11 luglio 2005

A1. Si consideri una particella P di massa m vincolata senza attrito (vincolo liscio) su di un'asse orizzontale Ox di un sistema cartesiano $Oxyz$ associato ad uno spazio rotante uniformemente rispetto agli spazi inerziali con velocità angolare di trascinamento $\underline{\omega} = \omega \hat{z}$. Oltre alla gravità, $\underline{g} = -g\hat{z}$, la particella nel suo moto sull'asse x, è soggetta ad una resistenza di mezzo di tipo viscoso

$$\mathbf{F}^{visc} = -k\,\dot{OP}, \quad k > 0.$$

1) Tenendo in conto opportunamente delle forze apparenti, determinare esplicitamente tutte le soluzioni dei problemi di Cauchy del tipo:

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \ (\neq 0)$$

2) Usando direttamente le soluzioni trovate (oppure, primo e/o secondo metodo di Liapunov) dire se

$$(x^*, \dot{x}^*) = (0, 0)$$

è un equilibrio *stabile* o *instabile.*

Soluzione. La forza di Coriolis ha componente Lagrangiana nulla (il sistema è 1-dimensionale), c'è dunque solo la centrifuga da aggiungere: Sull'asse x (componente tangenziale):

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x - k\dot{x}.$$

Equazione caratteristica (soluzioni test $e^{\lambda t}$ ecc.):

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + k\lambda - m\omega^2) = 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4m^2\omega^2}}{2m}, \quad \lambda_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4m^2\omega^2}}{2m}$$

Integrale generale: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{\frac{-k+\sqrt{k^2+4m^2\omega^2}}{2m}t} + c_2 e^{\frac{-k+\sqrt{k^2-4m^2\omega^2}}{2m}t}$,

$$x(0, c_1, c_2) = c_1 + c_2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}x(0, c_1, c_2) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = \dot{x}_0$$

Infine:

$$\tilde{x}(t, 0, \dot{x}_0) = \frac{m\dot{x}_0}{\sqrt{k^2 + 4m^2\omega^2}} e^{-\frac{k}{2m}t}\left(e^{\frac{\sqrt{k^2+4m^2\omega^2}}{2m}t} - e^{-\frac{\sqrt{k^2+4m^2\omega^2}}{2m}t}\right)$$

Tale equilibrio *non* è stabile: Il primo metodo di Liapunov mostra che la matrice 2×2 associata a questo sistema lineare

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -k/m \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad \dot{z} = Az,$$

ha due autovalori (sono proprio λ_1 e λ_2) reali, uno negativo ed uno *positivo*: instabilità di $z = 0$. Oppure, basta vedere che per $\dot{x}_0$ piccolo arbitrariamente, cioè avvicinandoci arbitrariamente a $(0, 0)$ nella topologia di $\mathbb{R}^2$ con dati iniziali $(0, \dot{x}_0)$,

$$\lim_{t \to +\infty} \tilde{x}(t, 0, \dot{x}_0) = \mathrm{sgn}(\dot{x}_0)\infty.$$

A2. Si consideri una particella P di massa m vincolata senza attrito (vincolo liscio) su di un'asse orizzontale Ox di un sistema cartesiano $Oxyz$ associato ad uno spazio inerziale. Oltre alla gravità, la particella è soggetta

i) ad una forza di tipo viscoso dipendente dalla posizione oltre che dalla velocità:

$$\bar{\mathbf{F}}^{visc} = -|OP|^4 \,\dot{OP},$$

ii) ad una forza conservativa di energia potenziale $U(OP) = \frac{1}{6}|OP|^6$.

Usando opportunamente la funzione energia totale associata al sistema conservativo 1-dimensionale nel quale si è trascurata la forza viscosa, dimostrare che

$$(x^*, \dot{x}^*) = (0, 0)$$

è un equilibrio *stabile.*

Soluzione.

Nel caso di assenza del termine viscoso sussiste l'integrale dell'energia:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{6}x^6$$

che è definita positiva attorno a $(x^*, \dot{x}^*) = (0, 0)$ e lungo le soluzioni del nostro sistema $m\ddot{x} = -x^4\dot{x} - x^5$, la derivata di E composta con esse dà:

$$\dot{E}(x, \dot{x}) = (m\ddot{x} + x^5)\dot{x} = -x^4\dot{x}^2 \leq 0.$$

Dunque E è una funzione di Liapunov per la stabilità.