Esercizio B (del 1 settembre 2005) Sulla superficie torica liscia di equazioni parametriche (l'immersione vincolare):

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ y = (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

è vincolato un punto materiale di massa m. Sia $R > r$. L'asse x è verticale discendente: $\mathbf{g} = g\,\hat{x}, \quad g > 0$

1) Determinare tutti i punti d'equilibrio e valutarne l'eventuale stabilità.

2) Determinare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

SOLUZIONE.

1) equilibri: L'energia potenziale è:

$$U(\phi,\theta) = -mg\tilde{x}(\phi,\theta) = -mg(R + r\cos\theta)\cos\phi,$$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial U}{\partial \phi} = mg(R + r\cos\theta)\sin\phi \\ 0 = \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = mgr\sin\theta\cos\phi \end{cases}$$

Dato che $R > r$ le soluzioni si ottengono per $\sin\phi = 0$ e $\sin\theta = 0$:

$$P_1 = (\phi_1,\theta_1) = (0,0), \quad P_2 = (0,\pi), \quad P_3 = (\pi,\pi), \quad P_4 = (\pi,0),$$

$$\nabla^2 U = \begin{pmatrix} mg(R + r\cos\theta)\cos\phi & -mgr\sin\theta\sin\phi \\ -mgr\sin\theta\sin\phi & mgr\cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 U|_1 = \begin{pmatrix} mg(R+r) > 0 & 0 \\ 0 & mgr > 0 \end{pmatrix} \qquad \text{def. pos., minimo, } \textbf{stabile}$$

$$\nabla^2 U|_2 = \begin{pmatrix} mg(R-r) > 0 & 0 \\ 0 & -mgr < 0 \end{pmatrix} \qquad \text{non def., sella, instabile}$$

$$\nabla^2 U|_3 = \begin{pmatrix} -mg(R-r) < 0 & 0 \\ 0 & mgr > 0 \end{pmatrix} \qquad \text{non def., sella, instabile}$$

$$\nabla^2 U|_4 = \begin{pmatrix} -mg(R+r) < 0 & 0 \\ 0 & -mgr < 0 \end{pmatrix} \qquad \text{def. neg., max, instabile}$$

2) La Lagrangiana del sistema è

$$L(\phi,\theta,\dot\phi,\dot\theta) = T(\phi,\theta,\dot\phi,\dot\theta) - U(\phi,\theta) =$$

$$L(\phi,\theta,\dot\phi,\dot\theta) = \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{a}(\phi,\theta)\begin{pmatrix}\dot\phi \\ \dot\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\dot\phi \\ \dot\theta\end{pmatrix}\right\rangle - U(\phi,\theta) =$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\phi, \theta) = \frac{1}{2}m[r^2\dot{\theta}^2 + (R + r\cos\theta)^2\dot{\phi}^2] + mg(R + r\cos\theta)\cos\phi.$$

Piccole Oscillazioni attorno a P_1:

$$0 = \det\left(\nabla^2 U(0,0) - \omega^2 \mathbf{a}(0,0)\right)$$

$$0 = \det\begin{pmatrix} ma(R+r) - \omega^2 m(R+r)^2 & 0 \\ 0 & mgr - \omega^2 mr^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{R+r}, \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{r}.$$