- Fisica Matematica - Corso di Laurea in Matematica - 21Marzo 2005

B. Nel piano Oxy con y verticale ascendente, di un riferimento $Oxyz$ si consideri il sistema costituito da due aste OA e OB di massa m e lunghezza $2l$ libere di ruotare nel piano Oxy con l'estremo O fisso nell'origine. Inoltre tra i punti A e B è tesa una molla di costante elastica h e lunghezza a riposo nulla. Si riferisca il sistema agli angoli θ e ϕ tra la direzione negativa dell'asse delle y e i vettori OB e OA rispettivamente, valutati in senso antiorario.

1) Scrivere l'energia potenziale del sistema (si usi la relazione vettoriale $OA + AB = OB$ per calcolare $|AB|^2$) e la sua energia cinetica

2) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilbrio stabile (verificarlo).

3) Scrivere le equazioni di Lagrange della lagrangiana linearizzata e individuare (a vista) le coordinate normali del sistema.

Esercizio B del 21 Marzo 2005 - Soluzione

L'energia potenziale (elastica + gravitazionale) del sistema è (T. di Carnot per calcolare AB^2):

$$U(\theta, \phi) = -mgl(\cos\theta + \cos\phi) + \frac{h}{2}(8l^2 - 8l^2\cos(\theta - \phi)).$$

L'energia cinetica del sistema si calcola facilmente

$$T = \frac{1}{2} I_O(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2), \quad I_O = \frac{m4l^2}{3}$$

Il punto $\theta = 0$, $\phi = 0$ è (a vista) di minimo assoluto per U e quindi $P^* = (0, 0)$ è stabile per TLD. Calcoliamo la matrice Hessiana in P^*; da

$$U_{\theta\theta} = mg2l\cos\theta + h4l^2\cos(\theta - \phi), \quad U_{\phi\phi} = mg2l\cos\phi + h4l^2\cos(\theta - \phi), \quad U_{\theta\phi} = -h4l^2\cos(\theta - \phi)$$

si ha

$$H_U(P^*) = \begin{pmatrix} mg2l + h4l^2 & -h4l^2 \\ -h4l^2 & mg2l + h4l^2 \end{pmatrix} \in Sym^+.$$

La matrice dell'energia cinetica è diagonale:

$$A(P^*) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}ml^2 \end{pmatrix}$$

L' equazione per le frequenze caratteristiche $\det(H_U(P^*) - \omega^2 A(P^*)) = 0$ si scrive

$$0 = \det\begin{pmatrix} mg2l + h4l^2 - \omega^2\frac{4}{3}ml^2 & -h4l^2 \\ -h4l^2 & mg2l + h4l^2 - \omega^2\frac{4}{3}ml^2 \end{pmatrix}$$

che ha soluzioni

$$\omega_1^2 = \frac{3g}{2l}, \qquad \omega_2^2 = \frac{6h}{m} + \frac{3g}{2l}.$$

La lagrangiana linearizzata, posto $q = (\theta, \phi)$, si scrive

$$L = \frac{1}{2}A(P^*)(\dot{q}, \dot{q}) - \frac{1}{2}H_U(P^*)(q, q)$$

e le equazioni di Lagrange corrispondenti sono

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + (mg2l + h4l^2)\theta - h4l^2\phi = 0, \qquad \frac{4}{3}ml^2\ddot{\phi} + (mg2l + h4l^2)\phi - h4l^2\theta = 0$$

da cui si deduce subito che le coordinate normali nelle quali le equazioni di Lagrange sono

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0, \qquad i = 1, 2$$

sono

$$q_1 = \theta + \phi, \qquad q_2 = \theta - \phi.$$