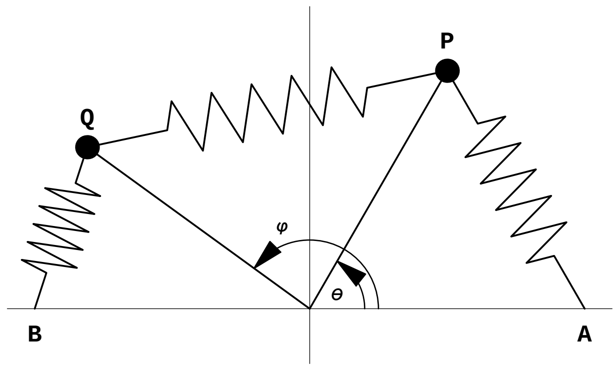
**LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA**
**FISICA MATEMATICA**
**ESAME — 4 Settembre 2006**

**Esercizio A.** Due aste $OP$ ed $OQ$ di lunghezza $\ell$ sono attaccate all'origine di un sistema di riferimento $Oxy$, con $y$ verticale ascendente. All'estremità libera delle aste (i punti $P$ e $Q$) sono vincolati due punti materiali di massa $m$, tre molle agiscono sul sistema: la prima collega il punto $P$ al punto $A = (\ell, 0)$, la seconda collega il punto $P$ al punto $Q$, la terza collega il punto $Q$ al punto $B = (-\ell, 0)$. Le molle hanno tutte costante elastica $k = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \frac{mg}{\ell}$.




Scegliendo come coordinate Lagrangiane $\vartheta$, angolo formato dal semiasse positivo delle $x$ con l'asta $OP$ e valutato in senso antiorario, e $\varphi$, angolo formato dal semiasse positivo delle $x$ con l'asta $OQ$ e valutato in senso antiorario:
**a.** dire se la configurazione $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ e $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ è di equilibrio.
**b.** Discuterne la stabilità.
**c.** Studiarne le piccole oscillazioni.

**Esercizio B.** Sia dato il seguente campo vettoriale nel piano $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad X(x,y) := -\nabla_{\mathbb{R}^2} f(x,y)$, dove $\nabla_{\mathbb{R}^2}$ denota il gradiente e la funzione $f$ è cosi' definita:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) := x^2(x^2-2) + y^2 \in \mathbb{R}$$

Si consideri l'equazione differenziale associata

$$\dot{x} = X_x(x,y), \qquad \dot{y} = X_y(x,y)$$

**a.** Determinare tutti gli equilibri del sistema e, usando il primo metodo (spettrale) di Liapunov, studiarne la stabilità.
**b.** Studiare la stabilità di uno qualunque dei punti d'equilibrio stabili trovati mediante il secondo metodo di Liapunov, costruendo, a partire da $f$, una opportuna funzione di Liapunov $W$.

- *Consegnare esattamente due fogli: risolvere gli esercizi A su di un foglio, gli esercizi B su un altro foglio.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su entrambe i fogli.*
- *Indicare chiaramente il numero di esercizio che si sta svolgendo.*
- *Scrivere i passaggi necessari a giustificare le affermazioni.*

## SOLUZIONI AGLI ESERCIZI

### Esercizio A

**a.** Le configurazioni del sistema sono $OP = \ell(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, $OQ = \ell(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Quindi il potenziale associato al sistema è

$$V(\vartheta.\varphi) = V_{gP} + V_{gQ} + V_{k_{AP}} + V_{k_{PQ}} + V_{k_{QB}} =$$
$$= mg\ell\sin\vartheta + mg\ell\sin\varphi + \frac{k}{2}\Big((\ell\cos\vartheta - \ell)^2 + \ell^2\sin^2\vartheta\Big) + \frac{k}{2}\Big((\ell\cos\vartheta - \ell\cos\varphi)^2 + (\ell\sin\vartheta - \ell\sin\varphi)\Big) +$$
$$+\frac{k}{2}\Big((\ell\cos\varphi + \ell)^2 + \ell^2\sin^2\varphi\Big) =$$
$$= mg\ell\sin\vartheta + mg\ell\sin\varphi - k\ell^2\cos\vartheta - k\ell^2\cos(\vartheta-\varphi) + k\ell^2\cos\varphi.$$

Con le ipotesi fatte su $k$ si ha che

$$V = mg\ell(\sin\vartheta + \sin\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} mg\ell(\cos\vartheta + \cos(\vartheta-\varphi) - \cos\varphi).$$

Calcoliamo il gradiente di $V$, si ha

$$\nabla V = mg\ell \begin{pmatrix} \cos\vartheta + \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\sin\vartheta + \sin(\vartheta-\varphi)) \\ \cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\sin(\vartheta-\varphi) + \sin\varphi) \end{pmatrix}$$

Per controllare che la configurazione $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ sia di equilibrio basta sostituire questi valori nel gradiente appena calcolato. Si ottiene

$$\nabla V(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) = mg\ell \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) \end{pmatrix}$$

che è il vettore nullo.
**b.** Per studiare la stabilità si controlla l'Hessiana del potenziale $V$.

$$HessV = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta + \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\cos\vartheta + \cos(\vartheta-\varphi)) & -\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cos(\vartheta-\varphi) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cos(\vartheta-\varphi) & -\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(\cos\varphi - \cos(\vartheta-\varphi)) \end{pmatrix}$$

Calcolato nell'equilibrio si ha che $HessV(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Quindi l'equilibrio è stabile.
**c.** La matrice Hessiana di $V$ è diagonale, la matrice cinetica del sistema è $m\ell^2 Id$, che è pure diagonale. La trattazione delle piccole oscillazioni è triviale e porge che qualsiasi modo è normale con frequenza $\sqrt{g/\ell}$.

### Esercizio B

$$\begin{cases} \dot{x} &= -4x3 + 4x \\ \dot{y} &= -2y \end{cases}$$

Si ricorda che l'equazione differenziale linearizzata attorno all'equilibrio $(x^*, y^*)$ è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_x}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial X_x}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial X_y}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial X_y}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix}$$

Equilibri: $(x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (1, 0), (x_3, y_3) = (-1, 0)$.

**a.** Sistema Linearizzato attorno a $(x_1, y_1) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 4x \\ \dot{y} &= -2y \end{cases}$$

Autovalori: 4,-2: instabile.

Sistema Linearizzato attorno a $(x_2, y_2) = (1, 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} & = -8(x-1) \\ \dot{y} & = -2y \end{cases}$$

Autovalori: -8,-2: asint. stabile.
Sistema Linearizzato attorno a $(x_3, y_3) = (-1, 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} & = -8(x+1) \\ \dot{y} & = -2y \end{cases}$$

Autovalori: -8,-2: asint. stabile.

**b.** Dato che il campo vettoriale è un sistema gradiente, allora $f$ è non crescente lungo le soluzioni, infatti la derivata di Lie di $f$ è

$$\dot{f} = L_X f = \nabla_{\mathbb{R}2} f \cdot (-\nabla_{\mathbb{R}2} f) = -|\nabla_{\mathbb{R}2} f|^2 \leq 0$$

L'Hessiana di $f$ in $(1, 0)$ è

$$\nabla_{\mathbb{R}2} 2f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x2 - 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Big|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} : \quad \text{pos. def.}$$

Dunque quest'ultimo fatto (usando il teorema della funzione inversa) ci dice anche che la funzione $\nabla_{\mathbb{R}2} f : \mathbb{R}2 \to \mathbb{R}2$, localmente attorno a $(1, 0)$, si annulla solo in tale punto, così $f$ è *strettamente* decrescente lungo le soluzioni e la funzione $W(x, y) := f(x, y) - f(1, 0) = x2(x2 - 2) + y2 + 1$, che è localmente definita positiva attorno a $(1, 0)$, è la funzione di Liapunov cercata per l'asintotica stabilità.