

Esercizi **B** del primo compito di Fisica Matematica 23/2/05

B₁

Un punto materiale di massa $m = 1$ è soggetto alla forza posizionale $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(OP) = (x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(OP) = (F_x, F_y, F_z) = (0, 4y^3, 0)$$

Tale forza sia l'unica attiva presente, si trascuri la gravità. Si vincoli il punto materiale sulla guida liscia circolare di raggio $R = 1$ centrata nel piano Oxy e sia θ l'angolo orientato antiorario (rispetto al semi-spazio $z > 0$) dal semi-asse positivo x al vettore OP :

$$\theta \mapsto \tilde{OP}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

1) Si scriva la componente tangenziale dell'equazione che governa i moti dinamicamente possibili. (Si osservi che il parametro lunghezza d'arco è in questo caso $s = \theta$.)

2) Si risolva esplicitamente il problema di Cauchy con dati iniziali:

$$\theta(0) = \pi/2, \quad \dot{\theta}(0) = \sqrt{2}.$$

3) Si abbozzi per tale sistema $\ddot{\theta} = f(\theta)$ un disegno del diagramma in fase.

Soluzione: la componente tangenziale dell'equazione (vettoriale) che regge i moti dinamicamente possibili è:

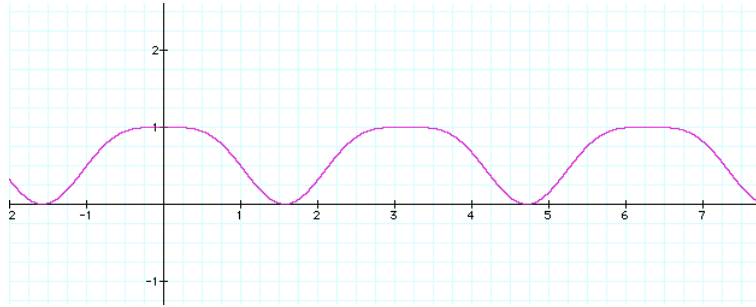
$$m\ddot{s} = \mathbf{F}(\tilde{OP}(\theta)) \cdot \frac{d}{d\theta} \tilde{OP}(\theta) \quad (m = 1, s = \theta, \mathbf{t} = \frac{d}{d\theta} \tilde{OP}(\theta))$$

$$\ddot{\theta} = 4 \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \int_{\theta_0=\pi/2}^{\theta} 4 \sin^3 \lambda \cos \lambda d\lambda = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \sin^4 \theta + 1$$

$$E(\pi/2, \sqrt{2}) = 1$$

Il grafico dell'energia potenziale $\mathcal{U}(\theta) = -\sin^4 \theta + 1$ è:



$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \sin^4 \theta + 1 = 1$$

$$|\dot{\theta}| = \sqrt{2} \sin^2 \theta, \quad \dot{\theta} = \text{sgn}(\dot{\theta}_0) \sqrt{2} \sin^2 \theta, \quad \dot{\theta} = \sqrt{2} \sin^2 \theta$$

$$\int_0^t \frac{\dot{\theta}(t')}{\sin^2 \theta(t')} dt' = \sqrt{2} t, \quad \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{1}{\sin^2 \theta'} d\theta' = \sqrt{2} t,$$

$$-\text{ctg} \theta \Big|_{\pi/2}^{\theta} = \sqrt{2} t, \quad (\text{ctg} \pi/2 = 0)$$

$$\text{infine :} \quad \theta(t) = \text{arccctg}(-\sqrt{2} t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \pi.$$

Si tratta di moto sulla separatrice.

B₂

Un punto materiale di massa $m = 1$ è soggetto alla forza posizionale $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(OP) = (x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(OP) = (F_x, F_y, F_z) = (0, 4y^3, 0)$$

Tale forza sia l'unica attiva presente, si trascuri la gravità. Si vincoli il punto materiale sulla guida liscia circolare di raggio $R = 1$ centrata nel piano Oxy e sia θ l'angolo orientato antiorario (rispetto al semi-spazio $z > 0$) dal semi-asse negativo y al vettore OP :

$$\theta \mapsto \tilde{OP}(\theta) = (\sin \theta, -\cos \theta, 0)$$

1) Si scriva la componente tangenziale dell'equazione che governa i moti dinamicamente possibili. (Si osservi che il parametro lunghezza d'arco è in questo caso $s = \theta$.)

2) Si risolva esplicitamente il problema di Cauchy con dati iniziali:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \sqrt{2}.$$

3) Si abbozzi per tale sistema $\ddot{\theta} = f(\theta)$ un disegno del diagramma in fase.

Soluzione: la componente tangenziale dell'equazione (vettoriale) che regge i moti dinamicamente possibili è:

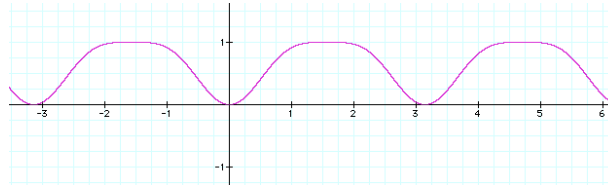
$$m\ddot{s} = \mathbf{F}(\tilde{OP}(\theta)) \cdot \frac{d}{d\theta} \tilde{OP}(\theta) \quad (m = 1, s = \theta, \mathbf{t} = \frac{d}{d\theta} \tilde{OP}(\theta))$$

$$\ddot{\theta} = -4 \cos^3 \theta \sin \theta$$

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \int_{\theta_0=\pi/2}^{\theta} -4 \cos^3 \lambda \sin \lambda d\lambda = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \cos^4 \theta + 1$$

$$E(0, \sqrt{2}) = 1$$

Il grafico dell'energia potenziale $\mathcal{U}(\theta) = -\cos^4 \theta + 1$ è:



$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \cos^4 \theta + 1 = 1$$

$$|\dot{\theta}| = \sqrt{2} \cos^2 \theta, \quad \dot{\theta} = \text{sgn}(\dot{\theta}_0) \sqrt{2} \cos^2 \theta, \quad \dot{\theta} = \sqrt{2} \cos^2 \theta$$

$$\int_0^t \frac{\dot{\theta}(t')}{\cos^2 \theta(t')} dt' = \sqrt{2} t, \quad \int_0^\theta \frac{1}{\cos^2 \theta'} d\theta' = \sqrt{2} t,$$

$$\text{tg} \theta \Big|_0^\theta = \sqrt{2} t, \quad (\text{tg} 0 = 0)$$

$$\text{infine :} \quad \theta(t) = \arctg(\sqrt{2} t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \pi/2.$$

Si tratta di moto sulla separatrice.