

Esercizio **B** 4 aprile 2007

B Si consideri nel piano $\mathbb{R}^2 = \{O, x, y\}$, y verticale ascendente ($\mathbf{g} = (0, -g)$, $g > 0$), un'asta AB di lunghezza $|AB| = \ell$ di massa trascurabile e incernierata in maniera liscia con l'estremo A nell'origine O . Nell'altro estremo B di tale asta è incernierata un'altra asta omogenea BC di lunghezza $|BC| = 2\ell$ e di massa m . Quali parametri Lagrangiani si considerino l'angolo ϑ dal semi-asse negativo y all'asta AB orientato anti-orario e l'angolo φ dalla locale verticale per B all'asta BC orientato anch'esso anti-orario.

- 1) Determinare un equilibrio stabile (verificare che è tale).
- 2) Scrivere la funzione energia cinetica del sistema.
- 3) Determinare le pulsazioni ω_1 e ω_2 di piccola oscillazione attorno all'equilibrio stabile.

Soluzione. Sia G il baricentro di BC .

$$\begin{cases} x_G(\vartheta, \varphi) &= \ell \sin \vartheta + \ell \sin \varphi \\ y_G(\vartheta, \varphi) &= -\ell \cos \vartheta - \ell \cos \varphi \end{cases}$$

$$\mathcal{U}(\vartheta, \varphi) = -mg(\ell \cos \vartheta + \ell \cos \varphi)$$

$$\begin{cases} 0 &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vartheta} = m\ell \sin \vartheta & \vartheta = 0, \pi \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = m\ell \sin \varphi & \varphi = 0, \pi \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \vartheta^2}(0, 0) = mg\ell > 0 \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2}(0, 0) = mg\ell > 0 \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \vartheta \partial \varphi}(0, 0) = 0$$

$$\Rightarrow (0, 0) \text{ è stabile}$$

$$T(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m \left[\ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \ell^2 \dot{\varphi}^2 + 2\ell^2 (\cos \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \right] + \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3} \dot{\varphi}^2$$

$$\mathcal{U}^{(0)}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2}mg\ell (\vartheta^2 + \varphi^2)$$

$$T^{(0)}(\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} m\ell^2 & m\ell^2 \\ m\ell^2 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}}_{\text{è la matrice cinetica } a(0,0)} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} mg\ell & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m\ell^2 & m\ell^2 \\ m\ell^2 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\ell^2 \omega^4 - 7g\ell \omega^2 + 3g^2 = 0, \quad \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$