**LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA**
**FISICA MATEMATICA**
**PRIMO COMPITINO — 15 Febbraio 2006**

**Esercizio A1.** Sia dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y \\ \dot{y} &= 5x + y\end{aligned}$$

**a.** Determinare gli equilibri.
**b.** Determinare i parametri $a, b, c$ in modo tale che la funzione $W = ax^2 + by^2 + cxy$ sia integrale del moto.
**c.** La funzione $W$ appena trovata può essere usata per ottenere informazioni sulla stabilità dell'origine?

**Esercizio A2.** Sia data una particella $P$ di massa $m$ vincolata alla retta reale con coordinata $x$ e sottoposta al campo di forze conservativo di potenziale $V(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$.
**a.** Disegnare il ritratto in fase.
**b.** Se il punto materiale viene posto in $x = 0$ con velocità $v = \sqrt{\frac{2}{m}}$, quanto tempo impiegherà ad arrivare alla configurazione $(1, 0)$? Se la velocità iniziale è invece $\sqrt{\frac{4}{m}}$ quanto tempo impiegherà il punto materiale a scappare ad infinito? (impostare l'integrale e, se si riesce, stimarlo)

**Esercizio B1.** Nel piano $Oxy$ del riferimento non inerziale $Oxyz$, uniformemente rotante attorno all'asse $y$ con velocità angolare di trascinamento $\underline{\omega} = \omega\hat{y}$, $y$ verticale ascendente $\underline{g} = -g\hat{y}$, è posta una guida curvilinea di equazione $y = x^2$. Su di essa è vincolata senza attrito una particella di massa $m$. Si utilizzi il parametro Lagrangiano libero $x \in \mathbb{R}$.
**a.** Determinare gli equilibri del sistema meccanico e discuterne la stabilità al variare dei parametri strutturali definenti il sistema meccanico $m, g, \omega$ nei reali positivi.
**b.** Si consideri l'analogo sistema descritto in **a**, con lo stesso quesito, dove ora la guida curvilinea è di equazione $y = x^4$.
**c.** Considerando il sistema in **b**, a partire dall'espressione generale dell'energia cinetica del punto materiale $P$ nel caso libero, cioè $\frac{1}{2}m|\dot{OP}|^2$, determinare la funzione energia cinetica $T(x, \dot{x})$ in termini del parametro Lagrangiano indicato e della sua derivata.

- *Consegnare esattamente due fogli: risolvere gli esercizi A su di un foglio, e gli esercizi B su un altro foglio.*
- *Scrivere nome e cognome in modo leggibile su entrambe i fogli.*
- *Indicare chiaramente il numero di esercizio che si sta svolgendo.*

## SOLUZIONI AGLI ESERCIZI

### Esercizio A1

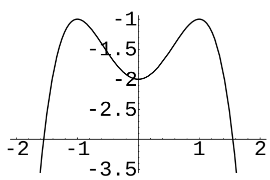
**a.** Solo l'origine è equilibrio.
**b.** La derivata di Lie della funzione $W$ è $(5c-2a)x^2 - 2(a-5b)yx + (2b-c)y^2$. PErchè $W$ sia integrale del moto bisogna annullare tutti i coefficienti di $L_X W$. Si ottiene che $a = 5c/2$, $b = c/2$. Da cui segue che, scelto $c = 2$

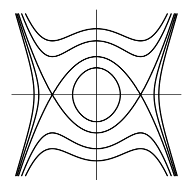
$$W = 5x^2 + y^2 + 2xy$$

Ovviamente tutti i multipli di $W$ sono integrali primi.
**c.** Visto che la funzione $W$ scelta ha minimo stretto in $(0,0)$, come si vede calcolando gradiente e matrice Hessiana o come si controlla più semplicemente completando i quadrati ($5x^2+y^2+2xy = (x+y)^2 + 4x^2 > 0$ se $x, y$ non sono entrambe nulli) si ha la stabilità semplice e non quella asintotica.

### Esercizio A2

**a.** Il ritratto in fase è





**b.** L'energia che compete alla configurazione $(0, \sqrt{\frac{2}{m}})$ è $\frac{1}{2}m\frac{2}{m} - 2 = -1$, che è la stessa energia del livello $(1,0)$ (un equilibrio). Il tempo si calcola valutando

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(-1 + x^2 - 2x + 2)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^2}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

Questo integrale diverge. Ma lo si sapeva già per Esistenza ed Unicità. Non occorre calcolarlo, anche se con il metodo delle frazioni parziali una primitiva è $\sqrt{\frac{m}{8}}\left(\log(x-1) - \log(x+1)\right)$

Nel secondo caso l'energia che compete alla configurazione iniziale è 0. Quindi la traiettoria è una di quelle che vanno all'infinito. L'integrale per calcolare il tempo che impiegherà la particella ad andare all'infinito è

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}}.$$

Vicino all'infinito la funzione ha il comportamento asintotico di $1/x^2$, quindi l'integrale converge. Il tempo che $P$ impiega a scappare via è finito.

### Esercizio B1

**a.** Il sistema è vincolato ed è soggetto alla forza di potenziale $mgx^2$ ed alla forza centrifuga, il cui potenziale generalizzato è $-1/2m\omega^2x^2$. Il potenziale a cui è sottoposto il sistema è

$$V = m(g - 1/2\omega^2)x^2.$$

Dalla definizione di equilibrio segue che se $2g \neq \omega^2$ allora l'unico equilibrio è $x = 0$. Altrimenti tutti le coordinate $x$ in $\mathbb{R}$ porgono punti di equilibrio.

Dai teoremi di Lagrange-Dirichelet e dell'Hessiana non degenere segue che: se $2g < \omega^2$ allora l'equilibrio è instabile (Hessiana del potenziale definita negativa), se $2g > \omega^2$ allora l'equilibrio è stabile ($x = 0$ è minimo del potenziale).

Se $2g = \omega$ allora i criteri non bastano per decidere ma il potenziale è costantemente nullo, l'energia cinetica quindi si conserva, ed una particella messa in moto con velocità piccolissima lentamente scappa verso l'infinito. Quindi ogni equilibrio è instabile (giustificazione furba fornita da un vostro compagno).

**b.** Cambia l'energia potenziale, che diventa

$$V = m(gx^4 - 1/2\omega^2x^2).$$

$V' = mx(4gx^2 - \omega^2)$. Quindi l'origine è sempre equilibrio ma appaiono altri due equilibri, quando $x = \pm\frac{\omega}{2\sqrt{g}}$.

La derivata seconda di $V$ è $m(12gx^2 - \omega^2)$. Calcolata in $x = 0$ porge $-m\omega^2 < 0$, quindi l'equilibrio è sempre instabile per il teorema della Hessiana non degenere, a meno che $\omega = 0$, nel qual caso l'equilibrio si dimostra stabile usando il teorema di Lagrange-Dirichelet.

Calcolata in $x = \pm\frac{\omega}{2\sqrt{g}}$ si ha che $V'' = 2m\omega^2$, che è sempre positiva. Quindi per Lagrange-Dirichelet si ha la stabilità.

**c.** Si scrive la posizione $OP = (x, x^4)$ e si deriva $\dot{OP} = (\dot{x}, 4x^3\dot{x})$. Infine si ha che $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + 16x^6)$.