Laurea di Primo Livello in Matematica
Fisica Matematica — Primo Compitino
15 Febbraio 2007

Importante: *Non scrivere su questo foglio. Scrivere la soluzione degli esercizi A e B su due fogli distinti con il vostro nome e cognome.*

Esercizio A Si consideri l'equazione ($x \in \mathbb{R}$)

$$\ddot{x} = 2x^3 \tag{$*$}$$

1. Risolvere il problema di Cauchy per $x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1$.
Quanto tempo ci si mette il punto geometrico rappresentativo che si muove lungo tale soluzione per andare all'∞ ?
2. Abbozzare il diagramma in fase per il sistema dinamico ($*$), tracciando qualche importante curva di livello dell'"energia" associata al sistema.
3. Esistono equilibri? Si può dire qualcosa sulla stabilità osservando le curve del diagramma in fase? L'energia è per tale (o tali) equilibrio(i) una funzione di Liapunov?
Esistono curve separatrici? Se si, mettere tali luoghi in evidenza nel disegno.
4. Il moto trovato del punto 1. dove si trova? su una curva qualsiasi di livello dell'energia? oppure proprio sulla separatrice?

Esercizio B In un riferimento cartesiano ortonormale (O, x, y, z) con l'asse y verticale, si consideri il sistema costituito da due guide rettilinee r_1 e r_2, giacenti nel piano verticale Oxy e formanti rispettivamente l'angolo β e $\pi - \beta$ con la direzione positiva dell'asse delle x. Si ponga inoltre $\alpha = \pi - 2\beta$ l'angolo tra le due guide. Su di esse si considerino le ascisse s_1 e s_2 con $s_1(O) = s_2(O) = 0$. Sulle guide rettilinee sono vincolati in modo liscio a scorrere due punti materiali di egual massa m; tra i punti è tesa inoltre una molla lineare di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica h. Il sistema $Oxyz$ ruota con velocità angolare ω costante e diretta come l'asse y.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema ed enunciare una condizione sui dati strutturali del problema per la quale esista un solo equilibrio.
2. Studiare la stabilità della configurazione di equilibrio determinata al punto 1 al variare di ω (motivare i risultati citando gli opportuni teoremi visti nel corso).
3. Come cambiano gli equilibri e la loro analisi della stabilità aggiungendo una forza di attrito viscoso su uno dei due punti?

(formula utile: Teorema del coseno $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$)

Soluzione es. B. Nel sistema non inerziale, le forze agenti sono la gravità, la forza elastica e la forza centrifuga, conservative, e la forza di Coriolis. Quest'ultima ha componenti Lagrangiane identicamente nulle perchè i vettori ω, OP_i e $\delta P_i = \tilde{v}_i dt$ sono complanari quind $\delta L = -2m\omega \wedge v_i \cdot \delta P_i \equiv 0$.

Il potenziale delle forze conservative è : $(U = U^g + U^{el} + U^{cf})$

$$U(s_1, s_2) = g \sin\beta m(s_1 + s_2) + \frac{h}{2}(s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos\alpha) - \frac{\omega^2}{2}\cos^2\beta m(s_1^2 + s_2^2)$$

Le configurazioni di equilibrio sono le soluzioni di $\nabla U(s) = 0$ e quindi sono le soluzioni del sistema lineare non omogeneo

$$\frac{\partial U}{\partial s_1} = mg \sin\beta + h(s_1 - s_2 \cos\alpha) - \omega^2 m \cos^2\beta s_1 = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial s_2} = mg \sin\beta + h(s_2 - s_1 \cos\alpha) - \omega^2 m \cos^2\beta s_2 = 0.$$

Vi è un solo equilibrio se vale la condizione sui dati strutturali del problema

$$\det A = \det Hess_U = \begin{pmatrix} h - \omega^2 m \cos^2\beta & -h\cos\alpha \\ -h\cos\alpha & h - \omega^2 m \cos^2\beta \end{pmatrix} \neq 0$$

Poichè $Q(q, \dot{q}) = 0$ e $detHess_U \neq 0$, possiamo sempre applicare il THND per studiare la stabilità dell'unica configurazione $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ di equilibrio esistente. Quindi: s^* è stabile se e solo se $A \in Sym^+$ e questa condizione è soddisfatta se e solo se

$$h - \omega^2 m \cos^2\beta > 0, \ \det A = (h - \omega^2 m \cos^2\beta)^2 - h^2 \cos^2\alpha > 0.$$

ovvero se e solo se

$$\frac{h(1 - |\cos\alpha|)}{m\cos^2\beta} < \omega^2 < \frac{h}{m\cos^2\beta}.$$

Aggiungendo una forza di attrito viscoso, nulla per velocità nulla, gli equilibri non cambiano, ma non possiamo più usare THND per affermare l'instabilità dell'equilibrio. La condizione trovata su ω^2 individua (condizione solo sufficiente) i valori di ω per le quali l'equilibrio è stabile per TLD.