poter invertire l'equazione

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P, t)$$

rispetto alle P, in modo da ottenere l'equazione $P = g(q, p, t)$. La condizione che garantisce l'inversione è

$$\det \frac{\partial^2 F_2}{\partial q \partial P} \neq 0.$$

- Si potrebbe continuare scegliendo altre variabili indipendenti, la cosa però non ha un gran interesse.

9 Il metodo di Hamilton–Jacobi

In questa sezione consideriamo il problema della integrazione delle equazioni di Hamilton di un sistema Hamiltoniano autonomo, di Hamiltoniana $H(q, p)$. Per una formulazione più generale del metodo di Hamilton–Jacobi si veda la sezione 7.2 delle dispense.

Il metodo della funzione generatrice consente di riformulare il problema della ricerca di trasformazioni canoniche

$$P = f(q, p) \quad , \quad Q = g(q, p) \tag{42}$$

che coniugano una data funzione di Hamilton $H(p, q)$ ad una funzione di Hamilton $K(P)$.

Si ricorda che, se tale trasformazione esiste, le equazioni di Hamilton per K:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad , \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0$$

si risolvono immediatamente, ottenendo:

$$P(t) = P(0) \quad , \quad Q(t) = Q(0) + \frac{\partial K}{\partial P}(P(0))t \quad .$$

Si noti che, i nuovi momenti $P = (P_1, \ldots, P_n)$ sono costanti del moto del problema, e soddisfano:

$$\{P_i, P_j\} = 0 \quad .$$

Questo significa che le n funzioni $f_1(q,p), \ldots, f_n(q,p)$ sono esse stesse costanti del moto per il sistema Hamiltoniano definito da $H(q,p)$. Dunque, *una condizione necessaria affinché la trasformazione (42) esista è che il sistema di Hamiltoniana $H(q,p)$ ammetta n costanti del moto indipendenti, ed in involuzione mutua rispetto alle parentesi di Poisson.* Tale condizione viene denominata anche **condizione di Liouville** per l'integrabilità di un sistema.

Cerchiamo la trasformazione (42) generandola con una opportuna funzione generatrice $F_2(q,P)$, cosicché la trasformazione assume la forma:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}(q,P) \quad , \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}(q,P) \quad . \tag{43}$$

e la generatrice F_2 soddisfa l'equazione:

$$H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}(q,P)\right) = K(P) \quad , \tag{44}$$

con una opportuna funzione K.

Il problema viene dunque posto nei termini seguenti: si consideri **l'equazione ridotta di Hamilton–Jacobi**:

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E \quad , \tag{45}$$

nella quale sono incognite sia la funzione W che la costante E.

Come usualmente succede per le soluzioni di equazioni differenziali, la soluzione dell'equazione ridotta di Hamilton–Jacobi dipende parametricamente da uno o più (a seconda della dimensione dello spazio delle fasi) costanti arbitrarie di integrazione. È dunque naturale cercare famiglie di soluzioni dipendenti da n parametri.

Si dice che l'equazione ammette un **integrale completo** se esiste una famiglia di soluzioni W, E dipendente da n parametri $P_1, \ldots, P_n$, e dunque porremo $W := W(q,P), E := E(P)$, tali che:

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial P \partial q} \neq 0 \quad .$$

Se un integrale completo esiste, allora la funzione:

$$F_2(q,P) = W(q,P)$$

soddisfa l'equazione (44) con $K = E(P)$, e le equazioni (43) definiscono una trasformazione canonica.

Problemi conservativi ad un grado di libertà. Per problemi conservativi ad un grado di libertà di Hamiltoniana:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2a(q)} + V(q)$$

l'equazione ridotta di Hamilton–Jacobi:

$$\frac{1}{2a(q)}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + V(q) = E$$

fornisce le due equazioni

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2a(q)(E - V(q))}$$

$$\frac{\partial W}{\partial q} = -\sqrt{2a(q)(E - V(q))}$$

che sono risolte da:

$$W^{\pm} = \pm \int \sqrt{2a(q)(E - V(q))}dq \quad .$$

Se si sceglie $P = E$, allora le $W^{\pm}$ forniscono la trasformazione canonica

$$p = \frac{\partial W^{\pm}}{\partial q} = \pm\sqrt{2a(q)(E - V(q))}dq$$

$$Q = \frac{\partial W^{\pm}}{\partial E} = \pm \int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2(E - V(q))}}dq \quad .$$

L'equazione per Q può anche essere scritta nella forma

$$Q = \pm \int_{q_*}^{q} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2(E - V(x))}}dx \quad ,$$

ove q_* è un valore qualsiasi della coordinata q.

La prima delle due equazioni ci dice che la W^+ definisce una trasformazione canonica nel semipiano delle (q,p) con $p > 0$; la W^- definisce una trasformazione canonica nel semipiano delle (q,p) con $p < 0$. La nuova Hamiltoniana è con evidenza $H(Q,E) = E$, e pertanto l'equazione di Hamilton per Q è $\dot{Q} = 1$, e dunque la seconda equazione della trasformazione fornisce:

$$Q(0) = \pm \int_{q_*}^{q(0)} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2(E - V(q))}}dq \ , Q(t) = Q(0) + t = \pm \int_{q_*}^{q(t)} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2(E - V(q))}}dq$$

e pertanto si ottiene

$$t = \pm \int_{q(0)}^{q(t)} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2(E - V(x))}}dx \quad .$$

Le soluzione del problema è dunque espressa a meno del calcolo di un integrale e dell'inversione di una funzione in una variabile. Tali operazioni sono dette *quadrature*. Le variabili Q, E sono anche dette variabili *tempo–energia*.

Sistemi con variabili cicliche. Se $H(q,p)$ non dipende dalla coordinata q_1, allora il momento coniugato p_1 è integrale del moto, $p_1(t) = p_1(0)$. È dunque conveniente cercare soluzioni dell'equazione di Hamilton-Jacobi che forniscano nuovi momenti P con: $P_1 = p_1$. Siccome dovrà risultare

$$P_1 = p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} \quad ,$$

si avrà necessariamente

$$W = P_1 q_1 + \tilde{W}(q_2, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n) \quad .$$

L'equazione di Hamilton–Jacobi per $H(q,p)$ diventa allora:

$$H\left(q_2, \ldots, q_n, P_1, \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q_n}\right) = E.$$

Se vi sono più coordinate cicliche, ad esempio $l < n$, allora si cercheranno soluzioni dell'equazione di Hamilton–Jacobi nella forma

$$W = \sum_{j=1}^{l} P_j q_j + \tilde{W}(q_{l+1}, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n) \quad ,$$

e corrispondentemente l'equazione di di Hamilton–Jacobi per $H(q,p)$ diventa:

$$H\left(q_{l+1}, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_l, \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q_{l+1}}, \ldots, \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q_n}\right) = E.$$

Supponiamo che tutte le variabili siano cicliche tranne una, la q_n, allora la procedura appena descritta conduce all'equazione:

$$H\left(q_n, P_1, \ldots, P_{n-1}, \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q_n}\right) = E,$$

che di fatto è una equazione differenziale ordinaria nella variabile q_n, e pertanto è risolubile con una quadratura. Infatti, espicitando da questa equazione la derivata parziale

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial q_n} = \varphi(q_n, P_1, \ldots, P_{n-1}, E),$$

espressione valida per q_n in un intorno di un certo q_n^*, allora una soluzione all'equazione di Hamilton–Jacobi si ottiene definendo

$$\tilde{W}(q_n, P_1, \ldots, P_{n-1}, E) = \int_{q_n^*}^{q_n} \varphi(x, P_1, \ldots, P_{n-1}, E) dx.$$

Le equazioni della trasformazione si ottengono per inversione delle equazioni (avendo posto $P_n = E$):

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$Q_j = \frac{\partial W}{\partial P_j} \qquad j = 1, \ldots, n$$

ovvero, dalla particolare scelta di W:

$$p_j = P_j \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

$$p_n = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q_n} = \varphi(q_n, P_1, \ldots, P_{n-1}, E)$$

$$Q_j = q_j + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial P_j} \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

$$Q_n = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial E}.$$

Si osservi che, poiché la trasformazione coniuga $H(q,p)$ a $\tilde{H}(Q,P) := P_n = E$, allora anche le $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ sono integrali primi mentre $\dot{Q}_n = 1$, cioè $Q_n(t) = Q_n(0) + t$.

Osservazione. Il metodo appena descritto può anche essere utilizzato per determinare una soluzione $S(q,P,t)$ della cosiddetta equazione di Hamilton–Jacobi (completa):

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

che genera la trasformazione canonica dipendente dal tempo per inversione delle equazioni:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial S}{\partial P} \end{aligned} \tag{46}$$

che coniuga l'Hamiltoniana $H(q,p,t)$ alla Hamiltoniana:

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{47}$$

Nel caso in cui H sia indipendente dal tempo, allora conviene scegliere $S(q,P,t)$ nella forma separata:

$$S(q,P,t) = W(q,Q) - \phi(P)t$$

cosicché W si determina per soluzione della cosiddetta equazione ridotta di Hamilton–Jacobi:

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \phi(P)$$

Pertanto $W(q,P)$ è la soluzione dell'equazione ridotta di Hamilton– Jacobi e la trasformazione

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial W}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial W}{\partial P} \end{aligned} \tag{48}$$

coniuga $H(q,p)$ alla Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P) = \phi(P)$. La trasformazione (48) non è uguale alla trasformazione (46). In particolare la trasformazione (46) coniuga $H(q,p)$ alla Hamiltoniana $K(Q,P,t) = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H - \phi = 0$. Pertanto, le nuove variabili P, Q sono tutte costanti del moto, e la trasformazione canonica (che dipende dal tempo) attraverso l'inversione di (46) fornisce le soluzioni delle equazioni di Hamilton, per ogni valore delle $P := P(0)$, $Q := Q(0)$.

Frequentemente si cercano soluzioni con $P_n = \phi(P_1, \dots, P_n) = E$, cosicché la soluzione è nella forma

$$S(q,P,t) = W(q,Q) - Et$$

con $W(q,Q)$ che risolve

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E \quad .$$

La trasformazione definita da S è allora:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial W}{\partial q} \\ Q_i &= \frac{\partial W}{\partial P_i} \quad i = 1, \dots n-1 \\ Q_n &= \frac{\partial W}{\partial E} - t. \end{aligned} \tag{49}$$

Hamiltoniane separabili. La funzione di Hamilton $H(q,p)$ si dice in forma separabile se esiste una funzione

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

ed n funzioni $H_1(q_1,p_1), \dots, H_n(q_n,p_n)$ tali che

$$H(q,p) = f(H_1(q_1,p_1), \dots, H_n(q_n,p_n)).$$

È immediato verificare che ogni funzione $H_i(q_i,p_i)$ è un integrale primo.

Infatti, risulta:

$$\frac{d}{dt}H_i = \frac{\partial H_i}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H_i}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial H_i}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H_i}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial H_i}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial H_i}{\partial p_i} - \frac{\partial H_i}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial H_i}{\partial p_i} = 0.$$

È pertanto naturale cercare soluzioni della equazione di Hamilton–Jacobi in cui i nuovi momenti P_i corrispondano agli integrali primi $H_i(q_i,p_i)$. L'idea è costruire la funzione generatrice mediante le funzioni $W_i(q_i,P_i)$ che risolvono l'equazione di Hamilton–Jacobi per i sistemi Hamiltoniani ad un grado di libertà $H_i(q_i,p_i)$, cioè funzioni $W_i(q_i,P_i)$ che risolvono l'equazione:

$$H_i\left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}\right) = P_i.$$

Nel dominio (q_i,p_i) tale che $\frac{\partial H}{\partial p_i} \neq 0$, l'equazione ridotta per H_i ammette soluzione esplicitabile per mezzo di una quadratura. Precisamente, fissando q_i^* arbitrario , si ottiene:

$$W_i(q_i,P_i) = \int_{q_i^*}^{q_i} \varphi_i(x,P_i)dx$$

ove $\varphi_i(q_i,P_i)$ è la funzione che fornisce una soluzione p_i all'equazione $H_i(q_i,p_i) = P_i$, cioè: $H_i(q_i,\varphi_i(q_i,P_i)) = P_i$.

Soluzione dell'equazione completa. La funzione

$$S(q,P)=\sum_{i=1}^{n}W_i(q_i,P_i)-f(P)t$$

è una soluzione dell'equazione (completa) di Hamilton–Jacobi. Essa genera la trasformazione canonica dipendente dal tempo per inversione delle equazioni:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial S}{\partial P} \end{aligned} \tag{50}$$

ovvero delle equazioni

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W_i}{\partial q_i} \quad i=1,\dots,n \\ Q_i &= \frac{\partial W_i}{\partial P_i}-\frac{\partial f}{\partial P_i}t \quad i=1,\dots n. \end{aligned} \tag{51}$$

Soluzione dell'equazione ridotta. La funzione

$$W(q,P)=\sum_{i=1}^{n}W_i(q_i,P_i)$$

è una soluzione dell'equazione (ridotta) di Hamilton–Jacobi:

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=f(P).$$

Essa genera la trasformazione canonica per inversione delle equazioni:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial W}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial W}{\partial P} \end{aligned} \tag{52}$$

ovvero delle equazioni:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W_i}{\partial q_i} \quad i=1,\dots,n \\ Q_i &= \frac{\partial W_i}{\partial P_i} \quad i=1,\dots n, \end{aligned} \tag{53}$$

e coniuga l'Hamiltoniana $H(q,p)$ alla Hamiltoniana $f(P)$.

Una osservazione sul metodo di Hamilton–Jacobi. Abbiamo visto diverse formulazioni del metodo di Hamilton–Jacobi, ovvero la costruzione di trasformazioni canoniche attraverso la soluzione dell'equazione completa, oppure dell'equazione ridotta, nonché scelte diverse dei nuovi momenti coniugati, suggerite dal tipo di Hamiltoniana. Va detto che i diversi metodi corrispondono soprattutto a due diversi utilizzi del metodo. Un primo utilizzo del metodo di Hamilton–Jacobi ha a che fare con la soluzione delle equazioni di Hamilton, a meno di operazioni dette quadrature (integrali di funzioni rispetto ad una variabile, ed inversioni di funzioni rispetto ad una variabile). A seconda delle simmetrie della Hamiltoniana, si cerca di indovinare la forma della soluzione della equazione di Hamilton–Jacobi. Qualora si disponga di una soluzione dell'equazione completa che genera una trasformazione che coniuga H alla Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P)=0$, allora i nuovi momenti P e nuove coordinate Q sono costanti del moto, e per ogni loro valore la trasformazione canonica (che dipende dal tempo) permette di ricostruire la soluzione nelle variabili originali. Le soluzioni della equazione ridotta forniscono trasformazioni canoniche indipendenti dal tempo, pertanto Q,P sono variabili dello spazio delle fasi. Le trasformazione coniuga H ad una qualche Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P):=\tilde{H}(P)$. Le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili si risolvono immediatamente, ed attraverso la trasformazione canonica si ricostruisce la soluzione nelle variabili originali. La funzione $\tilde{H}(P)$ è essa stessa incognita. Non esiste un modo univoco per determinare $\tilde{H}(P)$: diverse scelte di $\tilde{H}(P)$ conducono a diverse soluzioni $W(q,P)$ ed a diversi sistemi di variabili Q,P. Spesso, si trovano soluzioni ponendo $P_n=E$. In tal caso, le variabili P e le prime $Q_1,\ldots,Q_{n-1}$ coordinate sono integrali primi, mentre Q_n avanza linearmente con il tempo. Siccome anche fra i sistemi integrabili non è usuale l'esistenza di $2n-1$ integrali primi indipendenti (benché questo si verifichi per alcuni sistemi di grande importanza, come il problema di Keplero, si veda sotto), tale metodo di soluzione conduce a delle coordinate Q,P che sono solo variabili locali per lo spazio delle fasi, e al crescere del tempo la soluzione esce dal loro insieme di definizione. Dunque, questa applicazione del metodo di Hamilton Jacobi conduce sostanzialmente ad una intergrazione locale delle equazioni del moto. Il secondo utilizzo del metodo di Hamilton–Jacobi riguarda la costruzione di variabili canoniche definite globalmente nello spazio delle fasi, che coniugano $H(q,p)$ ad una funzione $\tilde{H}(Q,P):=\tilde{H}(P)$. Essendo globali, la soluzione è descritta dalle equazioni

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial\tilde{H}}{\partial P_i}$$

per ogni tempo $t\in\mathbb{R}$. Inoltre, l'insieme di definizione delle variabili Q deve essere il più semplice possibile. Per quanto possibile, è utile che ciascuna Q_i sia una variabile definita in tutto $\mathbb{R}$, oppure sia un angolo definito in $[0,2\pi]$. Qualora tutte le variabili Q_i siano angoli, le variabili Q,P vengono dette di angolo–azione. Il metodo di costruzione delle variabili di angolo–azione richiede dunque qualche ingrediente in piú rispetto a quelli che abbiamo visto in queste note, ed è descritto nella dimostrazione del celebre teorema di Liouville–Arnol'd, che non affrontiamo in questo corso. Qui possiamo invece mostrare come, attraverso la soluzione della equazione di Hamilton–Jacobi del problema di Keplero secondo i metodi descritti, si possano costruire variabili canoniche globali, grazie al fatto che il problema di Keplero ammette $2n-1$ integrali primi indipendenti.

10 Il metodo di Hamilton-Jacobi ed il problema di Keplero

Forniamo i dettagli della costruzione della soluzione del problema di Hamilton–Jacobi per il problema di Keplero spaziale, ovvero il problema definito da un punto materiale P di massa μ soggetto al potenziale

$$V(x,y,z)=-\frac{G}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad .$$

È conveniente utilizzare le coordinate sferiche (r, ϕ, θ) definite da:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \quad , \end{aligned} \tag{54}$$

cosicché l'energia cinetica assume la forma:

$$T = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta)$$

e l'energia potenziale

$$V = -\frac{G}{r} \quad .$$

Dalla lagrangiana:

$$L(r, \phi, \theta, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) - V(r)$$

si ottengono i momenti coniugati

$$\begin{aligned} p_r &= \mu\dot{r} \\ p_\theta &= \mu r^2\dot{\theta} \\ p_\phi &= \mu r^2 \sin^2\theta \ \dot{\phi} \end{aligned} \tag{55}$$

e la Hamiltoniana:

$$H(r, \phi, \theta, p_r, p_\phi, p_\theta) = \frac{1}{2\mu}\Big(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\Big) - \frac{G}{r}. \tag{56}$$

L'equazione ridotta di Hamilton–Jacobi è dunque

$$\frac{1}{2\mu}\Big(\frac{\partial W}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{2\mu r^2}\Big(\frac{\partial W}{\partial \theta}\Big)^2 + \frac{1}{2\mu r^2 \sin^2\theta}\Big(\frac{\partial W}{\partial \phi}\Big)^2 - \frac{G}{r} = E \quad . \tag{57}$$

Determiniamo una famiglia di soluzioni $W(q, P)$ per l'equazione ridotta, utilizzandola poi per generare la trasformazione canonica che conduce ad un insieme di variabili $(R, \Phi, \Theta, P_R, P_\Phi, P_\Theta)$, ove i nuovi momenti P_R, P_Φ, P_Θ sono costanti del moto, e le nuove coordinate R, Φ, Θ hanno un'interpretazione geometrica particolare.

Il metodo di soluzione dell'equazione di Hamilton–Jacobi è suggerito dall'analisi delle simmetrie del problema. Il problema è invariante per rotazioni, dunque oltre all'energia E, ha come integrale primo il vettore momento angolare:

$$\underline{m} = \mu(x, y, z) \wedge (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad ,$$

ed in particolare sono integrali primi la norma di $\underline{m}$: cioè $m := \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}$, e anche la sua proiezione lungo un asse qualsiasi, ad esempio l'asse z:

$$m_z = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Passando a coordinate polari, si trova:

$$m_z = p_\phi \quad , \quad m^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} \quad .$$

La funzione di Hamilton (56) non dipende dalla coordinata ϕ, che pertanto è una coordinata ciclica, ed il momento ad essa coniugato è una costante del moto. Infatti, dalle equazioni di Hamilton, si ottiene

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad .$$

La presenza di coordinate cicliche semplifica la scelta della funzione W.

In generale, se $H(q,p)$ non dipende dalla coordinata q_1, allora il momento coniugato p_1 è integrale del moto, $p_1(t) = p_1(0)$. È dunque conveniente cercare soluzioni dell'equazione di Hamilton-Jacobi che forniscano nuovi momenti P con: $P_1 = p_1$. Siccome dovrà risultare

$$P_1 = p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} \quad ,$$

si avrà necessariamente

$$W = P_1 q_1 + \tilde{W}(q_2, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n) \quad .$$

Scegliamo dunque $P_\Phi = p_\phi$, e

$$W = P_\Phi \phi + \tilde{W}(r, \theta, P_R, P_\Theta, P_\Phi) \quad .$$

L'equazione di HJ diventa allora:

$$\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2\mu r^2}\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{P_\Phi^2}{2\mu r^2 \sin^2\theta} - \frac{G}{r} = E \quad . \tag{58}$$

Tale equazione ha una forma speciale, detta anche *separabile*, in quanto la dipendenza dalla variabile θ è completamente fattorizzata come segue,

$$\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2\mu r^2}\left[\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{P_\Phi^2}{\sin^2\theta}\right] - \frac{G}{r} = E \tag{59}$$

per cui la soluzione può essere ricondotta a due problemi ad un grado di libertà disaccoppiati:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \left[\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{P_\Phi^2}{\sin^2\theta}\right] & = & P_\Theta^2 \\ \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial r}\right)^2 + \frac{P_\Theta^2}{2\mu r^2} - \frac{G}{r} & = & E \end{array} \right. \tag{60}$$

risolubili dalla funzione in cui le variabili r e θ sono disaccoppiate:

$$\tilde{W} = W_r(r, P_\Theta, P_\Phi, E) + W_\theta(\theta, P_\Theta, P_\Phi, E)$$

ove W_r, W_θ risolvono le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{P_\Phi^2}{\sin^2\theta}\right] & = & P_\Theta^2 \\ \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{P_\Theta^2}{2\mu r^2} - \frac{G}{r} & = & E \quad . \end{array} \right. \tag{61}$$

Abbiamo posto il membro di destra della prima equazione uguale a P_Θ^2 per poi ritrovarci con una interpretazione fisica più agevole per P_Θ (altre scelte sono plausibili, ad esempio porre P_Θ al posto di P_Θ^2).

Si osservi che la prima equazione delle (61) esprime la conservazione del momento angolare, essendo

$$p_\theta = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \theta} \quad .$$

Il nuovo momento P_Θ assume dunque il significato di norma del momento angolare, mentre abbiamo già discusso $P_\Phi = m_z$.

La seconda equazione invece esprime l'integrazione della variabile radiale, che corrisponde ad un problema conservativo ad un grado di libertà di potenziale efficace:

$$V_*(r) = \frac{P_\Theta^2}{2\mu r^2} - \frac{G}{r} \quad .$$

Le equazioni (61) sono formalmente risolubili come equazioni di Hamilton–Jacobi di problemi meccanici ad un grado di libertà, le cui soluzioni si ottengono per integrazione delle equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} &= \sigma_\theta \sqrt{P_\Theta^2 - \frac{P_\Phi^2}{\sin^2\theta}} \\ \frac{\partial W_r}{\partial r} &= \sigma_r \sqrt{2\mu\Big(E + \frac{G}{r}\Big) - \frac{P_\Theta^2}{r^2}} \end{aligned} \tag{62}$$

ove $\sigma_\theta = \pm 1$, $\sigma_r = \pm 1$ sono entrambi ammissibili, e saranno convenientemente scelti in modo che σ_θ sia il segno di $p_\theta(0)$ e σ_r sia il segno di $p_r(0)$.

Rimane infine da scegliere l'ultimo momento P_R, che per analogia con la soluzione dei problemi conservativi ad un grado di libertà per la variabile r, poniamo $P_R = E$ (anche in questo caso, non c'è un'unica scelta possibile). Dunque, i nuovi momenti P_R, P_Θ, P_Φ corrispondono alla scelta di integrali primi E, m, m_z. La soluzione dell'equazione di Hamilton–Jacobi è allora:

$$W = P_\Phi \phi + W_r(r, P_\Theta, P_\Phi, E) + W_\theta(\theta, P_\Theta, P_\Phi, E)$$

con W_r, W_θ ottenibili per integrazione delle (62). La trasformazione canonica generata da W, che coniuga le variabili $(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi)$ alle variabili $(R, \Theta, \Phi, E, P_\Theta, P_\Phi)$ è ottenibile per inversione delle equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_\theta &=& \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = \sigma_\theta \sqrt{P_\Theta^2 - \frac{P_\Phi^2}{\sin^2\theta}} \\ p_r &=& \frac{\partial W_r}{\partial r} = \sigma_r \sqrt{2\mu\Big(E + \frac{G}{r}\Big) - \frac{P_\Theta^2}{r^2}} \\ p_\phi &=& P_\Phi \\ \Theta &=& \frac{\partial W_\theta}{\partial P_\Theta} + \frac{\partial W_r}{\partial P_\Theta} \\ R &=& \frac{\partial W_r}{\partial E} \\ \Phi &=& \phi + \frac{\partial W_\theta}{\partial P_\Phi} \end{array} \right. \tag{63}$$

e le equazioni del moto associate alla nuova Hamiltoniana $K = E$ forniscono

$$R(t) = R(0) + t$$

mentre tutte le altre nuove variabili $E, P_\Theta, P_\Phi, \Theta, \Phi$ sono costanti del moto. Questo fatto esprime la cosiddetta *super–integrabilità* del problema di Keplero spaziale, che ammette un numero di integrali primi indipendenti superiore agli integrali primi E, P_Θ, P_Φ necessari per integrare il sistema. In effetti, per ogni energia $E < 0$, le variabili Θ, Φ individuano l'argomento del pericentro e la longitudine del nodo dell'ellisse Kepleriana corrispondente all'orbita. La variabile R è invece una coordinata lungo l'orbita, ed il metodo di Hamilton–Jacobi garantisce la canonicità delle variabili $(R, \Theta, \Phi, P_R, P_\Theta, P_\Phi)$.