

Importante: *Non scrivere su questo foglio. Scrivere la soluzione degli esercizi A e B su due fogli distinti con il vostro nome e cognome.*

A1 Si consideri il sistema differenziale che descrive il moto di un punto materiale vincolato su di una guida rettilinea liscia con $x \in \mathbb{R}$

$$m\ddot{x} = f(x) = -(1+x^2)\dot{x} - a \sin x, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1) Studiare la stabilità dell'equilibrio $x = 0$ al variare del parametro a usando il primo metodo di Liapunov (metodo spettrale).

A2 Studiare la stabilità dell'equilibrio $x = 0$ del sistema differenziale

$$\dot{x} = x \wedge Ax, \quad A \in Mat(3, \mathbb{R})$$

usando $W(x) = (x, x)$ come funzione di Liapunov, $(\cdot, \cdot)$ prodotto scalare.

Soluzione. **A1** Il sistema ridotto al primo ordine è

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\frac{a}{m} \sin x - \frac{1+x^2}{m}v$$

Il sistema linearizzato attorno all'equilibrio $(0, 0)$ è

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\frac{a}{m}x - \frac{1}{m}v, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a}{m} & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono le soluzioni di $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$, ovvero

$$m\lambda^2 + \lambda + a = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2m}\right)^2 - \frac{a}{m}}$$

E' immediato vedere che : se $a > 0$ gli autovalori hanno parte reale negativa (equilibrio asintoticamente stabile), se $a = 0$ un autovalore è nullo (il metodo spettrale non dice nulla), se $a < 0$ un autovalore ha parte reale positiva (equilibrio instabile).

A2 La funzione proposta verifica $W(0) = 0$, $W(x) > 0$ se $x \neq 0$ ed è differenziabile. Inoltre

$$L_X W = \frac{dW}{dt} = 2x \cdot \dot{x} = 2x \cdot x \wedge Ax = 0$$

perchè i tre vettori sono complanari. L'equilibrio è stabile.