

- Fisica Matematica - Corso di Laurea in Matematica - 1 Settembre 2005

A. Nel piano Oxy con y verticale ascendente, di un riferimento $Oxyz$ si consideri il sistema costituito da una guida circolare liscia di raggio R centrata nell'origine e da un punto materiale P di massa m libero di scorrere sulla guida. Il riferimento $Oxyz$ ruota rispetto agli spazi inerziali con velocità angolare costante ω diretta lungo l'asse y . Inoltre sul punto P agisce, oltre al peso, una forza di attrito viscoso $F = -kv$, ove v è la velocità relativa di P . Si riferisca il sistema all'angolo θ tra la direzione negativa dell'asse y e il vettore OP , valutato in senso antiorario.

1) Scrivere l'equazione del moto nel riferimento rotante e proiettarla sul versore $\mathbf{t}$ della terna di Frenet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ per ottenere l'equazione pura del moto. Determinare le configurazioni di equilibrio al variare del parametro ω nei reali positivi.

2) Con riferimento alla equazione pura (la componente $(\mathbf{t})$), studiare la stabilità asintotica dell'equilibrio $\theta = 0$ al variare del parametro ω nei reali positivi (primo metodo di Liapunov)

3) Studiare la stabilità semplice dell'equilibrio $\theta = 0$ con tecniche viste diverse dal primo metodo di Liapunov.

Soluzione. 1. Nella terna (O, xyz) , rotante, compaiono le forze di inerzia, il peso, la reazione vincolare e la forza d'attrito viscosa

$$ma = F^{cf} + F^{cor} + mg + \Phi + F = -m\omega \wedge (\omega \wedge OP) - 2m\omega \wedge v + mg + \Phi - kv$$

ove, introducendo la terna di Frenet, si ha $a = R\ddot{\theta}\mathbf{t} + R\dot{\theta}^2\mathbf{n}$, $v = R\dot{\theta}\mathbf{t}$, $\Phi_t = 0$. Proiettando su $\mathbf{t}$ si ottiene l'equazione pura del moto

$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + m\omega^2 R \sin \theta \cos \theta - kR\dot{\theta}.$$

Equilibri. Ponendo $\ddot{\theta} = 0 = \dot{\theta}$ si ha, se $R\omega^2 \geq g$,

$$\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi, \quad \omega^2 R \cos \theta - g = 0 \Rightarrow \theta_{3,4} = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right).$$

2. Il sistema al primo ordine relativo all'equazione pura del moto si ottiene ponendo $\dot{\theta} = v$; il sistema linearizzato attorno all'equilibrio $(\theta, v) = (0, 0)$ è

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{R} + \omega^2 & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}$$

che ha autovalori

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + 4\left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right)}$$

pertanto

$$Re(Spect A) < 0 \Leftrightarrow -\frac{k}{m} + \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + 4\left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right)} < 0 \text{ i.e. } \Leftrightarrow \omega^2 < \frac{g}{R}.$$

Applicando il primo metodo di Liapunov si ha:

se $\omega^2 < \frac{g}{R}$, $\theta = 0$ è asintoticamente stabile,

se $\omega^2 > \frac{g}{R}$, $Re(\lambda_1) > 0$, $\theta = 0$ è instabile,

se $\omega^2 = \frac{g}{R}$, $0 \in Spect(A)$ il primo metodo non dice nulla

3. Il sistema è 1-dimensionale, soggetto a forze conservative, giroscopiche e dissipative. Non è possibile applicare quindi il metodo qualitativo delle cuve di fase, nè il THND. Possiamo applicare il T. di Lagrange-Dirichlet. Si vede che l'equazione pura del moto puo' essere messa nella forma

$$mR^2\ddot{\theta} = -\frac{dU}{d\theta}(\theta) - kR^2\dot{\theta}$$

con $U(\theta) = U^g + U^{cf} = -mgR \cos \theta - \frac{m}{2}\omega^2 R^2 \sin^2 \theta$ e che $\theta = 0$ è un minimo (quindi vi è stabilità semplice per TLD) se $\omega^2 R < g$.