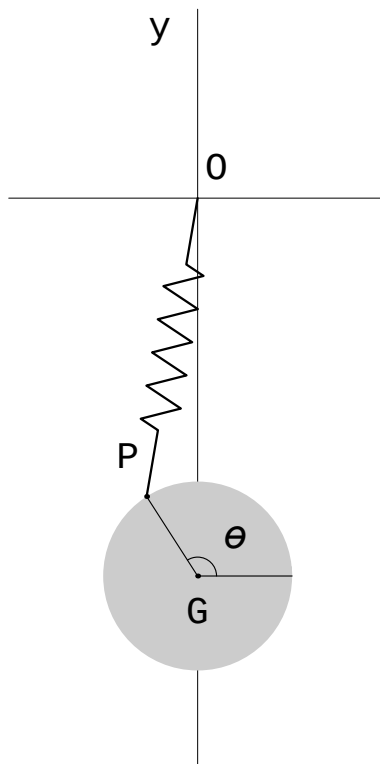




Esercizio A. In un sistema di riferimento Oxy , con y verticale ascendente, un disco omogeneo di massa m e raggio R ha centro vincolato all'asse delle y . Una molla di costante elastica k è fissata ad un punto del bordo del disco. L'altro capo della molla è attaccato all'origine del sistema di riferimento. Sul sistema agisce la gravità. Si scelgano come coordinate Lagrangiane y , la coordinata del centro di massa G , e ϑ , l'angolo tra il segmento GP e l'asse delle x (vedi figura).

- Si scriva la Lagrangiana del sistema (il momento di inerzia di un disco è $I_G = \frac{m}{2}R^2$).
- Si determinino tutti gli equilibri e si studi la stabilità solo degli equilibri con $y \neq 0$.
- Assumendo che $k = 2\frac{mg}{R}$, si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni all'equilibrio che è stabile per qualsiasi scelta dei parametri.



Esercizio B. Si consideri una particella di massa $m = 1$ vincolata su di una guida orizzontale liscia coincidente con l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano con z verticale ascendente, $\underline{g} = -g\hat{z}$, $g > 0$ e rotante rispetto agli spazi inerziali attorno all'asse z con velocità angolare di trascinamento $\underline{\omega} = \omega\hat{z}$. Oltre alla reazione vincolare, alla gravità e alle eventuali forze apparenti, agiscono due ulteriori forze:

$$\underline{F}_{elast.}(OP) = -OP$$

$$\underline{F}_{visc.}(\dot{OP}) = -\omega^2\dot{OP}$$

Usando il metodo spettrale, determinare un intervallo di valori reali per il parametro ω^2 in modo tale che l'origine del sistema cartesiano sia un equilibrio asintoticamente stabile.

- Consegnare esattamente due fogli: risolvere gli esercizi A su di un foglio, gli esercizi B su un altro foglio.
- Scrivere nome e cognome **in stampatello** su entrambe i fogli.
- Indicare chiaramente il numero di esercizio che si sta svolgendo.
- Scrivere i passaggi necessari a giustificare le affermazioni.

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI

Esercizio A

a. I punti e gli atti di moto rilevanti per il sistema sono

$$OP = (R \cos \vartheta, y + R \sin \vartheta), \quad OG = (0, y), \quad \dot{OG} = (0, \dot{y}).$$

L'energia cinetica del sistema è $T = \frac{1}{2}m|v_G|^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$. In questo caso il primo termine diventa semplicemente $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$, mentre la velocità angolare è $\dot{\vartheta}$ e quindi il secondo termine è $\frac{1}{2}\frac{m}{2}R^2\dot{\vartheta}^2$. Quindi

$$T(y, \vartheta, \dot{y}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\vartheta}^2\right)$$

I potenziali in gioco sono quello gravitazionale e quello della molla. $V = V_g + V_k = mgy_G + \frac{k}{2}|OP|^2 = mgy + \frac{k}{2}\left((R \cos \vartheta)^2 + (y + R \sin \vartheta)^2\right)$. Un conto, a meno di costante, porge

$$V(x, y, \vartheta) = mgy + \frac{k}{2}(y^2 + 2Ry \sin \vartheta)$$

La Lagrangiana è $L = T - V$.

b. Per determinare gli equilibri bisogna studiare il gradiente del potenziale

$$\nabla V = \begin{pmatrix} mg + ky + kR \sin \vartheta \\ kRy \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

La seconda dice che o $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$ oppure $y = 0$. In questo secondo caso si ha che $\sin \vartheta = -\frac{mg}{kR}$, che porge due soluzioni, $-\frac{\pi}{2} \pm \bar{\vartheta}$ se $\frac{mg}{kR} < 1$, una soluzione $\frac{\pi}{2}$ se $\frac{mg}{kR} = 1$ e nessuna se $\frac{mg}{kR} > 1$. Nel primo caso invece si ha che $y = -\frac{mg}{k} \mp R$. Oltre ai due eventuali equilibri con $y = 0$ si hanno gli equilibri $\left(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Per studiare la stabilità degli equilibri usiamo il teorema della Hessiana non degenera. La matrice Hessiana di V è

$$HessV = \begin{pmatrix} k & kR \cos \vartheta \\ kR \cos \vartheta & -kRy \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Calcolata negli equilibri con $y \neq 0$ si ha

$$HessV\left(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kR\left(\frac{mg}{k} + R\right) \end{pmatrix}.$$

che è definita positiva, quindi l'equilibrio $\left(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2}\right)$ è stabile, e

$$HessV\left(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kR\left(-\frac{mg}{k} + R\right) \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha un autovalore negativo se e solo se $R - \frac{mg}{k} < 0$, ovvero quando $1 < \frac{mg}{kR}$ allora l'equilibrio $\left(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}\right)$ è instabile. Nel caso invece in cui $1 > \frac{mg}{kR}$ allora l'equilibrio $\left(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}\right)$ è stabile.

c. L'equilibrio che è sempre stabile indipendentemente dai parametri è $\left(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2}\right)$. Assumendo che $k = 2\frac{mg}{R}$ si ha che la matrice Hessiana di V all'equilibrio diventa

$$HessV = \begin{pmatrix} 2\frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & 3mgR \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico da calcolare è

$$\det \left[\begin{pmatrix} 2\frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & 3mgR \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix} \right]$$

Le matrici sono a blocchi e porgono $\omega = \sqrt{2\frac{g}{R}}$ e $\omega = \sqrt{6\frac{g}{R}}$.

Esercizio B

Il sistema è 1-dim, dunque la componente Lagrangiana della sollecitazione dovuta a Coriolis è nulla, la componente sull'asse x dell'equazione del moto è:

$$\ddot{x} = (\omega^2 - 1)x - \omega^2 \dot{x}$$

al primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= (\omega^2 - 1)x - \omega^2 v \end{cases} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\omega^2 - 1) & -\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(A - \lambda \mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ (\omega^2 - 1) & -\omega^2 - \lambda \end{pmatrix},$$

$$0 = \lambda^2 + \omega^2 \lambda - (\omega^2 - 1), \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\omega^2 \pm \sqrt{\omega^4 + 4(\omega^2 - 1)} \right)$$

Posto $\alpha := \omega^2$, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4(\alpha - 1)} \right)$, per individuare un intervallo di valori per α sicuramente di asint. stab. basta che

(i) $\alpha > 0$ e il radicando Δ sia ≤ 0 : $\Delta = \alpha^2 + 4(\alpha - 1) \leq 0$, cioè

$$\alpha_{1,2} = -2 \pm \sqrt{8} = -2 \pm 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow 0 < \alpha \leq -2 + 2\sqrt{2} \approx 0,8$$

oppure

(ii) $\alpha > 0$ e radicando $\Delta > 0$: in tal caso però si deve avere che $-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(\alpha - 1)} < 0$, $\alpha^2 > \alpha^2 + 4\alpha - 4$, $\alpha < 1$, $\Rightarrow -2 + 2\sqrt{2} < \alpha < 1$. Mettendo assieme (i) e (ii):

$$0 < \alpha < 1, \quad \text{cioè} \quad 0 < \omega^2 < 1$$