



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
ESAME — 21 Marzo 2006

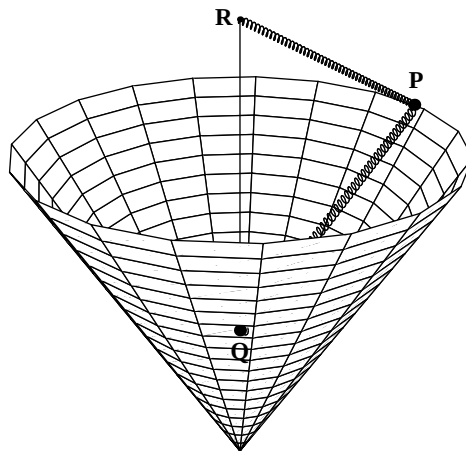
Esercizio A. Siano dati due punti materiali P e Q di massa m vincolati al cono di equazione $z^2 = x^2 + y^2$. Una molla di costante elastica k collega i due punti. Un'altra molla, di costante elastica uguale, collega il punto P al punto fisso $R = (0, 0, 5h)$. Sul sistema **non** agisce la gravità.

Sapendo che le posizioni di P e Q si possono parametrizzare usando coordinate cilindriche

$$OP(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r),$$

$$OQ(s, \vartheta) = (s \cos \vartheta, s \sin \vartheta, s).$$

- Si scriva la Lagrangiana del sistema.
- Cambiando le coordinate $\Phi = \varphi - \vartheta$, $\Theta = \varphi + \vartheta$, si riscriva la Lagrangiana.
- Si riduca alla Routh la Lagrangiana così ottenuta.
- Assumendo che la quantità conservata sia nulla ($c = 0$), si studino le frequenze di piccole oscillazioni del sistema ridotto. Nel determinare le configurazioni di equilibrio si escluda $r = 0$ ed $s = 0$, che sono singolarità del nostro sistema di coordinate.



Esercizio B. Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine definita mediante un campo vettoriale nel piano $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dot{x} = -a \sin y \\ \dot{y} = -\frac{a}{x} \cos y + bx \end{cases} \quad a, b > 0$$

Si determini l'equilibrio più vicino all'origine di $\mathbb{R}^2$ e se studi la stabilità usando una delle seguenti funzioni candidate Liapunov:

$$W_1(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \right)^2 - \frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cos y + \frac{2}{3}, \quad W_2(x, y) = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \right)^3 - \frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cos y + \frac{2}{3}.$$

-
- *Consegnare esattamente due fogli: risolvere gli esercizi A su di un foglio, gli esercizi B su un altro foglio.*
 - *Scrivere nome e cognome in stampatello su entrambe i fogli.*
 - *Indicare chiaramente il numero di esercizio che si sta svolgendo.*
 - *Scrivere i passaggi necessari a giustificare le affermazioni.*
-

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI

Esercizio A

a. Il potenziale delle forze attive è la somma di due potenziali $V = V_k^{PQ} + V_k^{PR} = \frac{k}{2}|PQ|^2 + \frac{k}{2}|PR|^2$.

$$|PQ|^2 = |(r \cos \varphi - s \cos \vartheta, r \sin \varphi - s \sin \vartheta, r - s)|^2 = 2r^2 + 2s^2 - 2rs(1 + \cos(\vartheta - \varphi)),$$

$$|PR|^2 = 2r^2 - 10rh + 25h^2.$$

Segue che il potenziale associato alle forze attive è

$$V(r, s, \vartheta, \varphi) = k(2r^2 + s^2 - rs(1 + \cos(\vartheta - \varphi)) - 5rh)$$

L'energia cinetica è

$$T(r, s, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{s}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(2\dot{r}^2 + 2\dot{s}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2).$$

La Lagrangiana è $L = T - V$.

b. Cambiando coordinate il potenziale diventa $V(r, s, \Phi, \Theta) = k(2r^2 + s^2 - rs(1 + \cos \Phi) - 5rh)$ mentre l'energia cinetica diventa $T(r, s, \Phi, \Theta, \dot{r}, \dot{s}, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2}m(2\dot{r}^2 + 2\dot{s}^2 + \frac{r^2+s^2}{4}\dot{\Phi}^2 + \frac{r^2+s^2}{4}\dot{\Theta}^2 + \frac{r^2-s^2}{2}\dot{\Theta}\dot{\Phi})$. Di nuovo $L' = T - V$.

c. La nuova Lagrangiana ha coordinata ciclica Θ . Si ha quindi la legge di conservazione $P_\Theta(r, s, \Phi, \dot{r}, \dot{s}, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}) = m(\frac{r^2+s^2}{4}\dot{\Theta} + \frac{r^2-s^2}{4}\dot{\Phi}) \equiv c$. Questa legge porge

$$\dot{\Theta} = \frac{4c}{m(r^2 + s^2)} + \frac{s^2 - r^2}{r^2 + s^2}\dot{\Phi}.$$

Riscriviamo la Lagrangiana esponendo i termini quadratici in $\dot{\Theta}$, quelli lineari in $\dot{\Theta}$ e quelli indipendenti da $\dot{\Theta}$. Si ha

$$L' = \left(\frac{1}{2}m\frac{r^2 + s^2}{4}\dot{\Theta}^2 \right) + \left(\frac{1}{2}m\frac{r^2 - s^2}{2}\dot{\Theta}\dot{\Phi} \right) + \left(\frac{1}{2}m\left(2\dot{r}^2 + 2\dot{s}^2 + \frac{r^2 + s^2}{4}\dot{\Phi}^2\right) - k\left(2r^2 + s^2 - rs(1 + \cos \Phi) - 5rh\right) \right)$$

La Lagrangiana ridotta è

$$L_c^R = \frac{1}{2}m\left(2\dot{r}^2 + 2\dot{s}^2 + \frac{r^2 s^2}{r^2 + s^2}\dot{\Phi}^2\right) - c\frac{s^2 - r^2}{r^2 + s^2}\dot{\Phi} - 2\frac{c^2}{m(r^2 + s^2)} - k\left(2r^2 + s^2 - rs(1 + \cos \Phi) - 5rh\right)$$

d. Supponendo che $c = 0$ si ha la Lagrangiana

$$L_0^R = \frac{1}{2}m\left(2\dot{r}^2 + 2\dot{s}^2 + \frac{r^2 s^2}{r^2 + s^2}\dot{\Phi}^2\right) - k\left(2r^2 + s^2 - rs(1 + \cos \Phi) - 5rh\right).$$

Il potenziale ha gradiente

$$\nabla V = k \begin{pmatrix} 4r-s(1+\cos \Phi)-5h \\ 2s-r(1+\cos \Phi) \\ rs \sin \Phi \end{pmatrix}.$$

Dall'ultima segue che $\Phi = 0$ o π , dalla seconda quindi $\Phi = 0$ ed $s = r$ (o $\Phi = \pi$ ed $s = 0$ che buttiamo via) ed infine $r = \frac{5}{2}h$. La matrice Hessiana di V è

$$k \begin{pmatrix} 4 & -1-\cos \Phi & s \sin \Phi \\ -1-\cos \Phi & 2 & r \sin \Phi \\ s \sin \Phi & r \sin \Phi & rs \cos \Phi \end{pmatrix}.$$

Calcolata nell'equilibrio stabile $\Phi = 0$, $r = s = \frac{5}{2}h$ (l'altro equilibrio è instabile), si ha

$$k \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{4}h^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cinetica è invece

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{25}{8}h^2 \end{pmatrix}.$$

Le frequenze di piccole oscillazioni si calcolano risolvendo

$$0 = \det \left[k \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{4}h^2 \end{pmatrix} - m\lambda \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{8}h^2 \end{pmatrix} \right]$$

e porgono $\omega = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\omega = \sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Esercizio B

L'equilibrio è $(x_E, y_E) = (\sqrt{\frac{a}{b}}, 0)$ e la funzione è la $W_2(x, y)$. Infatti:

$$\nabla W_2(x, y) = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cos y, \frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \sin y \right)$$

$$\nabla W_2(\sqrt{\frac{a}{b}}, 0) = (0, 0)$$

$$\nabla^2 W_2 = \begin{pmatrix} 2 \frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} & \frac{\sin y}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \\ \frac{\sin y}{\sqrt{\frac{a}{b}}} & \frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cos y \end{pmatrix} \quad \nabla^2 W_2(\sqrt{\frac{a}{b}}, 0) = \begin{pmatrix} \frac{2b}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{ def. pos.}$$

Infine si verifica che W_2 è un *integrale primo*:

$$L_X W_2 = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cos y \right) (-a \sin x) + \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \sin y \right) \left(-\frac{a}{x} \cos y + bx \right) = 0.$$