A1. Si consideri una particella P di massa m vincolata senza attrito (vincolo liscio) su di un'asse orizzontale Ox di un sistema cartesiano $Oxyz$ associato ad uno spazio inerziale. Oltre alla gravità, la particella è soggetta ad una forza di tipo viscoso

$$\mathbf{F}^{visc} = -k\,\dot{OP}, \quad k > 0.$$

1) Determinare esplicitamente tutte le soluzioni dei problemi di Cauchy:

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

2) Usando direttamente le soluzioni trovate (oppure primo e/o secondo metodo di Liapunov) dimostrare che

$$(x^*, \dot{x}^*) = (0, 0)$$

è un equilibrio *stabile*.

3) Dimostrare, o negare, che $(x^*, \dot{x}^*) = (0, 0)$ sia *asintoticamente stabile* (p.e., ancora usando direttamente le soluzioni trovate).

Soluzione. Sull'asse x (componente tangenziale): $m\ddot{x} = -k\dot{x}$.
Equazione caratteristica:

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + k\lambda) = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{k}{m}$$

Integrale generale: $x(t, c_1, c_2) = c_1 + c_2 e^{-\frac{k}{m}t}$,

$$x(0, c_1, c_2) = c_1 + c_2 = x_0$$

$$\frac{d}{dt}x(0, c_1, c_2) = -\frac{k}{m}c_2 = \dot{x}_0$$

$$\text{Infine :} \qquad \tilde{x}(t, x_0, \dot{x}_0) = \frac{m\dot{x}_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) + x_0,$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t, x_0, \dot{x}_0) = \dot{x}_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Per ogni fissato $\varepsilon > 0$,

$$||(\tilde{x}(t, x_0, \dot{x}_0), \frac{d}{dt}\tilde{x}(t, x_0, \dot{x}_0)||_{\mathbb{R}^2} \le |\tilde{x}(t, x_0, \dot{x}_0)| + |\frac{d}{dt}\tilde{x}(t, x_0, \dot{x}_0)||_{\mathbb{R}^2}| \le$$

$$\le \frac{m}{k}|\dot{x}_0| + |x_0|,$$

dunque se, per esempio, si prendono i dati iniziali tali che

$$|x_0|, |\dot{x}_0|, < \min\,\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{k}{m}\frac{\varepsilon}{2}\} =: \delta(\varepsilon)$$

allora

$$||(\tilde{x}(t,x_0,\dot{x}_0), \frac{d}{dt}\tilde{x}(t,x_0,\dot{x}_0)||_{\mathbb{R}^2} < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Tale equilibrio stabile *non* è asintoticamente stabile:

$$\lim_{t\to+\infty} \tilde{x}(t,x_0,\dot{x}_0) = \lim_{t\to+\infty} [\frac{m\dot{x}_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}) + x_0] \neq 0$$

nonostante che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t,x_0,\dot{x}_0) = \lim_{t\to+\infty} \dot{x}_0 e^{-\frac{k}{m}t} = 0.$$

A2. Si consideri una particella P di massa m vincolata senza attrito (vincolo liscio) su di un'asse orizzontale Ox di un sistema cartesiano $Oxyz$ associato ad uno spazio inerziale. Oltre alla gravità, la particella è soggetta

i) ad una forza di tipo viscoso dipendente dalla posizione oltre che dalla velocità:

$$\bar{\mathbf{F}}^{visc} = -|OP|^2 \,\dot{OP},$$

ii) ad una forza conservativa di energia potenziale $U(OP) = \frac{1}{4}|OP|^4$.

Usando opportunamente la funzione energia totale dell'analogo sistema conservativo 1-dimensionale nel quale si è trascurata la forza viscosa, dimostrare che

$$(x^*, \dot{x}^*) = (0,0)$$

è un equilibrio *stabile*.

Soluzione.

Nel caso di assenza del termine viscoso sussiste l'integrale dell'energia:

$$E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}x^4$$

che è definita positiva attorno a $(x^*, \dot{x}^*) = (0,0)$ e lungo le soluzioni del nostro sistema $m\ddot{x} = -x^2\dot{x} - x^3$,

$$\dot{E}(x,\dot{x}) = (m\ddot{x} + x^3)\dot{x} = (-x^2\dot{x} - x^3 + x^3)\dot{x} = -x^2\dot{x}^2 \leq 0.$$