

- Fisica Matematica - Corso di Laurea in Matematica - 21 settembre 2004

B. Nel piano Oxy (con y verticale ascendente) di un sistema di riferimento inerziale $Oxyz$ si consideri una guida rettilinea *fissa* formante un angolo α , con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, con la direzione negativa dell'asse x e orientata con il verso positivo *concordemente* alla direzione di $\mathbf{g}$, accelerazione di gravità. Si consideri inoltre il sistema giacente nel piano Oxy formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare sulla guida e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2l$ avente un estremo libero di ruotare attorno al baricentro G del disco.

Si riferisca il sistema alle coordinate s , ascissa di G sulla guida orientata con origine nel punto O' di intersezione della guida con l'asse y e θ , angolo tra l'asta e la direzione negativa dell'asse y , valutato in senso antiorario.

Infine, tra il punto O' e il baricentro G del disco è tesa una molla di costante elastica $h > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio stabile (a meno del calcolo delle radici dell'equazione di secondo grado risultante).

Soluzione. Il sistema è soggetto alle forze gravitazionale ed elastica, entrambe conservative. Scegliamo come zero dell'energia potenziale gravitazionale la quota (ordinata) del punto O' . Allora, detto G' il baricentro dell'asta e C il punto di contatto guida-disco, si ha che

$$U^g = -g(My_G + my_{G'}), \quad y_C = s \sin \alpha, \quad y_G = y_C + R \cos \alpha, \quad y_{G'} = y_G + l \cos \theta$$

per cui

$$U = U^g + U^{el} = -g[(M + m)s \sin \alpha + ml \cos \theta] + \frac{h}{2}(s^2 + R^2).$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano risolvendo il sistema $\nabla U(s, \theta) = 0$

$$hs - g[(M + m) \sin \alpha] = 0, \quad gml \sin \theta = 0.$$

che ha soluzioni $P_1 = (\frac{g}{h}(M + m) \sin \alpha, 0)$ e $P_2 = (\frac{g}{h}(M + m) \sin \alpha, \pi)$. La matrice Hessiana valutata in P_1 è

$$H_U(P_1) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & gml \end{pmatrix} \in \text{Sym}^+$$

quindi P_1 è stabile per THND o TLD.

Calcoliamo l'energia cinetica del disco (T. Steiner più condizione di puro rotolamento):

$$T^D = \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + MR^2\right)\frac{\dot{s}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}M\dot{s}^2$$

e dell'asta:

$$T^A = \frac{m}{2}v_{G'}^2 + \frac{1}{2}I_{G'}\dot{\theta}^2, \quad I_{G'} = \frac{m(2l)^2}{12}$$

ove

$$v_{G'}^2 = \dot{x}_{G'}^2 + \dot{y}_{G'}^2 = (\dot{s} \cos \alpha + l \cos \theta \dot{\theta})^2 + (\dot{s} \sin \alpha - l \sin \theta \dot{\theta})^2 = \dot{s}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l \cos(\alpha + \theta) \dot{s} \dot{\theta}.$$

Pertanto, la matrice dell'energia cinetica in P_1 è

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(M + m) & ml \cos \alpha \\ ml \cos \alpha & \frac{4}{3}ml^2 \end{pmatrix}$$

e la frequenze delle piccole oscillazioni si calcolano determinando le radici dell'equazione

$$\det(H_U(P_1) - \omega^2 A(P_1)) = 0.$$