Fisica Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica Primo compitino 23/02/2005

Esercizio A Nel piano Oyx (con l'asse y verticale ascendente: $\underline{g} = -g\,\hat{y}, \quad g > 0$) di un riferimento inerziale $Oxyz$ si consideri il sistema formato da un'asta AB di massa trascurabile e lunghezza $2l$ il cui estremo A è vincolato in modo liscio a scorrere sul'asse y; inoltre, tra l'estremo A e l'origine è tesa una molla lineare di costante elastica $h > 0$ mentre nel centro C dell'asta AB vi è da un punto materiale C di massa m, solidale all'asta. Si descriva la generica configurazione del sistema mediante la coordinata $y = y_A$ e l'angolo θ tra la direzione negativa dell'asse y e il segmento AB, valutato in senso antiorario.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità applicando i teoremi visti nel corso.

2) Si supponga ora che sul punto A agisca una forza di attrito viscosa $F_A = -kv_A$, $k > 0$. Determinare i nuovi equilibri e discuterne la stabilità

3) Si elimini la forza viscosa in A e si supponga che il sistema $Oxyz$ ruoti con velocità angolare costante Ω attorno all'asse y. Dire sotto quali condizioni sui dati strutturali del problema la configurazione di equilibrio con $\theta = 0$ rimane stabile.

Esercizio A - Soluzione.

1) Il sistema è soggetto a sole forze conservative con energia potenziale

$$U(y, \theta) = U^g + U^{el} = mg(y - l\cos\theta) + \frac{h}{2}y^2.$$

Gli equilibri sono dati dalle soluzioni $P = (y, \theta)$ di

$$U_y = mg + hy = 0, \qquad U_\theta = mgl\sin\theta = 0$$

ovvero $P_1 = (-\frac{mg}{h}, 0)$, $P_2 = (-\frac{mg}{h}, \pi)$; La matrice Hessiana è

$$H_U(\theta) = Diag[h, mgl\cos\theta].$$

Pertanto:

$H_U(P_1) \in Sym^+ \Rightarrow P_1$ è stabile per THND, TLD;
$H_U(P_2) \notin Sym^+ \Rightarrow P_2$ è instabile per THND.

2) Calcoliamo la componente lagrangiana della forza di attrito viscosa:

$$\delta L^{att} = -kv_A \cdot \delta P_A = -k\dot{y}\hat{y} \cdot dy\hat{y} = Q_y dy + Q_\theta d\theta$$

da cui $Q_y = -k\dot{y} \neq 0$, $Q_\theta = 0$.

Non posso usare THND ma posso ancora usare TLD poichè $Q(y, \dot{y})\dot{y} = -k(\dot{y})^2 \leq 0$. Pertanto

P_1 è ancora stabile per TLD, nulla si puo' dire per P_2.

3) Si aggiungono ora le forze apparenti, centrifuga e di Coriolis. La prima ammette potenziale

$$U^{cf} = -\frac{m}{2}\Omega^2 l^2 \sin^2\theta,$$

mentre la forza di Coriolis, ortogonale al piano (x, y) ha componenti lagrangiane tutte nulle poichè gli spostamenti virtuali appartengono al piano (x, y). Posso quindi usare THND e TLD. Il punto P_1 è ancora di equilibrio poichè è soluzione di

$$U_y = mg + hy = 0, \qquad U_\theta = mgl \sin\theta - m\Omega^2 l^2 \sin\theta \cos\theta = 0$$

La nuova matrice Hessiana in P_1 verifica

$$H_U(P_1) = Diag[h, mgl - m\Omega^2 l^2] \in Sym^+ \Leftrightarrow \Omega^2 < \frac{g}{l}$$

pertanto P_1 è stabile se $\Omega^2 < \frac{g}{l}$ per THND o TLD, è instabile se $\Omega^2 > \frac{g}{l}$ per THND e nulla si puo' dire se $\Omega^2 = \frac{g}{l}$.