



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
SECONDO COMPITINO — 14 Marzo 2006

Esercizio A1. In un sistema inerziale $Oxyz$ una particella di massa $m = 1$ ($OP = (x, y, z)$, $\dot{OP} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$) è soggetta alla sola forza attiva $\mathbf{F}(OP, \dot{OP})$ di legge costitutiva:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z) = \left(-(1 + |\dot{OP}|^2)x - \sin(\dot{x}), 0, -(1 + |\dot{OP}|^2)z - \sin(\dot{z}) \right)$$

La particella si vincola in maniera liscia su di una guida 1-dim. coincidente con l'asse x . Per tale sistema vincolato si determinino gli equilibri e se ne studi la stabilità.

Esercizio A2. (Attenzione: risolvere questo quesito dopo aver risolto A1 e B.)

Un corpo rigido libero oltre alla gravità (acc. di gravità: $\mathbf{g}$: costante) è soggetto a sollecitazioni di tipo viscoso il cui momento risultante rispetto al baricentro è $\mathbf{N}_G^{visc} = -k\boldsymbol{\omega}$, $k > 0$. Dimostrare che nello spazio $\mathbb{R}^3$ delle velocità angolari $\boldsymbol{\omega}$ la soluzione di Euler $\boldsymbol{\omega}^* = 0$ è 'equilibrio' stabile. Sugg: Le equazioni di Euler sono: $\mathcal{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathcal{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{N}_G^{totale}$, inoltre, usare $T_G(\boldsymbol{\omega})$.

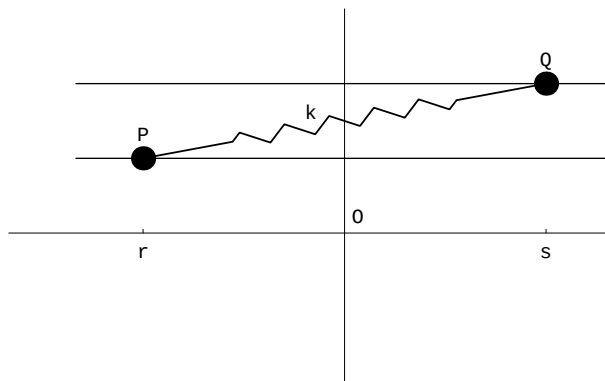
Esercizio B. Un punto materiale P di massa m è vincolato ad una retta orizzontale nel piano cartesiano Oxy . Un altro punto Q di massa uguale è vincolato, nello stesso piano, ad una retta orizzontale parallela alla prima che dista ℓ da essa. Sul sistema agisce la gravità ed una molla di costante elastica k che collega i due punti materiali. Scegliendo come coordinate lagrangiane le ascisse r ed s dei punti P e Q (vedi figura).

a. Scrivere la Lagrangiana del sistema.

b. Cambiando opportunamente le coordinate, riscrivere la Lagrangiana così da esporre una coordinata ciclica. Scrivere l'integrale del moto ad essa associata e la Lagrangiana ridotta alla Routh.

c. Studiare le piccole oscillazioni del sistema ridotto. Dire se le soluzioni di piccole oscillazioni si discostano molto dalle soluzioni reali.

d. Ricostruire il moto all'equilibrio relativo.



- Consegnare esattamente due fogli: risolvere gli esercizi A su di un foglio, gli esercizi B su un altro foglio.
- Scrivere nome e cognome in stampatello su entrambe i fogli.
- Indicare chiaramente il numero di esercizio che si sta svolgendo.
- Scrivere i passaggi necessari a giustificare le affermazioni.

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI

Esercizio A1

Scegliamo x come coordinata Lagrangiana per il sistema. Scriviamo le equazioni del moto (nel modo più lungo, tanto per ripassare la teoria). L'energia cinetica è $T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$.

La forma lavoro è $d\mathcal{L} = -(1 + \dot{x}^2)x - \sin \dot{x} dx$. La ricerca di una primitiva è destinata a fallire. Quindi non riusciamo a trovare un potenziale da studiare. Possiamo comunque scrivere le equazioni di Lagrange nella forma $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i = F \cdot \frac{\partial QP}{\partial q_i}$.

Nel nostro caso particolare si ha un'unica equazione di Lagrange, che è

$$\ddot{x} = -(1 + \dot{x}^2)x - \sin \dot{x}.$$

Questa equazione si trasforma in un sistema di equazioni al prim'ordine

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -(1 + v^2)x - \sin v \end{cases}$$

Gli equilibri di questo sistema sono $v = 0$ e $-x = 0$. Quindi solo l'origine. Per discutere la stabilità dell'equilibrio, proviamo a linearizzare in $(0, 0)$. Si ha che

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{\partial(-(1+v^2)x - \sin v)}{\partial x} \Big|_{x=0, v=0} x + \frac{\partial(-(1+v^2)x - \sin v)}{\partial v} \Big|_{x=0, v=0} v = -x - v \end{cases}$$

La matrice associata a questo sistema è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di questa matrice è $\lambda(\lambda + 1) + 1$. Gli autovalori sono quindi $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. La parte reale di questi autovalori è negativa e quindi l'equilibrio è stabile.

Esercizio A2

Come suggerito le equazioni del moto nello spazio delle velocità angolari sono

$$\mathcal{I}_G \dot{\omega} + \omega \wedge (\mathcal{I}_G \omega) = -k\omega.$$

L'energia cinetica è la funzione $T_G = \frac{1}{2}\omega \cdot \mathcal{I}_G \omega$. Derivando questa funzione rispetto al tempo ed usando la simmetria di $\mathcal{I}_G$ si ha che

$$\dot{T}_G = \omega \cdot \mathcal{I}_G \dot{\omega}.$$

Ne segue che $\dot{T}_G = \omega(-k\omega - \omega \wedge \mathcal{I}_G \omega) = -k|\omega|^2 < 0$. Mettendo assieme questo fatto con il fatto che $\mathcal{I}_G$ è definita positiva, si ha che T_G è funzione di Liapunov per l'asintotica stabilità dell'equilibrio $\omega = 0$.

Preferendo usare il metodo spettrale, le equazioni di Euler linearizzate attorno alla soluzione d'equilibrio $\omega = 0$ risultano:

$$\dot{\omega} = -k\mathcal{I}_G^{-1}\omega$$

e gli autovalori della matrice $-k\mathcal{I}_G^{-1}$ sono $\{-k/\mathcal{I}_1, -k/\mathcal{I}_2, -k/\mathcal{I}_3\}$: reali e negativi.

Esercizio B

a. La Lagrangiana è

$$L(r, s, \dot{r}, \dot{s}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{s}^2) - \frac{k}{2}(r - s)^2.$$

b. Conviene cambiare le coordinate $R = r + s$ ed $S = r - s$. Con questa scelta la Lagrangiana diventa

$$L'(R, S, \dot{R}, \dot{S}) = \frac{1}{4}m(\dot{R}^2 + \dot{S}^2) - \frac{k}{2}S^2.$$

Di conseguenza il momento conservato è

$$P(R, S, \dot{R}, \dot{S}) = \frac{\partial L'}{\partial \dot{R}} = \frac{1}{2}m\dot{R} = \frac{1}{2}m(\dot{r} + \dot{s}).$$

Questo altro non è che la conservazione della componente x del momento lineare. Ponendo $P = c$ si ottiene che $\dot{R} = \frac{2c}{m}$. Segue che la Lagrangiana ridotta è

$$L'_c = \frac{1}{4}m\dot{S}^2 - \frac{k}{2}S^2 - \frac{c^2}{m} \simeq \frac{1}{4}m\dot{S}^2 - \frac{k}{2}S^2.$$

c. Stiamo trattando un sistema 1-dimensionale, quindi le matrici che appaiono nelle piccole oscillazioni sono di dimensione 1. La matrice A è $(\frac{1}{2}m)$, la matrice $V'' = (k)$. L'equazione agli autovalori è $k - \lambda \frac{m}{2}$. Quindi $\lambda = 2\frac{k}{m}$.

Le soluzioni di piccola oscillazione sono

$$S_t = A \sin(\sqrt{2\frac{k}{m}}t + a) = A \sin(\sqrt{2\frac{k}{m}}t) + B \cos(\sqrt{2\frac{k}{m}}t)$$

Il problema iniziale è già lineare, quindi il problema linearizzato è esattamente il problema iniziale.

d. Tutte le soluzioni ricostruite possono essere esplicite, perchè le soluzioni di piccole oscillazioni sopra sono in realtà soluzioni vere del problema. In ogni caso l'equilibrio relativo (equilibrio per il sistema ridotto) è la funzione $S_t \equiv 0$. La legge di conservazione permette di ottenere che $R_t = \frac{2c}{m}t + R_0$. La soluzione ricostruita è

$$S_t \equiv 0 \quad R_t = \frac{2c}{m}t + R_0$$

Nelle coordinate iniziali si ha che $r_t = s_t = \frac{c}{m}t + a$ (a è una costante di integrazione). I due punti materiali hanno sempre stessa coordinata x e traslano assieme con velocità costante.