SCRITTO DEL 20 SETTEMBRE 2005

Esercizio A Si consideri una guida rettilinea s appartenente ad un piano verticale Oxy, con y verticale ascendente, l'origine dell'ascissa su s coincide con l'origine di Oxy, inoltre s è orientata discendente, cioè il prodotto scalare del vettore accelerazione di gravità $\mathbf{g}$ con il versore unitario su s è positivo. La guida forma con l'asse x l'angolo α, $0 < \alpha < \pi/2$. Tale guida sia il vincolo liscio per una particella P di massa m posta a scorrere lungo essa. Sulla particella, oltre alla gravità, agisce una forza di resistenza di mezzo di tipo viscoso $\mathbf{F}^v = -k\,\mathbf{v}$, dove $\mathbf{v}$ è la velocità e $k > 0$.

1) Porre al tempo $t = 0$ la particella P in $s = 0$ e con velocità nulla. Determinare il moto che da lí parte: $s_k = s_k(t)$.

(Richiamo di teoria: L'integrale generale di un'equazione differenziale lineare *non omogenea* si determina sommando all'integrale generale dell'*omogenea* associata un integrale particolare della equazione *completa*. In questo caso, si cerchi la soluzione particolare tra le funzioni lineari in t).

2) Si studi, organizzando i conti indipendentemente dal punto 1), lo stesso problema di Cauchy, ora con $k = 0$, e si determini dunque: $s_0 = s_0(t)$.

3) Mostrare che $\lim_{k\to 0} s_k(t) = s_0(t)$.

SOLUZIONE

1) L'equazione tangenziale su s è: $m\ddot{s} = m\,g\sin\alpha - k\dot{s}$, $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. L'omogenea associata è $m\ddot{s} + k\dot{s} = 0$. Determiniamone l'integrale generale. L'equazione caratteristica è $m\lambda^2 + k\lambda = 0$, da cui $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{k}{m}$. Dunque: $s_{om.}(t, c_1, c_2) = c_1 + c_2\,e^{-\frac{k}{m}t}$. Dal suggerimento del testo si cerca una soluzione della completa del tipo $s_{part.}(t) = a\,t$, e a si determina inserendo questa candidata soluzione nell'equazione differenziale completa: $a = \frac{m}{k}g\,\sin\alpha$. Infine $s_{completa}(t) = c_1 + c_2\,e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k}g\,\sin\alpha\,t$.

$$\begin{aligned} 0 &= s(0) = c_1 + c_2, \\ 0 &= \dot{s}(0) = -\frac{k}{m}c_2 + \frac{m}{k}g\,\sin\alpha, \end{aligned}$$

si ottiene:

$s_k(t) = (\frac{m}{k})^2 g\sin\alpha(e^{-\frac{k}{m}t} - 1) + \frac{m}{k}g\,\sin\alpha t = g\sin\alpha[(\frac{m}{k})^2(e^{-\frac{k}{m}t} - 1) + \frac{m}{k}t]$.

2) L'equazione tangenziale su s è: $m\ddot{s} = m\,g\,\sin\alpha$, $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$. La soluzione è $s_0(t) = \frac{1}{2}g\,\sin\alpha\,t^2$.

3) $\lim_{k\to 0} s_k(t) = \lim_{k\to 0} g\sin\alpha[(\frac{m}{k})^2(e^{-\frac{k}{m}t} - 1) + \frac{m}{k}t] =$

$= \lim_{k\to 0} g\sin\alpha[\frac{1 - \frac{k}{m}t + \frac{1}{2!}(\frac{k}{m})^2t^2 - \frac{1}{3!}(\frac{k}{m})^3t^3 + \ldots - 1}{(\frac{k}{m})^2} + \frac{m}{k}t] = \frac{1}{2}g\,\sin\alpha\,t^2.$