Laurea di Primo Livello in Matematica
Fisica Matematica — 1 Appello 2006-07
26 Marzo 2007

Importante: *Non scrivere su questo foglio. Scrivere la soluzione degli esercizi A e B su due fogli distinti con il vostro nome e cognome.*

A

B Nel piano Oxy di un riferimento inerziale $Oxyz$, con l'asse y verticale ascendente, si consideri il sistema costituito da un punto P di massa m che scorre in modo liscio sul lato AB (ipotenusa) di una lamina triangolare ABC di massa M e altezza $AC = l$, avente la base BC vincolata a scorrere in modo lisco sull'asse orizzontale x. Inoltre, tra il punto A della lamina ed il punto Pè tesa una molla di costante elastica h.

Si indichi con β l'angolo relativo al vertice B della lamina. Si scelgano come parametri lagrangiani l'ascissa x del punto C della lamina e l'ascissa s del punto P rispetto ad una retta ggiacente su AB, con origine in A ($s_A = 0$) e orientata con il verso positivo concordemente ad AB.

a] Scrivere il potenziale delle forze (gravità ed elastica) agenti e calcolare l'energia cinetica del sistema.

b] Scrivere la Lagrangiana del sistema e, dopo aver riconosciuto il tipo di equazioni differenziali ottenute e la presenza di eventuali integrali primi, scrivere la soluzione esplicita delle equazioni di Lagrange per fissati dati iniziali

c] Dire cosa cambia nella soluzione del problema se invece di un punto materiale si considera un disco di massa m e raggio r (valga l'ipotesi di puro rotolamento) e la molla risulta tesa tra il punto A e il baricentro G del disco.

Soluzione esercizio B. Si tratta di una variante di un esercizio svolto a lezione, per cui scrivo solo una traccia della soluzione. Potenziale delle forze agenti:

$$U = U^g + U^{el} = -mgs\sin\beta + \frac{h}{2}s^2$$

Energia cinetica

$$T = T_{lam} + T_P = \frac{M}{2}\dot{x}_C^2 + \frac{m}{2}v_P^2 = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\cos\beta\dot{s}\dot{x})$$

L a Lagrangiana è $L = T - U$, indipendente da x. Vi sono quindi due integrali primi, $E = T + U$ e $\partial L/\partial\dot{x}$. Equazioni di Lagrange:

$$x: \qquad (M+m)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\beta = 0,$$

$$s: \qquad m\ddot{s} + m\cos\beta\ddot{x} = -hs + mg\sin\beta.$$

Ricavando $\ddot{x}$ dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda si ottiene un'equazione per s del tipo

$$a\ddot{s} + bs + c = 0, \quad a > 0,\ b > 0$$

lineare del secondo ordine non omogenea, che ha soluzione

$$s(t) = A\cos(\sqrt{\frac{b}{a}}t + \phi) - \frac{c}{b}$$

e A e ϕ si ricavano in base alle condizioni iniziali. L'evoluzione di x si ricava dalla prima equazione, nota $s(t)$.

Se ora consideriamo un disco al posto del punto materiale P, si vede subito che l'energia potenziale elastica e gravitazionale non variano perchè si aggiungono delle costanti. L'energia cinetica della lamina rimane invariata, mentre quella del disco viene ora calcolata con il Teorema di Konig:

$$T = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}(\omega, I_G\omega) = \frac{m}{2}v_P^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\frac{\dot{s}^2}{r^2}.$$