

Esercizio A - Soluzione.

1) Il sistema è soggetto a sole forze conservative con energia potenziale

$$U(y, \theta) = U^g + U^{el} = mg(y - l \cos \theta) + \frac{h}{2} y^2.$$

Gli equilibri sono dati dalle soluzioni $P = (y, \theta)$ di

$$U_y = mg + hy = 0, \quad U_\theta = mgl \sin \theta = 0$$

ovvero $P_1 = (-\frac{mg}{h}, 0)$, $P_2 = (-\frac{mg}{h}, \pi)$; La matrice Hessiana è

$$H_U(\theta) = \text{Diag}[h, mgl \cos \theta].$$

Pertanto:

$H_U(P_1) \in \text{Sym}^+ \Rightarrow P_1$ è stabile per THND, TLD;

$H_U(P_2) \notin \text{Sym}^+ \Rightarrow P_2$ è instabile per THND.

2) Calcoliamo la componente lagrangiana della forza di attrito viscosa:

$$\delta L^{att} = -kv_A \cdot \delta P_A = -k\dot{y}\hat{y} \cdot dy\hat{y} = Q_y dy + Q_\theta d\theta$$

da cui $Q_y = -k\dot{y} \neq 0$, $Q_\theta = 0$.

Non posso usare THND ma posso ancora usare TLD poichè $Q(y, \dot{y})\dot{y} = -k(\dot{y})^2 \leq 0$. Pertanto

P_1 è ancora stabile per TLD, nulla si può dire per P_2 .

3) Si aggiungono ora le forze apparenti, centrifuga e di Coriolis. La prima ammette potenziale

$$U^{cf} = -\frac{m}{2}\Omega^2 l^2 \sin^2 \theta,$$

mentre la forza di Coriolis, ortogonale al piano (x, y) ha componenti lagrangiane tutte nulle poichè gli spostamenti virtuali appartengono al piano (x, y) . Posso quindi usare THND e TLD. Il punto P_1 è ancora di equilibrio poichè è soluzione di

$$U_y = mg + hy = 0, \quad U_\theta = mgl \sin \theta - m\Omega^2 l^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

La nuova matrice Hessiana in P_1 verifica

$$H_U(P_1) = \text{Diag}[h, mgl - m\Omega^2 l^2] \in \text{Sym}^+ \Leftrightarrow \Omega^2 < \frac{g}{l}$$

pertanto P_1 è stabile se $\Omega^2 < \frac{g}{l}$ per THND o TLD, è instabile se $\Omega^2 > \frac{g}{l}$ per THND e nulla si può dire se $\Omega^2 = \frac{g}{l}$.