FISICA MATEMATICA
Scritto del 16 luglio 2006

Esercizio B. Nel piano verticale Oxy di un riferimento inerziale $Oxyz$ si consideri il sistema costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R vincolato a scorrere senza strisciare (puro rotolamento) sull'asse orizzontale x. Si definisca la posizione del disco tramite l'angolo θ valutato positivamente in senso orario, tra una retta verticale passante per il centro C del disco e un diametro AB del disco. Si supponga che $\theta = 0$ quando $x_C = 0$ e il segmento BA è concorde con la direzione positiva dell'asse y.

Tra il centro C del disco e il punto $C' = (0, R)$ sull'asse y è tesa una molla di costante elastica $h > 0$. Nel punto B sulla circonferenza è vincolata in modo liscio una sbarra omogenea BP di massa m e lunghezza l. Si riferisca la posizione della sbarra all'angolo ϕ tra la direzione negativa dell'asse y e la sbarra BP, valutato positivamente in senso antiorario.

1. Scrivere l'energia potenziale del sistema e determinare le posizioni di equilibrio. Enunciare la condizione sui dati strutturali del problema per la quale esistono più di due posizioni di equilibrio.

2. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio a scelta.

Esercizio B. Soluzione. Il sistema è soggetto alla forza gravitazionale ed elastica, entrambe conservative. L'energia potenziale complessiva è

$$U = U^g + U^{el} = mgy_G + \frac{h}{2}x_C^2 = -mg(R\cos\theta + \frac{l}{2}\cos\phi) + \frac{h}{2}R^2\theta^2 + cost.$$

Le configurazioni di equilibrio sono le soluzioni di

$$U_\theta = hR^2\theta + mgR\sin\theta = 0, \quad U_\phi = mg\frac{l}{2}\sin\phi = 0.$$

La prima equazione si risolve attraverso il confronto dei grafici di $y = \sin\theta$ e $y = -\frac{mg}{hR}\theta$. Si vede inoltre che, con buona approssimazione, se

$$\frac{mg}{hR} > \frac{2}{3\pi}$$

l'unica soluzione è $\theta = 0$, altrimenti vi sono almeno due coppie di soluzioni $\pm\theta^*$ simmetriche rispetto a $\theta = 0$. La seconda equazione ha le soluzioni evidenti $\phi = 0$ e $\phi = \pi$. Si ha quindi che la configurazione $\theta = 0$ $\phi = 0$ è di equilibrio stabile poichè la matrice Hessiana

$$H_U(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} hR + mg\cos\theta & 0 \\ 0 & mgl\cos\phi \end{pmatrix}$$

è ivi definita positiva. Calcoliamo l'energia cinetica del sistema. Per il disco si ha facilmente

$$T^D = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\dot{\theta}^2.$$

Per l'asta si usa ancora il teorema di Konig

$$T^A = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\phi}^2$$

ove

$$x_G = R\theta - R\sin\theta + \frac{l}{2}\sin\phi, \quad y_G = -R\cos\theta - \frac{l}{2}\cos\phi + cost.$$

Derivando, quadrando, sommando e valutando l'energia cinetica nella posizione di equilibrio stabile $\theta = 0$, $\phi = 0$, si trova la seguente espressione per la matrice dell'energia cinetica

$$A = \begin{pmatrix} \mu & mRl \\ mRl & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix} \qquad \mu := (2m + \frac{3}{2}M)R^2$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(H_U(0,0) - \omega^2 A) = 0.$$