Secondo compitino, 18 marzo 2005

A

Un'asta materiale AB omogenea, di massa m e di lunghezza, l è posta in un piano orizzontale liscio (Oxy), $\mathbf{g} = -g\hat{z}$. Una molla di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica $h > 0$ è tesa tra l'origine O e il baricentro G dell'asta. Si indichino con x e y le coordinate del baricentro G e con θ l'angolo orientato, positivamente anti-orario rispetto all'osservatore in $z > 0$, dalla semiretta $x > 0$ all'asta. Sull'asta agisce inoltre una coppia dissipativa la cui "1-forma" lavoro è individuata dalle seguenti Componenti Lagrangiane della Sollecitazione:

$$Q_x = 0, \qquad Q_y = 0, \qquad Q_\theta = -k\dot{\theta}, \qquad (k > 0).$$

Scrivere in dettaglio le equazioni di Lagrange e risolverle esplicitamente per il problema di Cauchy con dati iniziali:

$$x(0) = x_0 > 0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$
$$y(0) = y_0 > 0, \quad \dot{y}(0) = 0,$$
$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0.$$

Soluzione (traccia):

$T(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2.$

$\mathcal{U}^{elast.}(x, y, \theta) = \frac{1}{2}h(x^2 + y^2).$

Equazioni di Lagrange:

$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{U}^{elast.}}{\partial x} + Q_x : \quad m\ddot{x} = -hx,$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{U}^{elast.}}{\partial x} + Q_y : \quad m\ddot{y} = -hy,$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{U}^{elast.}}{\partial x} + Q_\theta : \quad \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta} = -k\dot{\theta}.$

$x(t, a_1, a_2) = a_1 \cos\sqrt{\frac{h}{m}}t + a_2 \sin\sqrt{\frac{h}{m}}t,$

$y(t, b_1, b_2) = b_1 \cos\sqrt{\frac{h}{m}}t + b_2 \sin\sqrt{\frac{h}{m}}t$

sulla base dei dati iniziali si determina:

$x(t) = x_0 \cos\sqrt{\frac{h}{m}}t,$

$y(t)) = y_0 \cos\sqrt{\frac{h}{m}}t.$

Infine:

$\theta(t, c_1, c_2) = c_1 + c_2 e^{-\frac{12k}{ml^2}t}$

e i dati iniziali fissano c_1 e c_2:

$c_1 + c_2 = 0, \qquad -\frac{12k}{ml^2}c_2 = \dot{\theta}_0,$

$\theta(t) = \frac{ml^2}{12k}\dot{\theta}_0(1 - e^{-\frac{12k}{ml^2}t}).$