Esercizio **A** del primo compitino 2007

A Si consideri l'equazione ($x \in \mathbb{R}$)

$$\ddot{x} = 2x^3 \tag{$*$}$$

1. Risolvere il problema di Cauchy per $x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1$. Quanto tempo ci si mette lungo tale soluzione per andare all'∞ ?
2. Abbozzare il diagramma in fase per il sistema dinamico $(*)$, tracciando qualche importante curva di livello dell'"energia" associata al sistema. Esistono equilibri? Esistono curve separatrici? Se si, mettere tali luoghi in evidenza nel disegno.
3. Il moto trovato del punto 1. dove si trova? su una curva qualsiasi di livello dell'energia? oppure proprio sulla separatrice?

Soluzione.

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - 2\int_1^x \lambda^3 d\lambda = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}$$

$$e = E(1, 1) = \frac{1}{2}$$

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} : \qquad |\dot{x}| = x^2, \qquad \dot{x}(0) = 1 > 0, \qquad \dot{x} = x^2,$$

$$\int_1^x \frac{dx'}{x'^2} = t, \qquad x(t) = \frac{1}{1-t}$$

Tale moto sta sulla separatrice relativa all'equilibrio $(x = 0, \dot{x} = 0)$, infatti il valore dell'energia della separatrice è $E(0, 0) = E(1, 1) = \frac{1}{2} = e$, oppure, considerando anche

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

si vede che il moto trovato si prolunga per $t \to -\infty$ e si ottiene

$$\lim_{t \to -\infty} (x(t), \dot{x}(t)) = (0, 0)$$

che è l'unico punto di equilibrio del sistema.
Non si pone il problema che $E(x, \dot{x})$ sia funzione di Liapunov, sia perché in $(0, 0)$ non è localmente positiva (ha un comportamento di tipo 'sella'), sia perché è ben chiaro che $(0, 0)$ è instabile; naturalmente vale $\dot{E} = L_X E = 0$.
Il disegno del diagramma in fase deve qualitativamente tener conto che la separatrice è una curva parabolica $|\dot{x}| = x^2$, cioè $\dot{x} = x^2$ e $\dot{x} = -x^2$.