

Esercizio **A** dell'Appello Scritto di Fisica matematica dell' 11 aprile 2005

A In un piano verticale Oxy , y verticale ascendente: $\mathbf{g} = -g\hat{y}$, un semi-disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare lungo l'asse x e nel semipiano $y \geq 0$. Tale moto di puro rotolamento è ovviamente realizzato dalla semi-circonferenza con cui essa, assieme ad un diametro del disco geometrico intero, compone il bordo del semi-disco in studio. Si indichi con G il baricentro del semi-disco e con C il centro del disco geometrico intero. Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo il diametro bordo del semi-disco ed è attaccato con una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $h > 0$ al centro C del disco. Il semi-disco ha il suo diametro che è orizzontale quando $x_G = 0$ (In tal caso anche $x_C = 0$). In tale configurazione si chiami Q il punto materiale del semi-disco che è tangente all'asse x . Si consideri l'angolo orientato in senso orario (rispetto all'osservatore in $z > 0$) θ che la semi-retta verticale discendente con origine in C , forma con la la semiretta CQ . Si indichi con ξ l'ascissa di P (su di un asse solidale al diametro e centrato in C .) Si indichi con $d := |CG|$.

- 1) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- 2) Determinare le condizioni sui dati strutturali definenti il sistema affinché $(\theta, \xi) = (0, 0)$ sia d'equilibrio stabile.
- 3) Si scrivano le coordinate di G e di P in funzione dei due parametri lagrangiani scelti θ e ξ : $x_G(\theta, \xi)$, $y_G(\theta, \xi)$, $x_P(\theta, \xi)$, $y_P(\theta, \xi)$.

Soluzione.

$$x_G = R\theta - d \sin \theta$$

$$y_G = R - d \cos \theta$$

$$x_P = R\theta + \xi \cos \theta$$

$$y_P = R - \xi \sin \theta$$

Naturalmente, per $|\theta| < \pi/2$ e $|\xi| < R$.

L'energia potenziale del sistema è

$$\begin{aligned} U(\xi, \theta) &= Mg(R - d \cos \theta) + \frac{h}{2}\xi^2 + mg(R - \xi \sin \theta) = \\ &= -Mgd \cos \theta + \frac{h}{2}\xi^2 - mg\xi \sin \theta + \text{cost.} \end{aligned}$$

Equazione dell'equilibrio:

$$0 = \nabla U(\xi, \theta) : \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial U}{\partial \xi} = -mg \sin \theta + h\xi, \\ 0 = \frac{\partial U}{\partial \theta} = Mgd \sin \theta - mg\xi \cos \theta. \end{cases}$$

Osservando la prima equazione, per $\xi = 0$ si ha che $\sin \theta$ si annulla solo in $\theta = 0$, ed è pure soddisfatta la seconda. Per la ricerca di soluzioni diverse da $(\xi_1^*, \theta_1^*) = (0, 0)$, le due

equazioni si scrivono

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{h}{mg} \xi \\ \sin \theta &= \frac{m}{Mg} \xi \cos \theta\end{aligned}$$

dunque, per $\xi \neq 0$, otteniamo:

$$\theta_2^* = \arccos \frac{Mdh}{m^2g} \quad \text{se} \quad \frac{Mdh}{m^2g} \leq 1, \quad \theta_3^* = -\theta_2^*.$$

Corispondentemente:

$$\begin{aligned}\xi_2^* &= \frac{mg}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{Mdh}{m^2g} \right)^2} = -\xi_3^* \\ \nabla^2 U(\xi, \theta) &= \begin{pmatrix} h & -mg \cos \theta \\ -mg \cos \theta & Mgd \cos \theta - mg\xi \sin \theta \end{pmatrix} \\ \nabla^2 U(0, 0) &= \begin{pmatrix} h & -mg \\ -mg & Mgd \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Condizione sufficiente per la stabilità in $(\xi, \theta) = (0, 0)$ è che la forma qu. associata a $\nabla^2 U(0, 0)$ sia definita positiva:

$$h > 0, \quad \det \nabla^2 U(0, 0) = Mgdh - (mg)^2 > 0$$

Si osserva che tale stabilità di $(\xi_1^*, \theta_1^*) = (0, 0)$ è garantita nel caso di non esistenza delle ulteriori soluzioni (ξ_2^*, θ_2^*) e (ξ_3^*, θ_3^*) .