17 settembre 2007

B. Nel piano verticale Oxy, y verticale ascendente, due anelli P e Q, di massa m e M rispettivamente, sono vincolati ad una circonferenza di raggio R e centro $N = (O, R)$. Una molla, di costante elastica k, collega P al punto fisso O mentre una seconda molla, di costante elastica h, collega P con Q. Come coordinate lagrangiane si considerino gli angoli ϑ e φ che la semiretta della direzione negativa dell'asse y forma rispettivamente con i raggi NP e NQ, valutati in senso anti-orario.

Nel caso $M = 2m$, $k = 3mg/R$, $h = 2mg/R$, studiare le frequenze di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile (individuarlo, e dimostrare che è tale).

Soluzione B.

$$T(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} mR^2 & 0 \\ 0 & 2mR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Usando il teorema di Carnot, "per ogni triangolo di lati a, b e c con α l'angolo interno tra a e b, si ha che $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha$", si scrive l'energia potenziale gravitazionale ed elastica:

$$U((\vartheta, \varphi) = -4mgR\cos\vartheta - 2mgR\cos\varphi - 2mgR\cos(\varphi - \vartheta)$$

$$U_{,\vartheta} = 4mgR\sin\vartheta - 2mgR\sin(\varphi - \vartheta)$$

$$U_{,\varphi} = 2mgR\sin\varphi + 2mgR\sin(\varphi - \vartheta)$$

$(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ risolve

$$U_{,\vartheta} = 0$$

$$U_{,\varphi} = 0$$

inoltre

$$\nabla^2 U(0,0) = mgR \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, così $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ è stabile.

$$\det \left(mgR \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \omega^2 mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{g}{R}(4 \pm \sqrt{6})$$