Fisica Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica Secondo compitino 18/032/2005

Esercizio B Nel piano Oyx (con l'asse y verticale ascendente: $\underline{g} = -g\,\hat{y}, \quad g > 0$) di un riferimento inerziale $Oxyz$ si consideri il sistema formato da un anello di massa M e raggio R che rotola senza strisciare sull'asse x, e da un'asta AP di massa trascurabile vincolata in un punto A dell'anello e libera di ruotare nel piano Oxy. Nell'estremo P è posto un punto materiale di massa m, fisso in P. Infine tra il baricentro G ed il punto G', proiezione del baricentro G dell'anello sull'asse y è tesa una molla di costante elastica $h > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si riferisca il sistema alle coordinate θ e ϕ, rispettivamente angolo tra la direzione negativa dell'asse y e il vettore GA, valutato in senso orario e angolo tra la direzione negativa dell'asse y e il vettore AP, valutato in senso orario. Si supponga che per $\theta = 0 \;\; x_{G'} = 0$.

1) Scrivere l'energia potenziale del sistema e la sua energia cinetica

2) Scrivere esplicitamente l'equazione delle frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilbrio stabile (verificarlo).

3) Scrivere le equazioni di Lagrange della lagrangiana linearizzata.

Esercizio B del 18 Marzo 2005 - Soluzione

L'energia potenziale (elastica + gravitazionale) del sistema è :

$$U(\theta, \phi) = \frac{h}{2} R^2 \theta^2 - mg(R\cos\theta + l\cos\phi).$$

L'energia cinetica del sistema (anello + punto) è (T. di Steiner):

$$T = T^A + T^P = \frac{1}{2}(MR^2 + MR^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v_P^2$$

ove $v_P = v_A + \omega \wedge AP$ e $v_A = v_G + \Omega \wedge GA$ ove $\omega = -\dot{\phi}\hat{z}$ e $\Omega = -\dot{\theta}\hat{z}$ pertanto

$$v_P^2 = 2R^2(1-\cos\theta)\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 - 2Rl[(1-\cos\theta)\cos\phi - \sin\theta\sin\phi]\dot{\theta}\dot{\phi}.$$

Il punto $\theta = 0$, $\phi = 0$ è (a vista) di minimo assoluto per U e quindi $P^* = (0, 0)$ è stabile per TLD. Calcoliamo la matrice Hessiana in P^*; da

$$U_{\theta\theta} = hR^2 + mgR\cos\theta, \quad U_{\phi\phi} = mgl\cos\theta, \quad U_{\theta\phi} = 0$$

si ha

$$H_U(P^*) = \begin{pmatrix} hR^2 + mgR & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix} \in Sym^+.$$

La matrice dell'energia cinetica è:

$$A(P^*) = \begin{pmatrix} 2MR^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}$$

L'equazione per le frequenze caratteristiche $\det(H_U(P^*) - \omega^2 A(P^*)) = 0$ si scrive

$$0 = \det \begin{pmatrix} hR^2 + mgR - \omega^2 MR^2 & 0 \\ 0 & mgl - \omega^2 ml^2 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni di Lagrange della Lagrangiana linearizzata sono

$$2MR^2\ddot{\theta} + (hR^2 + mgR)\theta = 0, \qquad ml^2\ddot{\phi} + mgl\phi = 0.$$

quindi le coordinate del sistema sono le ccordinate normali.