

- Fisica Matematica - Corso di Laurea in Matematica - 13 Luglio 2005

B. Nel piano Oxy , con y verticale ascendente, di un riferimento inerziale $Oxyz$ si consideri il sistema formato da un disco omogeneo di raggio R e massa M che rotola senza strisciare sull'asse orizzontale x e da un punto materiale P di massa m vincolato senza attrito all'asse x . Tra l'origine O e il baricentro G del disco è tesa una molla lineare di costante elastica h e tra il baricentro G e il punto P è tesa un'altra molla lineare di costante elastica k .

Si riferisca il sistema alle coordinate lagrangiane $s = x_G$ e $x = x_P$.

1. Determinare gli equilibri del sistema, e calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione $C^* = (x^*, s^*)$ di equilibrio stabile.

2. Si supponga ora che $k = 0$ e inoltre che sul punto P agisca una forza di attrito viscosa $F = -\nu v_P$, con $\nu > 0$. Dire se la configurazione C^* individuata al punto 1 è ancora di equilibrio e indagarne la stabilità con i teoremi visti nel corso.

3. Scrivere e risolvere le equazioni di Lagrange del sistema del punto 2.

Soluzione.

1. Il sistema è soggetto a sole forze potenziali (elastica) di potenziale (è un paraboloide nelle variabili (x, s))

$$U(x, s) = \frac{1}{2}[hs^2 + k(x - s)^2].$$

L'unica configurazione di equilibrio è $C^* = (0, 0)$, stabile per TLD o THND. L'energia cinetica è (uso la condizione di puro rotolamento)

$$T = \frac{1}{2}[m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}M\dot{s}^2]$$

Le frequenze di piccola oscillazione si trovano risolvendo l'equazione agli autovalori

$$\det(H_U - \omega^2 A) = \det \begin{pmatrix} k - \omega^2 m & -k \\ -k & k + h - \omega^2 \frac{3}{2}M \end{pmatrix} = 0.$$

2. Togliendo la seconda molla $k = 0$ e introducendo una forza non conservativa di componenti lagrangiane

$$Q_x(\dot{x}) = -\nu\dot{x}, \quad Q_x(\dot{x})\dot{x} = -\nu\dot{x}^2 \leq 0$$

che è nulla per velocità nulla si vede subito che C^* è ancora configurazione di equilibrio

$$Q_x(0) = 0 \quad \& \quad \frac{dU(s)}{ds} = 0$$

ove ora $U(s) = \frac{1}{2}hs^2$, anche se non è più unica; infatti ogni configurazione $C = (x, 0)$ è di equilibrio. Studiamo la stabilità di C^* . THND non è applicabile perchè $H_U(C^*)$ è degenere come funzione di (x, s) e TLD non è applicabile perchè C^* non è minimo isolato. Per il secondo metodo di Liapunov non possiamo usare l'energia totale

$$W(x, s, \dot{x}, \dot{s}) = T + U = \frac{1}{2}[m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}M\dot{s}^2] + \frac{1}{2}hs^2$$

come funzione di Liapunov perchè non è definita positiva attorno a $(0, 0, 0, 0)$.

Usiamo il primo metodo, o metodo spettrale. Le equazioni di Lagrange per il sistema sono

$$m\ddot{x} = -\nu\dot{x}, \quad \frac{3}{2}M\ddot{s} = -hs$$

già lineari e disaccoppiate. Posto $z = (x, s, v_x, v_s)$, l'equazione al primo ordine $\dot{z} = Az$ si scrive

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{s} &= v_s \\ \dot{v}_x &= -\frac{\nu}{m}v_x \\ \dot{v}_s &= -\frac{2}{3}\frac{h}{M}s \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\frac{h}{M} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A si trovano facilmente

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{\nu}{m}, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{2}{3} \frac{h}{M}}$$

Poichè $0 \in \text{Re}(\text{Spec}A)$, il primo metodo (così applicato) non dice nulla.

3. Osserviamo che il sistema delle equazioni di Lagrange è formato da due equazioni lineari, disaccoppiate. La loro soluzione generale è

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 + C_2 e^{-\frac{\nu}{m} t}$$

$$s(t) = C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t}$$