Fisica Matematica -Laurea Triennale in matematica - 20 Settembre 05

Scrivere chiaramente sui fogli che si consegnano: Cognome Nome, data

(Risolvere l' esercizio B in fogli *distinti* da ulteriori eventuali fogli usati per la soluzione dell' esercizio A)

1. In un riferimento inerziale $Oxyz$ con y verticale ascendente, si consideri il sistema, vincolato a restare nel piano verticale Oxy, costituito da un'asta rigida omogenea AB di massa m e lunghezza $2R$; l'asta è libera di ruotare attorno ad un suo estremo A vincolato in modo liscio nel punto $A' = (0, 5R)$, e da un disco rigido di massa m e raggio R che rotola senza strisciare lungo l'asse x. L'estremo libero B dell'asta è collegato al baricentro G del disco da una molla di costante elastica h e lunghezza a riposo nulla. Si riferisca il sistema alle coordinate lagrangiane $s = x_G$ e θ, angolo formato dalla direzione negativa dell'asse y con l'asta AB, valutato in senso antiorario.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema

1) Determinare le piccole oscillazioni del sistema attorno ad un equilibrio stabile nel'ipotesi semplificativa $mg = hR$.

Soluzione. Il sistema è soggetto a sole forze conservative,

$$U = U^g + U^{el} = -mgR\cos\theta + \frac{h}{2}[(s - 2R\sin\theta)^2 + 4R^2(2 - \cos\theta)^2]$$

Gli equilibri si trovano annullando il gradiente del potenziale

$$U_s = h(s - 2R\sin\theta) = 0,$$

$$U_\theta = mgR\sin\theta - h(s - 2R\sin\theta)2R\cos\theta + 4R^2h(2 - \cos\theta)\sin\theta = 0$$

e sono $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (0, \pi)$. La matrice Hessiana calcolata in P_1 è

$$H_U(0,0) = \begin{pmatrix} h & -2Rh \\ -2Rh & R(mg + 8Rh) \end{pmatrix} \in Sym^+, \qquad \det H_U(0,0) = hRmg + 4R^2h^2$$

quindi P_1 è equilibrio stabile per TLD o THND.

Energia cinetica (si usa il Teorema di König)

$$T_D = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{\dot{s}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}m\dot{s}^2, \quad T_AB = \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}mR^2\dot{\theta}^2$$

Piccole oscillazioni

$$\det(H_U(0,0) - \omega^2 A(0,0) = 0 \quad i.e. \quad \det\begin{pmatrix} h - \frac{3}{2}m\omega^2 & -2Rh \\ -2Rh & R(mg + 8Rh) - \frac{4}{3}mR^2\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

cha ha soluzioni, nell'ipotesi $mg = hR$,

$$\omega_{1,2}^2 = (\frac{89}{21} \pm \frac{\sqrt{6481}}{24})\frac{h}{m}$$