

FISICA MATEMATICA
Scritto del 16 luglio 2006

Esercizio A.

1. Un punto materiale di massa $m > 0$ è vincolato su di un asse x orizzontale ed è soggetto alla gravità, ad una forza elastica lineare di costante $h > 0$ e di centro O , l'origine di x ; inoltre, la particella è soggetta alla forza d'attrito:

$$\mathbf{F}^{attr.} = -\nu |\dot{x}| \hat{\mathbf{x}}$$

dove $\hat{\mathbf{x}}$ è il versore dell'asse x e $\nu > 0$. Studiarne equilibri e stabilità.

2. Si consideri il sistema differenziale nel piano:

$$\dot{x} = (y - x)(x^2 + y^2)$$

$$\dot{y} = -(x + y)(x^2 + y^2)$$

Usando $W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ studiare la stabilità dell'origine.

1. Un punto materiale di massa $m > 0$ è vincolato su di un asse x orizzontale ed è soggetto alla gravità, ad una forza elastica lineare di costante $h > 0$ e di centro O , l'origine di x ; inoltre, la particella è soggetta alla forza d'attrito (è costante in norma):

$$\mathbf{F}^{attr.} = -\nu \text{sign}(\dot{x}) \hat{\mathbf{x}}$$

dove $\hat{\mathbf{x}}$ è il versore dell'asse x e $\nu > 0$. Studiarne equilibri e stabilità.

2. Si consideri il sistema differenziale nel piano:

$$\dot{x} = (y - x)(x^2 + y^2)$$

$$\dot{y} = -(x + y)(x^2 + y^2)$$

Usando $W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ studiare la stabilità dell'origine.

Soluzione (traccia).

1. Si arriva a stabilire che i moti dinamicamente possibili per il sistema sono le soluzioni di

$$m\ddot{x} = -hx - \nu \text{sign}(\dot{x})$$

Usando l'energia (Lagrange-Dirichlet) $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + \frac{1}{2}h|x|^2$:

$$\dot{E} = -\nu \text{sign}(\dot{x})\dot{x} = -\nu |\dot{x}| \leq 0$$

Dunque $x = 0$ è stabile (stabilità semplice).

2.

$$\dot{V} = x(y - x)(x^2 + y^2) - y(x + y)(x^2 + y^2) = -(x^2 + y^2)^2 \leq 0$$

si ha dunque l'asintotica stabilità dell'origine $(0, 0)$.