

A.1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = f(x_1, x_2)$ una funzione C^1 tale che f è “omogenea” di grado $n \in \mathbb{N}$ ($n \neq 0$), cioè:

$$f(\lambda x) = \lambda^n f(x), \quad \forall \lambda > 0 \quad \text{pertanto} \quad nf = x \cdot \nabla f$$

inoltre

$$f(0) = 0, \quad \nabla f(0) = 0, \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0. \quad (*)$$

Si consideri l'equazione differenziale in $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) - x_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) - x_2 \end{cases}$$

Dimostrare che $x = (x_1, x_2) = 0$ è un equilibrio stabile. E' asintoticamente stabile? (Suggerimento: si scelga una opportuna funzione di Liapunov).

A.2 Si consideri l'equazione differenziale in $\mathbb{R}$,

$$\dot{x} = -\text{sgn}(x)\sqrt{|x|} \quad \left(\text{dove: } \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases} \right)$$

Dimostrare che $x = 0$ è un equilibrio stabile. E' asintoticamente stabile? (Suggerimento: si scelga una opportuna funzione di Liapunov).

Soluzione.

A.1 La candidata f. di Liapunov è, viste le condizioni assegnate (*) su f , proprio f , infatti, è definita positiva attorno a $x = (0, 0)$ e lungo le soluzioni (la derivata di Lie) vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) - x_1 \right) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) - x_2 \right) = \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 = -\nabla f \cdot x = -nf < 0 \text{ per } x \neq 0, \quad = 0 \text{ per } x = 0, \end{aligned}$$

dunque la derivata di Lie è definita negativa attorno a zero: asintotica stabilità.

A.2 Qui la candidata f. di Liapunov è $W(x) = |x|$, è definita positiva attorno a $x = 0$ e

$$\frac{d}{dt}W = \frac{d}{dx}|x|(-\text{sgn}(x)\sqrt{|x|}) = -\sqrt{|x|},$$

che è defin. negativa attorno a zero, asintotica stabilità. In realtà, anche $W(x) = x^2$ andrebbe bene: $\dot{W} = 2x(-\text{sgn}(x)\sqrt{|x|}) = -2|x|\sqrt{|x|} < 0$.