LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
ESAME — 24 Luglio 2006

Esercizio A. Sia data una funzione $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\det(f') \neq 0$, $f \in C^2$, e con essa costruiamo il campo vettoriale $X : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X(x) := -[f'(x)]^{-1} f(x)$. L'equazione differenziale associata è

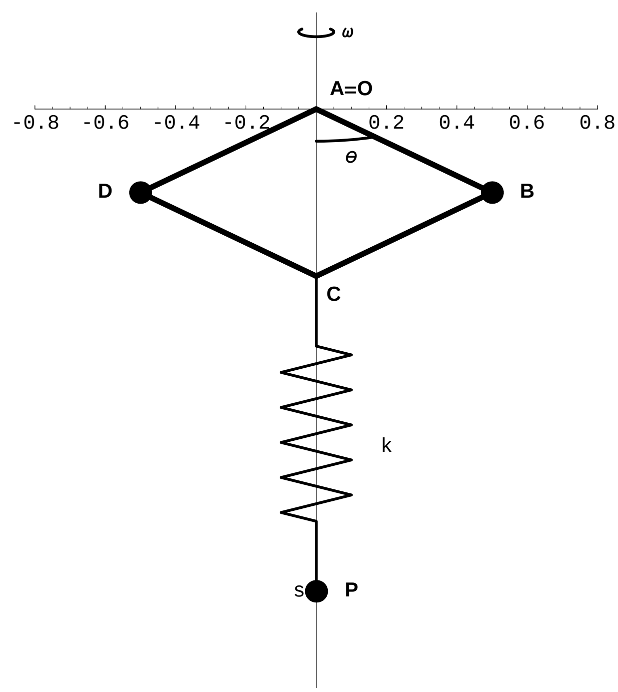
$$\dot{x} = -[f'(x)]^{-1} f(x).$$

1) Dimostrare che ogni equilibrio x^* per X è *asintoticamente stabile* usando come funzione di Liapunov una tra le seguenti candidate: W,

$$W_1(x) = f(x) \qquad W_2(x) = |f(x)|^2 \qquad W_3(x) = |f(x) - f(x^*)|^{\frac{1}{2}}$$

2) Dimostrare ancora il risultato di asintotica stabilità del punto 1), usando ora il primo metodo di Liapunov. (Suggerimento: si noti che scrivere $X(x) = -[f'(x)]^{-1} f(x)$ è equivalente a scrivere $f'(x)X(x) = -f(x)$, dato che $\det(f') \neq 0$.)

Esercizio B. Quattro aste di lunghezza ℓ sono attaccate tra loro negli estremi così da formare un parallelepipedo snodato $ABCD$. Il vertice A del parallelepipedo è vincolato a giacere nell'origine di un piano cartesiano Oxy, il vertice C è vincolato a scorrere lungo l'asse delle y. In B e D sono attaccati punti materiali di massa m. Al punto C è attaccata una molla di costante elastica k al cui capo libero è attaccato un punto materiale P di massa m, vincolato a scorrere sull'asse delle y. Il sistema di riferimento non è inerziale, ma gira con velocità angolare ω attorno all'asse delle y. Sul sistema agisce la gravità, che è verticale discendente.
Scegliendo come coordinate Lagrangiane ϑ ed s in figura (e trascurando i problemi che potrebbero sorgere quando $\vartheta = \pi/2$):
a. scrivere la Lagrangiana del problema. (N.B. il potenziale centrifugo di un punto Q è dato da $-\frac{1}{2} m_Q |\omega \times OQ|^2$, la forza di Coriolis ha componenti Lagrangiane $\mathcal{Q}_{coriolis}$ nulle.)
b. determinare il valore di ω per il quale esiste una configurazione di equilibrio con $\vartheta = \pi/3$. Quale è questa configurazione (quanto vale s)?
c. Determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio con $\vartheta > 0$ che si ottiene quando $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Per semplificare i conti, assumere anche che $mg = \frac{2}{3} k\ell$.



- *Consegnare esattamente due fogli: risolvere gli esercizi A su di un foglio, gli esercizi B su un altro foglio.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su entrambe i fogli.*
- *Indicare chiaramente il numero di esercizio che si sta svolgendo.*
- *Scrivere i passaggi necessari a giustificare le affermazioni.*

SOLUZIONI AGLI ESERCIZI

Esercizio A

1) Si vede che x^* è uno *zero* di f se e solo se x^* è un *equilibrio* per X. Dimostriamo che, localmente allo zero x^* di f, e dunque se e solo se è zero di X, $W_2 = |f|^2$ è una funzione di Liapunov per l'asintotica stabilità. In effetti, dato che f è un diffeomorfismo locale, esiste un intorno aperto di x^* in cui f si annulla solo in x^*, dunque W è definita positiva in tale intorno di x^*. Calcoliamo la derivata di Lie di W rispetto al campo vettoriale X:

$$\dot{W}(x) = \mathcal{L}_X W(x) = \mathrm{grad}_{\mathbb{R}^m} W(x) \cdot (-[f'(x)]^{-1} f(x)) =$$

$$= -2f(x)f'(x) \cdot [f'(x)]^{-1} f(x) = -2W(x),$$

dunque è localmente definita negativa. Questo è appunto quanto serve per la stabilità asintotica.

2) Da $f'(x)X(x) = -f(x)$, derivando, si ha che $f''(x)X(x) + f'(x)X'(x) = -f'(x)$, valutando nell'equilibrio x^*, $X(x^*) = 0$,

$$X'(x^*) = -[f'(x^*)]^{-1} f'(x^*) = -\mathbb{I}$$

quindi il sistema linearizzato in x^* è

$$\dot{x} = -(x - x^*)$$

traslando nell'origine, cioè facendo il cambio di variabili $y(x) := x - x^*$, otteniamo infine

$$\dot{y} = -y$$

Naturalmente lo spettro di $A = -\mathbb{I}$ soddisfa alle condizioni di asintotica stabilità.

Esercizio B

a. Per scrivere la Lagrangiana del sistema dobbiamo calcolare la funzione energia cinetica ed il potenziale. Le coordinate e gli atti di moto dei punti rilevanti sono:

$$OB = \ell(\sin\vartheta, -\cos\vartheta), \qquad OD = \ell(-\sin\vartheta, -\cos\vartheta), \qquad OP = (0, s), \qquad OC = \ell(0, -2\cos\vartheta)$$

da cui si ha che

$$\dot{OB} = \ell\dot{\vartheta}(\cos\vartheta, \sin\vartheta), \qquad \dot{OD} = \ell\dot{\vartheta}(-\cos\vartheta, \sin\vartheta), \qquad \dot{OP} = (0, \dot{s})$$

Si ha quindi che l'energia cinetica del sistema è

$$\boxed{T(\vartheta, s, \dot{\vartheta}, \dot{s}) = \tfrac{1}{2}m\Big(\dot{s}^2 + 2\ell^2\dot{\vartheta}^2\Big)}$$

Il potenziale è la funzione $V(r, s) = V_{\omega_B} + V_{\omega_D} + V_{\omega_P} + V_{g_B} + V_{g_D} + V_{g_P} + V_{k_{PC}}$. In particolare,

$$V_{\omega_B} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x_B^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin^2\vartheta = V_{\omega_D}, \qquad V_{\omega_P} = 0$$

$$V_{g_B} = mgy_B = -mg\ell\cos\vartheta = V_{g_D}, \qquad V_{g_P} = mgs, \qquad V_{k_{PC}} = \frac{k}{2}|PC|^2 = \frac{k}{2}(2\ell\cos\vartheta + s)^2$$

Ne segue che

$$\boxed{V(\vartheta, s) = -m\omega^2\ell^2\sin^2\vartheta - 2mg\ell\cos\vartheta + mgs + \tfrac{k}{2}(2\ell\cos\vartheta + s)^2}$$

La Lagrangiana è la funzione $T - V$.

b. Dal momento che la Lagrangiana è indipendente dal tempo, determinare gli equilibri è equivalente a determinare i punti stazionari del potenziale. Il gradiente di V è

$$\nabla V(\vartheta, s) = \begin{pmatrix} -2\ell\big(-gm+ks+\ell\big(m\omega^2+2k\big)\cos(\theta)\big)\sin(\theta) \\ gm+ks+2k\ell\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Perchè esista una configurazione di equilibrio in $\vartheta = \pi/3$ deve essere che $\nabla V(\pi/3, s) = 0$ per qualche s. Calcolando il gradiente in $\vartheta = \pi/3$ si ha $\begin{pmatrix} -\sqrt{3}\ell\big(-gm+ks+\frac{1}{2}\ell\big(m\omega^2+2k\big)\big) \\ gm+ks+k\ell \end{pmatrix}$.

Segue che $s = -\frac{gm+k\ell}{k}$ dalla seconda equazione e che quindi $\omega = \pm\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\ell}}$ dalla prima.

c. Il valore di ω è precisamente quello trovato sopra, quindi l'equilibrio è $(\pi/3, -\frac{gm+k\ell}{k})$. Per studiare le piccole oscillazioni si deve calcolare la matrice cinetica nell'equilibrio, che è la matrice $A = \begin{pmatrix} 2m\ell^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ e la matrice Hessiana del potenziale al punto di equilibrio, che è $V'' = \begin{pmatrix} 3\ell(2gm+k\ell) & -\sqrt{3}k\ell \\ -\sqrt{3}k\ell & k \end{pmatrix}$. L'equazione per determinare le frequenze di piccole oscillazioni è

$$\det\left[\begin{pmatrix} 3\ell(2gm+k\ell) & -\sqrt{3}k\ell \\ -\sqrt{3}k\ell & k \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 2m\ell^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\right] = 0.$$

Assumendo che $mg = \frac{2}{3}k\ell$ si ha l'equazione

$$\det\left[\begin{pmatrix} 7k\ell^2 & -\sqrt{3}k\ell \\ -\sqrt{3}k\ell & k \end{pmatrix} - \lambda m\begin{pmatrix} 2\ell^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0,$$

da cui si ricava che $4k^2\ell^2 + 2m^2\lambda^2\ell^2 - 9km\lambda\ell^2$, le cui soluzioni sono $\frac{k}{2m}, \frac{4k}{m}$. Quindi, **le frequenze di piccole oscillazioni sono $\sqrt{\frac{k}{2m}}$ e $\sqrt{\frac{4k}{m}}$.**