

Esercizio A 26 marzo 2007

A₁ Si consideri nel piano $\mathbb{R}^2$ il sistema differenziale non lineare del primo ordine X :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x^3 + y^3 \\ \dot{y} &= -x^3 - y^3 \end{cases}$$

Usando eventualmente una delle seguenti funzioni:

$$f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}(x^4 + y^4), \quad g(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + \frac{1}{4}(x^4 - y^4),$$

$$h(x, y) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4), \quad k(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$$

dimostrare che $(x, y) = (0, 0)$ è stabile. E' asintoticamente stabile?

A₂ Si consideri il sistema dinamico composto da un punto di massa $m = 1$ soggetto, oltre alla gravità $\underline{g} = (0, 0, -g)$, $g > 0$, alla forza di energia potenziale $U(x, y, z) = -x^4 + \sin(xyz)$. Il punto sia vincolato senza attrito sull'asse orizzontale x del sistema di riferimento $Oxyz$ associato ad uno spazio inerziale. Risolvere il problema di Cauchy per i seguenti dati iniziali:
 $x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{2}$.

Soluzione (traccia). Per **A₁**: la funzione di Liapunov da considerare è $h(x, y) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$, f e g non c'entrano nulla, data la presenza dei termini $\dot{x}, \dot{y}$; infine, benché anche k sia definita positiva attorno a $(0, 0)$, il segno della sua derivata di Lie non è facilmente decidibile attorno a $(0, 0)$ (in effetti, è negativo). Invece con h , che è def. positiva, si ha facilmente:

$$L_X h(x, y) = \dot{h}(x, y) = \dots = -x^6 - y^6 : \quad \text{definita negativa}$$

Si ha dunque l'asintotica stabilità.

Per **A₂**:

La gravità fa lavoro nullo, $\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + \mathcal{U}(x) = e$, dove $\mathcal{U}(x) = U(x, 0, 0) = -x^4$, $e = (\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + \mathcal{U}(x))|_{x=1, \dot{x}=\sqrt{2}} = 0$, $|\dot{x}| = \sqrt{2}x^2$, $\dot{x} = \text{sgn}(\dot{x}(0))\sqrt{2}x^2$,
 $\int_0^x \frac{dx}{x^2} = \sqrt{2}t$, $x(t) = \frac{1}{1-\sqrt{2}t}$.