LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
ESAME — 2 Maggio 2006

Esercizio A. Sia dato il campo vettoriale

$$X(x,y) = \begin{pmatrix} 4-x^2-2y-xy \\ \frac{1}{2}xy \end{pmatrix}.$$

a. Determinare gli equilibri e linearizzare il campo vettoriale nell'equilibrio con $y \neq 0$, chiamiamo l'equilibrio (x_0, y_0).
b. Discutere la stabilità dell'equilibrio per il sistema linearizzato sia con il metodo spettrale che con il metodo delle funzioni di Liapunov usando $W(\xi,\eta) = \xi^2 + \eta^2 + \xi\eta$.
c. Che funzione usereste come funzione di Liapunov all'equilibrio (x_0, y_0)? (usare in qualche modo W.) Fare i controlli che servono a discutere la stabilità dell'equilibrio per il sistema **non lineare**.

Esercizio B. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento associato ad uno spazio inerziale, l'asse x sia verticale discendente: $\mathbf{g} = g\,\hat{x}$, $g > 0$. Un punto materiale P_1 di massa $m > 0$ è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse x e una molla di costante elastica $h > 0$ è tesa tra P_1 e il punto fisso origine del sistema O. Una estremità di una sbarretta, di lunghezza l e priva di massa, è incernierata in P_1 e può ruotare vincolata nel piano Oxy. All'altra estremità della sbarretta è solidale un punto materiale P_2 di massa $M > 0$. Si utilizzino i paramentri Lagrangiani x di P_1 e l'angolo φ dall'asse positivo delle x alla sbarretta, orientato positivamente in senso anti-orario.
a. Dopo aver motivato in dettaglio la costruzione delle funzioni energia cinetica $T(x,\varphi,\dot{x},\dot{\varphi})$ ed energia potenziale $\mathcal{U}(x,\varphi)$, determinare un equilibrio stabile (x_E, φ_E).
b. Determinare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno a (x_E, φ_E).
c. Si utilizzino ora i parametri Lagrangiani (z,φ), dove $z := x - x_E$. Si supponga che sia pure presente un forza di resistenza di tipo viscoso agente su P_1: $\mathbf{F}^{visc} = -k\,\dot{OP}_1$. Scrivere le componenti della sollecitazione relative alla forza viscosa, Q_x^{visc}, Q_φ^{visc}. Dal momento che la loro espressione è lineare, le equazioni di Lagrange linearizzate attorno a (x_E, φ_E) per questo nuovo problema coincidono con la linearizzazione calcolata per rispondere al punto **b** sommata al contributo delle Q appena calcolate.

Considerare le nuove equazioni linearizzate e studiare in dettaglio la soluzione del problema di Cauchy:

$$z(0) = z_0 \neq 0, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Si mostri che la soluzione ha tre tipi diversi di comportamento per diverse scelte di k nei positivi.

- *Consegnare esattamente due fogli: risolvere gli esercizi A su di un foglio, gli esercizi B su un altro foglio.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su entrambe i fogli.*
- *Indicare chiaramente il numero di esercizio che si sta svolgendo.*
- *Scrivere i passaggi necessari a giustificare le affermazioni.*

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI

Esercizio A

a. Dalla seconda equazione si ha che o $x = 0$ od $y = 0$. Se $x = 0$ allora la prima equazione porge $y = 2$. Se $y = 0$ allora la prima equazione porge $x = \pm 2$. Quindi gli equilibri sono tre, $(0, 2)$, $(\pm 2, 0)$. La linearizzazione all'equilibrio $(0, 2)$ è il sistema lineare associato alla matrice $\left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
b. Gli autovalori del sistema lineare sono $-1 \pm i$. Quindi il metodo spettrale mostra che l'origine è equilibrio asintoticamente stabile (in realtà dimostra anche che l'equilibrio $(0, 2)$ è asintoticamente stabile per il sistema non lineare). La funzione W ha minimo stretto nell'origine e la sua derivata di Lie è $-3\xi^2 - 4\xi\eta - 2\eta^2$, che è definita negativa. Quindi l'origine è un equilibrio asintoticamente stabile.
c. Ovviamente, conviene usare $F(x, y) = W(x, y-2)$. La funzione F ha certamente un minimo stretto nel punto $(0, 2)$. La sua derivata di Lie per il sistema non lineare è $L_X F(x, y) = 4x + 2x^2 - 2x^3 - 4xy - \frac{5}{2}x^2 y + 8y - 2y^2 - 8$. La matrice Hessiana di questa funzione calcolata in $(0, 2)$ è $\left(\begin{smallmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -4 \end{smallmatrix}\right)$. Con il metodo dei minori si dimostra che $L_X F$ è strettamente negativa in un intorno bucato di $(0, 2)$. Abbiamo ri-dimostrato la stabilità asintotica dell'equilibrio (già sancita dal metodo spettrale).

Esercizio B