

**- Fisica Matematica - Corso di Laurea in Matematica - 11 Aprile 2005**

**B.** In un riferimento inerziale  $Oxyz$ , con  $z$  verticale ascendente, un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è vincolato in modo liscio sul piano per l'origine di equazione  $x + y + z = 0$ . Il punto è soggetto a gravità e alla forza (conservativa) di potenziale

$$U(x, y, z) = x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \quad \alpha = 2, 3, 4, \dots$$

Si riferisca il sistema alle coordinate lagrangiane  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ , per cui la posizione del punto vincolato è  $OP = OP(x, y)$ .

1) Determinare le configurazioni di equilibrio soddisfacenti alla condizione  $x_{eq} = y_{eq}$  discutendone l'esistenza al variare di  $\alpha$ ,

2) Mostrare che tali configurazioni di equilibrio sono stabili nel caso  $\alpha = 2$ ,

3) Calcolare l'energia cinetica del sistema vincolato e le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile nel caso  $\alpha = 2$ .

Soluzione. Usando il vincolo, la posizione del punto  $P$  è  $OP(x, y) = (x, y, -(x+y))$ . L'energia potenziale del punto si trova componendo l'energia potenziale del sistema libero con il vincolo, pertanto

$$U(x, y) = -mg(x + y) + x^\alpha + y^\alpha + (-(x + y))^\alpha.$$

Le configurazioni di equilibrio sono le soluzioni di  $\nabla U(x, y) = 0$ , ovvero

$$-mg + \alpha x^{\alpha-1} + (-1)^\alpha \alpha (x + y)^{\alpha-1} = 0, \quad -mg + \alpha y^{\alpha-1} + (-1)^\alpha \alpha (x + y)^{\alpha-1} = 0.$$

Imponendo la condizione  $x_{eq} = y_{eq}$ , ci si riduce all'unica equazione

$$-mg + \alpha x^{\alpha-1} + (-1)^\alpha \alpha (2x)^{\alpha-1} = 0$$

che ha soluzione

$$x_{eq}^{\alpha-1} = y_{eq}^{\alpha-1} = \frac{mg}{\alpha[1 + (-1)^\alpha 2^{\alpha-1}]}.$$

Per  $\alpha$  dispari,  $\alpha = 2\beta + 1$ , con  $\beta = 1, 2, 3, \dots$  Vi sono soluzioni solo se  $1 + (-1)^\alpha 2^{\alpha-1} > 0$ , ovvero solo se

$$1 + 2^{2\beta}(-1)^{2\beta+1} > 0, \quad i.e. \quad 2^{2\beta} < 1$$

che non ha soluzioni. Vi sono pertanto configurazioni di equilibrio solo per  $\alpha$  pari.

Nel caso  $\alpha = 2$  (forza elastica di costante elastica  $h = 2$ ), calcoliamo la matrice Hessiana, per indagare la stabilità con THND (sole forze conservative). Si ha