LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
ESAME — 17 Settembre 2006

Esercizio A. Nel riferimento inerziale $Oxyz$, con y verticale ascendente si consideri il sistema costituito da un punto materiale di massa m vincolato in modo liscio ad una guida rettilinea coincidente con l'asse orizzontale x. Il punto è soggetto alla forza posizionale $F(x, y, z) = mx\hat{\mathbf{x}}$ (repulsore armonico) e a gravità. Si vuole studiare il moto del punto con il metodo qualitativo per sistemi unidimensionali soggetti a forze posizionali. Adottando la coordinata x come ascissa curvilinea sulla guida,

1. Scrivere l'equazione pura del moto
2. Disegnare il ritratto di fase (curve nel piano delle fasi) determinando l'equazione di tali curve
3. Indagare la stabilità delle configurazioni di equilibrio
4. Scrivere le leggi orarie del moto corrispondenti a casi $e > 0$, $e = 0$, $e < 0$.

Possono risultare utili i seguenti integrali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

SOLUZIONI

Esercizio A

L'equazione del moto

$$m\ddot{OP} = -mg\hat{\mathbf{y}} + mx\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{\Phi}$$

si proietta sul vincolo liscio (asse x) ottenendo

$$m\ddot{x} = mx = -\frac{d}{dx}U(x) \qquad U(x) = -\frac{m}{2}x^2.$$

L'equazione è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, quindi risolvibile elementarmente. Vogliamo applicare il metodo qualitativo. L'unico equilibrio è $x = 0$, instabile, perchè è massimo locale e globale di $U(x)$. Le traiettorie nello spazio delle fasi $(\dot{x}, x)$ sono determinate dalla conservazione dell'energia:

$$e = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}x^2, \qquad \text{i.e.} \qquad \dot{x}^2 - x^2 = a = \frac{2e}{m}$$

e la loro equazione è data da

$$\dot{x}(x) = sgn(\dot{x}_0)\sqrt{a + x^2}.$$

La legge oraria, a meno del calcolo di primitive e di inversione di funzione è

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{a + \xi^2}}.$$

Distinguiamo tre casi.

$e > 0$, i.e. $\dot{x}_0^2 > x_0^2$. Le curve sono iperboli con fuochi sull'asse $\dot{x}$, corrispondenti a moti senza inversione (punto di arresto). La legge oraria, usando il primo integrale, è $t_0 = 0$

$$sgn(\dot{x}_0)\ t = \ln\Big(\frac{x + \sqrt{x^2 + \frac{2e}{m}}}{x_0 + \sqrt{x_0^2 + \frac{2e}{m}}}\Big).$$

$e = 0$, i.e. $\dot{x}_0^2 = x_0^2$. Le curve sono rette per l'origine (separatrici) e la legge oraria è

$$x(t) = \pm x_0 e^{\pm t}$$

$e < 0$, i.e. $\dot{x}_0^2 < x_0^2$. Le curve sono iperboli con fuochi sull'asse x, corrispondenti a moti con inversione (punto di arresto). La legge oraria, usando il secondo integrale, è $t_0 = 0$

$$sgn(\dot{x}_0)\ t = \ln\Big(\frac{x + \sqrt{x^2 - \frac{2e}{m}}}{x_0 + \sqrt{x_0^2 - \frac{2e}{m}}}\Big).$$

L'inversione di funzione, per esempio nel secondo caso, ponendo $B = x_0 + \sqrt{x_0^2 - \frac{2e}{m}}$ e supponendo $\dot{x}_0 > 0$, passa per

$$e^t B - x = \sqrt{x^2 - \frac{2e}{m}}$$

da cui, quadrando, si perviene a

$$x(t) = \frac{e}{mB}e^{-t} - \frac{B}{2}e^t.$$