A
Un corpo rigido libero, avente momenti principali d'inerzia $I_1,\ I_2,\ I_3$ rispetto ad una base solidale principale d'inerzia, $\mathcal{I}$ =diag$(I_1,\ I_2,\ I_3)$, è soggetto alla sola forza gravitazionale, con l'accelerazione di gravità usuale **g**: costante.
Si scrivano le equazioni di Euler in tale base:

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - .....$$

Si mostri che l'energia cinetica rispetto al sistema del baricentro, $T(\underline{\omega}) = \frac{1}{2}(\mathcal{I}\underline{\omega}, \underline{\omega}) = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$, è una funzione di Liapunov per la stabilità della soluzione nulla $\underline{\omega} = \underline{0}$.

Si consideri poi lo stesso corpo rigido soggetto ora ad ulteriori forze dissipative per cui il momento risultante di esse rispetto al baricentro sia dato da

$$\underline{N}^{ext} = -k\ \underline{\omega} \qquad (k > 0)$$

Per le nuove equazioni di Euler si mostri che $\underline{\omega} = \underline{0}$ è ancora un equilibrio e che è asintoticamente stabile.
E' vero che *comunque* fissiamo il dato iniziale $\underline{\omega}(0) = \underline{\omega}_0 \in \mathbb{R}^3$ la soluzione $t \mapsto \underline{\omega}(t)$ che da lí evolve tende asintoticamente nel tempo a $\underline{\omega}(+\infty) = \underline{0}$?

Soluzione. Le equazioni di Euler nel caso in studio nella prima domanda, dato che $\underline{N}^g = \underline{0}$ (perché? scriverne una giustificazione), si scrivono

$$\mathcal{I}\underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \wedge \mathcal{I}\underline{\omega} = \underline{0}$$

e in componenti

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0, \quad \text{ecc.}$$

Naturalmente $\underline{\omega} = \underline{0}$ è un equilibrio per le equ. di Euler e $T(\underline{\omega}) = \frac{1}{2}(\mathcal{I}\underline{\omega}, \underline{\omega})$ è una funzione di Liapunov per la (semplice) stabilità, infatti:

i) T è definita positiva, in tutto $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$,

ii) la derivata di Lie di T lungo il campo vettoriale dato dal secondo membro delle equ. di Euler vale identicamente zero: T è infatto un integrale primo,

$$\dot{T} = \frac{1}{2}(\mathcal{I}\underline{\dot{\omega}}, \underline{\omega}) + \frac{1}{2}(\mathcal{I}\underline{\omega}, \underline{\dot{\omega}}),$$

$\mathcal{I}$ è simmetrica,

$$\dot{T} = (\mathcal{I}\underline{\dot{\omega}}, \underline{\omega}) = (-\underline{\omega} \wedge \mathcal{I}\underline{\omega}, \underline{\omega}) = 0 \quad \text{(prodotto misto complanare)}$$

Nella seconda domanda, $\underline{N}^{ext} = -k\ \underline{\omega}\ (k > 0)$, e in tal caso ancora $\underline{\omega} = \underline{0}$ è un equilibrio per le equ. di Euler. Si puo' procedere in due modi.

Primo modo: accertarsi se la funzione T è una funzione di Liapunov per l'asintotica stabilità. In effetti, T è definita positiva e la sua derivata di Lie ora vale

$$\dot{T} = (-\underline{\omega} \wedge \mathcal{I}\underline{\omega} - k\ \underline{\omega}, \underline{\omega}) = -k|\underline{\omega}|^2,$$

$\dot{T}$ è globalmente definita negativa in tutto $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$: c'è l'asintotica stabilità.

Secondo modo. Col primo metodo di Liapunov, le equazioni linearizzate attorno a $\underline{\omega} = \underline{0}$ sono

$$\mathcal{I}\dot{\underline{\omega}} = -k\ \underline{\omega}, \quad \text{o meglio}: \ \dot{\underline{\omega}} = -k\mathcal{I}^{-1}\ \underline{\omega},$$

in dettaglio:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k/I_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k/I_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k/I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

si noti che il termine (che si è trascurato) $\underline{\omega} \wedge \mathcal{I}\underline{\omega}$ è quadratico in $\underline{\omega}$. Gli autovalori sono dunque reali e negativi, $-k/I_i < 0,\ i = 1, 2, 3$, e si ritrova l'asintotica stabilità.
E' vero che *comunque* fissiamo il dato iniziale $\underline{\omega}(0) = \underline{\omega}_0 \in \mathbb{R}^3$ la soluzione $t \mapsto \underline{\omega}(t)$ che da lí evolve tende asintoticamente nel tempo a $\underline{\omega}(+\infty) = \underline{0}$? Si, la funzione di Liapunov per l'asintotica stabilità T è globale in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$.